

Análise de Algoritmos

**Parte destes slides são adaptações de slides
do Prof. Paulo Feofiloff e do Prof. José Coelho de Pina.**

Casamentos estáveis

Atribuição de estudantes a universidades,
médicos a programas de residência.

Casamentos estáveis

Atribuição de estudantes a universidades,
médicos a programas de residência.

H - conjunto de homens

M - conjunto de mulheres

Casamentos estáveis

Atribuição de estudantes a universidades,
médicos a programas de residência.

H - conjunto de homens

M - conjunto de mulheres

Cada **homem** tem ordem estrita de preferência sobre M .

Casamentos estáveis

Atribuição de estudantes a universidades, médicos a programas de residência.

H - conjunto de homens

M - conjunto de mulheres

Cada **homem** tem ordem estrita de preferência sobre M .

Adicione homem/mulher fictício para representar a possibilidade de ficar solteiro.

Assim $|H| = |M|$.

Casamentos estáveis

Atribuição de estudantes a universidades, médicos a programas de residência.

H - conjunto de homens

M - conjunto de mulheres

Cada **homem** tem ordem estrita de preferência sobre M .

Adicione homem/mulher fictício para representar a possibilidade de ficar solteiro.

Assim $|H| = |M|$.

Emparelhamento de H em M :
alocação de homens a mulheres.

Casamentos estáveis

H - conjunto de homens

M - conjunto de mulheres

Casamentos estáveis

H - conjunto de homens M - conjunto de mulheres

Cada **homem** tem ordem estrita de preferência sobre M .

Casamentos estáveis

H - conjunto de homens M - conjunto de mulheres

Cada **homem** tem ordem estrita de preferência sobre M .

Emparelhamento de H em M :
alocação de homens a mulheres.

Casamentos estáveis

H - conjunto de homens M - conjunto de mulheres

Cada **homem** tem ordem estrita de preferência sobre M .

Emparelhamento de H em M :
alocação de homens a mulheres.

Um emparelhamento é **instável** se
existem **homens** h e h' e **mulheres** m e m' tq
 m é emparelhada com h , m' com h' , mas $m' \succ_h m$ e $h \succ_{m'} h'$.

Casamentos estáveis

H - conjunto de homens M - conjunto de mulheres

Cada **homem** tem ordem estrita de preferência sobre M .

Emparelhamento de H em M :
alocação de homens a mulheres.

Um emparelhamento é **instável** se
existem **homens** h e h' e **mulheres** m e m' tq
 m é emparelhada com h , m' com h' , mas $m' \succ_h m$ e $h \succ_{m'} h'$.

Neste caso, h e m' preferiam se casar um com o outro.

Casamentos estáveis

H - conjunto de homens M - conjunto de mulheres

Cada **homem** tem ordem estrita de preferência sobre M .

Emparelhamento de H em M :
alocação de homens a mulheres.

Um emparelhamento é **instável** se existem **homens** h e h' e **mulheres** m e m' tq m é emparelhada com h , m' com h' , mas $m' \succ_h m$ e $h \succ_{m'} h'$.

Neste caso, h e m' preferiam se casar um com o outro.

O par (h, m') é um **par bloqueador**,
e emparelhamento é **estável** se não tem par bloqueador.

Casamentos estáveis: exemplo

Ordens de preferências para $n = 3$:

Casamentos estáveis: exemplo

Ordens de preferências para $n = 3$:

\succ_{h_1}	\succ_{h_2}	\succ_{h_3}	\succ_{m_1}	\succ_{m_2}	\succ_{m_3}
m_2	m_1	m_1	h_1	h_3	h_1
m_1	m_3	m_2	h_3	h_1	h_3
m_3	m_2	m_3	h_2	h_2	h_2

Casamentos estáveis: exemplo

Ordens de preferências para $n = 3$:

\succ_{h_1}	\succ_{h_2}	\succ_{h_3}	\succ_{m_1}	\succ_{m_2}	\succ_{m_3}
m_2	m_1	m_1	h_1	h_3	h_1
m_1	m_3	m_2	h_3	h_1	h_3
m_3	m_2	m_3	h_2	h_2	h_2

O emparelhamento $\{(h_1, m_1), (h_2, m_2), (h_3, m_3)\}$ é instável, pois (h_1, m_2) é um par bloqueador.

Casamentos estáveis: exemplo

Ordens de preferências para $n = 3$:

\succ_{h_1}	\succ_{h_2}	\succ_{h_3}	\succ_{m_1}	\succ_{m_2}	\succ_{m_3}
m_2	m_1	m_1	h_1	h_3	h_1
m_1	m_3	m_2	h_3	h_1	h_3
m_3	m_2	m_3	h_2	h_2	h_2

O emparelhamento $\{(h_1, m_1), (h_2, m_2), (h_3, m_3)\}$ é instável, pois (h_1, m_2) é um par bloqueador.

Já o emparelhamento $\{(h_1, m_1), (h_2, m_3), (h_3, m_2)\}$ é estável.

Casamentos estáveis: exemplo

Ordens de preferências para $n = 3$:

\succ_{h_1}	\succ_{h_2}	\succ_{h_3}	\succ_{m_1}	\succ_{m_2}	\succ_{m_3}
m_2	m_1	m_1	h_1	h_3	h_1
m_1	m_3	m_2	h_3	h_1	h_3
m_3	m_2	m_3	h_2	h_2	h_2

O emparelhamento $\{(h_1, m_1), (h_2, m_2), (h_3, m_3)\}$ é instável, pois (h_1, m_2) é um par bloqueador.

Já o emparelhamento $\{(h_1, m_1), (h_2, m_3), (h_3, m_2)\}$ é estável.

Dadas as listas de preferências de todos, existe emparelhamento estável?

Como encontrar um, se existe?

Algoritmo da aceitação postergada

Versão com proposta masculina:

Algoritmo da aceitação postergada

Versão com proposta masculina:

Cada homem propõe à primeira mulher de sua lista.

Algoritmo da aceitação postergada

Versão com proposta masculina:

Cada homem propõe à primeira mulher de sua lista.

Cada mulher que recebeu mais de uma proposta recusa todas, exceto a do homem mais alto em sua lista.

Para esse, posterga a sua resposta.

Algoritmo da aceitação postergada

Versão com proposta masculina:

Cada homem propõe à primeira mulher de sua lista.

Cada mulher que recebeu mais de uma proposta recusa todas, exceto a do homem mais alto em sua lista.

Para esse, posterga a sua resposta.

Nova rodada:

Cada homem que teve sua proposta recusada propõe à próxima mulher de sua lista.

Algoritmo da aceitação postergada

Versão com proposta masculina:

Cada homem propõe à primeira mulher de sua lista.

Cada mulher que recebeu mais de uma proposta recusa todas, exceto a do homem mais alto em sua lista.

Para esse, posterga a sua resposta.

Nova rodada:

Cada homem que teve sua proposta recusada propõe à próxima mulher de sua lista.

Cada mulher com mais de uma proposta recusa todas, exceto a do homem mais alto em sua lista.

Eventualmente recusa proposta recebida em rodada anterior.

Algoritmo com proposta masculina

Cada homem propõe à primeira mulher de sua lista.

Cada mulher que recebeu mais de uma proposta recusa todas, exceto a do homem mais alto em sua lista.

Para esse, posterga a sua resposta.

Cada homem que teve sua proposta recusada propõe à próxima mulher de sua lista.

Cada mulher com mais de uma proposta recusa todas, exceto a do homem mais alto em sua lista.

Algoritmo com proposta masculina

Cada homem propõe à primeira mulher de sua lista.

Cada mulher que recebeu mais de uma proposta recusa todas, exceto a do homem mais alto em sua lista.

Para esse, posterga a sua resposta.

Cada homem que teve sua proposta recusada propõe à próxima mulher de sua lista.

Cada mulher com mais de uma proposta recusa todas, exceto a do homem mais alto em sua lista.

Repete esse processo,
sempre progredindo nas listas dos homens.

Algoritmo com proposta masculina

Cada homem propõe à primeira mulher de sua lista.

Cada mulher que recebeu mais de uma proposta recusa todas, exceto a do homem mais alto em sua lista.

Para esse, posterga a sua resposta.

Cada homem que teve sua proposta recusada propõe à próxima mulher de sua lista.

Cada mulher com mais de uma proposta recusa todas, exceto a do homem mais alto em sua lista.

Repete esse processo,
sempre progredindo nas listas dos homens.

O processo então termina (não mais que n^2 rodadas).

Algoritmo no exemplo

\succ_{h_1}	\succ_{h_2}	\succ_{h_3}	\succ_{m_1}	\succ_{m_2}	\succ_{m_3}
m_2	m_1	m_1	h_1	h_3	h_1
m_1	m_3	m_2	h_3	h_1	h_3
m_3	m_2	m_3	h_2	h_2	h_2

Algoritmo no exemplo

\succ_{h_1}	\succ_{h_2}	\succ_{h_3}	\succ_{m_1}	\succ_{m_2}	\succ_{m_3}
m_2	m_1	m_1	h_1	h_3	h_1
m_1	m_3	m_2	h_3	h_1	h_3
m_3	m_2	m_3	h_2	h_2	h_2

h_1 propõe para m_2

h_2 propõe para m_1

h_3 propõe para m_1

Algoritmo no exemplo

\succ_{h_1}	\succ_{h_2}	\succ_{h_3}	\succ_{m_1}	\succ_{m_2}	\succ_{m_3}
m_2	m_1	m_1	h_1	h_3	h_1
m_1	m_3	m_2	h_3	h_1	h_3
m_3	m_2	m_3	h_2	h_2	h_2

h_1 propõe para m_2

h_2 propõe para m_1

h_3 propõe para m_1

m_1 rejeita a proposta de h_2 .

Algoritmo no exemplo

\succ_{h_1}	\succ_{h_2}	\succ_{h_3}	\succ_{m_1}	\succ_{m_2}	\succ_{m_3}
m_2	m_1	m_1	h_1	h_3	h_1
m_1	m_3	m_2	h_3	h_1	h_3
m_3	m_2	m_3	h_2	h_2	h_2

h_1 propõe para m_2

h_2 propõe para m_1

h_3 propõe para m_1

m_1 rejeita a proposta de h_2 .

h_2 propõe para m_3 , e o algoritmo termina.

Algoritmo no exemplo

\succ_{h_1}	\succ_{h_2}	\succ_{h_3}	\succ_{m_1}	\succ_{m_2}	\succ_{m_3}
m_2	m_1	m_1	h_1	h_3	h_1
m_1	m_3	m_2	h_3	h_1	h_3
m_3	m_2	m_3	h_2	h_2	h_2

h_1 propõe para m_2

h_2 propõe para m_1

h_3 propõe para m_1

m_1 rejeita a proposta de h_2 .

h_2 propõe para m_3 , e o algoritmo termina.

Emparelhamento produzido: $\{(h_1, m_2), (h_2, m_3), (h_3, m_1)\}$

Algoritmo no exemplo

\succ_{h_1}	\succ_{h_2}	\succ_{h_3}	\succ_{m_1}	\succ_{m_2}	\succ_{m_3}
m_2	m_1	m_1	h_1	h_3	h_1
m_1	m_3	m_2	h_3	h_1	h_3
m_3	m_2	m_3	h_2	h_2	h_2

h_1 propõe para m_2

h_2 propõe para m_1

h_3 propõe para m_1

m_1 rejeita a proposta de h_2 .

h_2 propõe para m_3 , e o algoritmo termina.

Emparelhamento produzido: $\{(h_1, m_2), (h_2, m_3), (h_3, m_1)\}$

Note que tal emparelhamento é estável!

Estabilidade do emparelhamento

Teorema: O emparelhamento produzido pelo algoritmo da aceitação postergada é estável.

Prova feita na aula.

Estabilidade do emparelhamento

Teorema: O emparelhamento produzido pelo algoritmo da aceitação postergada é estável.

Prova feita na aula.

No exemplo, aplicando a versão da proposta feminina, obtemos o emparelhamento $\{(h_1, m_1), (h_2, m_3), (h_3, m_2)\}$.

\succ_{h_1}	\succ_{h_2}	\succ_{h_3}	\succ_{m_1}	\succ_{m_2}	\succ_{m_3}
m_2	m_1	m_1	h_1	h_3	h_1
m_1	m_3	m_2	h_3	h_1	h_3
m_3	m_2	m_3	h_2	h_2	h_2

Estabilidade do emparelhamento

Teorema: O emparelhamento produzido pelo algoritmo da aceitação postergada é estável.

Prova feita na aula.

No exemplo, aplicando a versão da proposta feminina, obtemos o emparelhamento $\{(h_1, m_1), (h_2, m_3), (h_3, m_2)\}$.

\succ_{h_1}	\succ_{h_2}	\succ_{h_3}	\succ_{m_1}	\succ_{m_2}	\succ_{m_3}
m_2	m_1	m_1	h_1	h_3	h_1
m_1	m_3	m_2	h_3	h_1	h_3
m_3	m_2	m_3	h_2	h_2	h_2

Diferente do obtido pela proposta masculina!

Estabilidade do emparelhamento

Teorema: O emparelhamento produzido pelo algoritmo da aceitação postergada é estável.

Prova feita na aula.

No exemplo, aplicando a versão da proposta feminina, obtemos o emparelhamento $\{(h_1, m_1), (h_2, m_3), (h_3, m_2)\}$.

\succ_{h_1}	\succ_{h_2}	\succ_{h_3}	\succ_{m_1}	\succ_{m_2}	\succ_{m_3}
m_2	m_1	m_1	h_1	h_3	h_1
m_1	m_3	m_2	h_3	h_1	h_3
m_3	m_2	m_3	h_2	h_2	h_2

Diferente do obtido pela proposta masculina!

Há alguma diferença significativa entre estes emparelhamentos?

Emparelhamentos ótimos

Teorema: O emparelhamento produzido pelo algoritmo da aceitação postergada é estável.

Emparelhamento ν é **ótimo-masculino** se não há emparelhamento estável μ tq $\mu(h) \succ_h \nu(h)$ ou $\mu(h) = \nu(h)$ para todo h em H e $\mu(j) \succ_j \nu(j)$ para algum j em H .

Emparelhamentos ótimos

Teorema: O emparelhamento produzido pelo algoritmo da aceitação postergada é estável.

Emparelhamento ν é **ótimo-masculino** se não há emparelhamento estável μ tq $\mu(h) \succ_h \nu(h)$ ou $\mu(h) = \nu(h)$ para todo h em H e $\mu(j) \succ_j \nu(j)$ para algum j em H .

Definição de emparelhamento **ótimo-feminino** é análoga.

Emparelhamentos ótimos

Teorema: O emparelhamento produzido pelo algoritmo da aceitação postergada é estável.

Emparelhamento ν é **ótimo-masculino** se não há emparelhamento estável μ tq $\mu(h) \succ_h \nu(h)$ ou $\mu(h) = \nu(h)$ para todo h em H e $\mu(j) \succ_j \nu(j)$ para algum j em H .

Definição de emparelhamento **ótimo-feminino** é análoga.

Teorema: O algoritmo da aceitação postergada com **proposta masculina** (**feminina**) produz um escalonamento **ótimo-masculino** (**ótimo-feminino**).

Emparelhamentos ótimos

Teorema: O emparelhamento produzido pelo algoritmo da aceitação postergada é estável.

Emparelhamento ν é **ótimo-masculino** se não há emparelhamento estável μ tq $\mu(h) \succ_h \nu(h)$ ou $\mu(h) = \nu(h)$ para todo h em H e $\mu(j) \succ_j \nu(j)$ para algum j em H .

Definição de emparelhamento **ótimo-feminino** é análoga.

Teorema: O algoritmo da aceitação postergada com **proposta masculina** (**feminina**) produz um escalonamento **ótimo-masculino** (**ótimo-feminino**).

Prova feita na aula.

Emparelhamentos ótimos

Teorema: O emparelhamento produzido pelo algoritmo da aceitação postergada é estável.

Emparelhamento ν é **ótimo-masculino** se não há emparelhamento estável μ tq $\mu(h) \succ_h \nu(h)$ ou $\mu(h) = \nu(h)$ para todo h em H e $\mu(j) \succ_j \nu(j)$ para algum j em H .

Emparelhamentos ótimos

Teorema: O emparelhamento produzido pelo algoritmo da aceitação postergada é estável.

Emparelhamento ν é **ótimo-masculino** se não há emparelhamento estável μ tq $\mu(h) \succ_h \nu(h)$ ou $\mu(h) = \nu(h)$ para todo h em H e $\mu(j) \succ_j \nu(j)$ para algum j em H .

Definição de emparelhamento **ótimo-feminino** é análoga.

Emparelhamentos ótimos

Teorema: O emparelhamento produzido pelo algoritmo da aceitação postergada é estável.

Emparelhamento ν é **ótimo-masculino** se não há emparelhamento estável μ tq $\mu(h) \succ_h \nu(h)$ ou $\mu(h) = \nu(h)$ para todo h em H e $\mu(j) \succ_j \nu(j)$ para algum j em H .

Definição de emparelhamento **ótimo-feminino** é análoga.

Teorema: O algoritmo da aceitação postergada com **proposta masculina** (**feminina**) produz um escalonamento **ótimo-masculino** (**ótimo-feminino**).

Emparelhamentos ótimos

Teorema: O emparelhamento produzido pelo algoritmo da aceitação postergada é estável.

Emparelhamento ν é **ótimo-masculino** se não há emparelhamento estável μ tq $\mu(h) \succ_h \nu(h)$ ou $\mu(h) = \nu(h)$ para todo h em H e $\mu(j) \succ_j \nu(j)$ para algum j em H .

Definição de emparelhamento **ótimo-feminino** é análoga.

Teorema: O algoritmo da aceitação postergada com **proposta masculina** (**feminina**) produz um escalonamento **ótimo-masculino** (**ótimo-feminino**).

Prova feita na aula.

Dica para a prova anterior

Seja $\text{best}(h)$ a mulher mais bem posicionada na lista de h tq existe emparelhamento estável com h casado com $\text{best}(h)$.

Dica para a prova anterior

Seja $\text{best}(h)$ a mulher mais bem posicionada na lista de h tq existe emparelhamento estável com h casado com $\text{best}(h)$.

Considere $S = \{(h, \text{best}(h)) : h \in H\}$.

Qualquer que seja a ordem em que os homens proponham no algoritmo da proposta masculina, o emparelhamento produzido é exatamente S .

Dica para a prova anterior

Seja $\text{best}(h)$ a mulher mais bem posicionada na lista de h tq existe emparelhamento estável com h casado com $\text{best}(h)$.

Considere $S = \{(h, \text{best}(h)) : h \in H\}$.

Qualquer que seja a ordem em que os homens proponham no algoritmo da proposta masculina, o emparelhamento produzido é exatamente S .

Em particular, S é um emparelhamento!

Dica para a prova anterior

Seja $\text{best}(h)$ a mulher mais bem posicionada na lista de h tq existe emparelhamento estável com h casado com $\text{best}(h)$.

Considere $S = \{(h, \text{best}(h)) : h \in H\}$.

Qualquer que seja a ordem em que os homens proponham no algoritmo da proposta masculina, o emparelhamento produzido é exatamente S .

Em particular, S é um emparelhamento!

Se provarmos o acima, provamos o teorema anterior.

Dica para a prova anterior

Seja $\text{best}(h)$ a mulher mais bem posicionada na lista de h tq existe emparelhamento estável com h casado com $\text{best}(h)$.

Considere $S = \{(h, \text{best}(h)) : h \in H\}$.

Qualquer que seja a ordem em que os homens proponham no algoritmo da proposta masculina, o emparelhamento produzido é exatamente S .

Em particular, S é um emparelhamento!

Se provarmos o acima, provamos o teorema anterior.

Exercício: Defina $\text{worst}(m)$ analogamente e mostre que, no algoritmo da proposta masculina, cada mulher m fica casada com $\text{worst}(m)$.

Prova de estratégia

Emparelhamento ν é **ótimo-masculino** se não há emparelhamento estável μ tq $\mu(h) \succ_h \nu(h)$ ou $\mu(h) = \nu(h)$ para todo h em H e $\mu(j) \succ_j \nu(j)$ para algum j em H .

Definição de emparelhamento **ótimo-feminino** é análoga.

Teorema: O algoritmo da aceitação postergada com proposta masculina (feminina) produz um escalonamento ótimo-masculino (ótimo-feminino).

Prova de estratégia

Emparelhamento ν é **ótimo-masculino** se não há emparelhamento estável μ tq $\mu(h) \succ_h \nu(h)$ ou $\mu(h) = \nu(h)$ para todo h em H e $\mu(j) \succ_j \nu(j)$ para algum j em H .

Definição de emparelhamento **ótimo-feminino** é análoga.

Teorema: O algoritmo da aceitação postergada com proposta masculina (feminina) produz um escalonamento ótimo-masculino (ótimo-feminino).

Teorema: O algoritmo da aceitação postergada com proposta masculina (**feminina**) é um mecanismo à prova de estratégia para os **homens** (**mulheres**).

Prova de estratégia

Emparelhamento ν é **ótimo-masculino** se não há emparelhamento estável μ tq $\mu(h) \succ_h \nu(h)$ ou $\mu(h) = \nu(h)$ para todo h em H e $\mu(j) \succ_j \nu(j)$ para algum j em H .

Definição de emparelhamento **ótimo-feminino** é análoga.

Teorema: O algoritmo da aceitação postergada com proposta masculina (feminina) produz um escalonamento ótimo-masculino (ótimo-feminino).

Teorema: O algoritmo da aceitação postergada com proposta masculina (feminina) é um mecanismo à prova de estratégia para os homens (mulheres).

Óbvio do que foi provado no slide anterior.