Análise de Algoritmos

Parte destes slides são adaptações de slides

do Prof. Paulo Feofiloff e do Prof. José Coelho de Pina.

Clustering

U: conjunto de n itens $\{p_1, \ldots, p_n\}$.

$d(p_i, p_j)$: distância entre p_i e p_j.

- $d(p_i, p_i) = 0$ para $i = 1, \ldots, n$
- $d(p_i, p_j) = d(p_j, p_i) > 0$ para $i \neq j$

Clustering

U: conjunto de n itens $\{p_1, \ldots, p_n\}$.

$d(p_i, p_j)$: distância entre p_i e p_j.

- $d(p_i, p_i) = 0$ para $i = 1, \ldots, n$
- $d(p_i, p_j) = d(p_j, p_i) > 0$ para $i \neq j$

k: número de grupos.

k-clustering: partição de U em k partes.

Clustering

U: conjunto de n itens $\{p_1, \ldots, p_n\}$.

$d(p_i, p_j)$: distância entre p_i e p_j.

- $d(p_i, p_i) = 0$ para $i = 1, \ldots, n$
- $d(p_i, p_j) = d(p_j, p_i) > 0$ para $i \neq j$

k: número de grupos.

k-clustering: partição de U em k partes.

espaçamento de k-clustering: distância mínima entre dois elementos de partes distintas do clustering.

Clustering

U: conjunto de n itens $\{p_1, \ldots, p_n\}$.

$d(p_i, p_j)$: distância entre p_i e p_j.

- $d(p_i, p_i) = 0$ para $i = 1, \ldots, n$
- $d(p_i, p_j) = d(p_j, p_i) > 0$ para $i \neq j$

k: número de grupos.

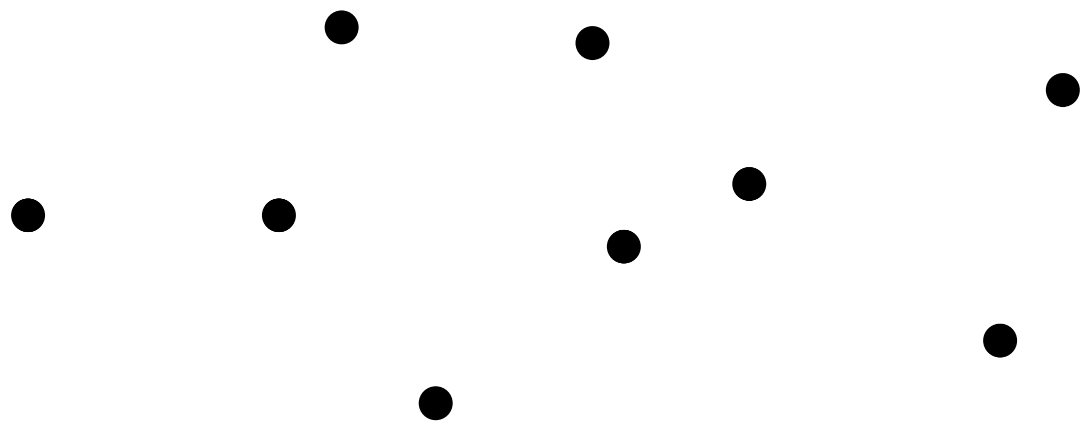
k-clustering: partição de U em k partes.

espaçamento de k-clustering: distância mínima entre dois elementos de partes distintas do clustering.

Problema: Dados U, d e k,
encontrar um k-clustering com espaçamento máximo.

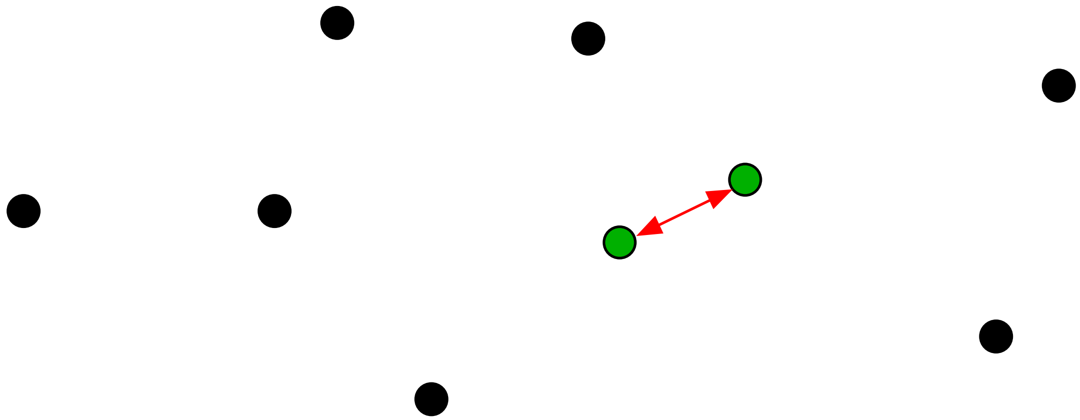
Clustering

Problema: Dados U, d e k,
encontrar um k-clustering com espaçamento máximo.



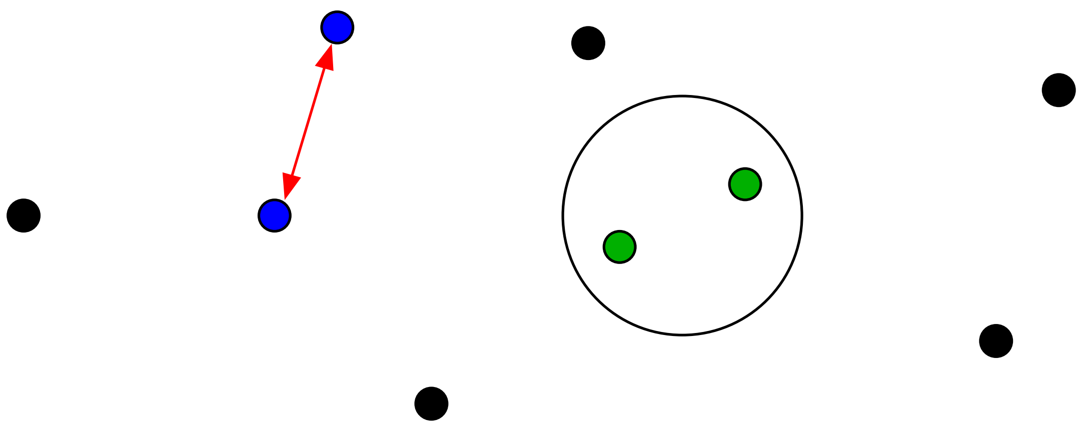
Clustering

Problema: Dados U, d e k,
encontrar um k-clustering com espaçamento máximo.



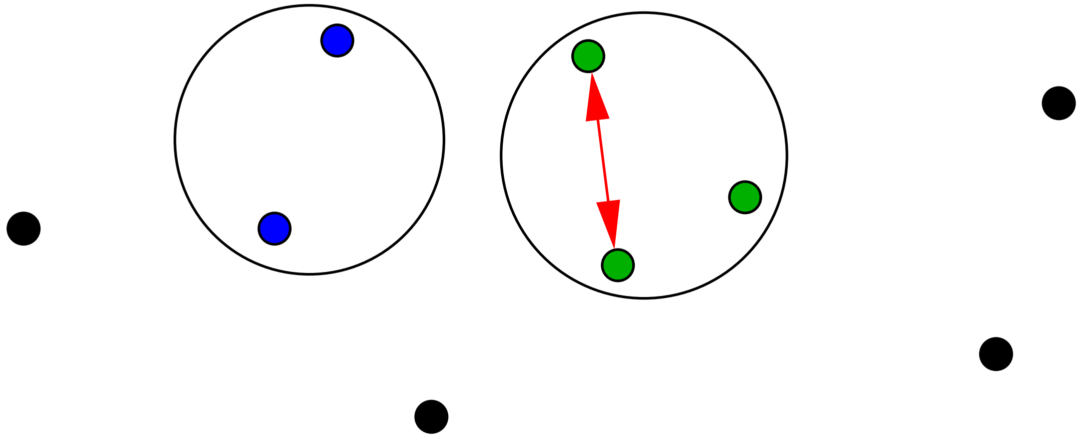
Clustering

Problema: Dados U, d e k,
encontrar um k-clustering com espaçamento máximo.



Clustering

Problema: Dados U, d e k,
encontrar um k-clustering com espaçamento máximo.



Algoritmo inspirado no Kruskal

Lembram do algoritmo de Kruskal?

Problema: Dado um grafo $G = (V, E)$ conexo, e um custo $c_e > 0$ para cada aresta e em E.

Árvore geradora mínima

Algoritmo inspirado no Kruskal

Lembram do algoritmo de Kruskal?

Problema: Dado um grafo $G = (V, E)$ conexo,
e um custo $c_e > 0$ para cada aresta e em E.

Árvore geradora mínima

MST-KRUSKAL (V, E, c)

```
e_1, ..., e_m ← ORDENE(E, c)      ▷ pelo valor de c_e
T ← ∅        i ← 0
enquanto G' = (V, T) não é conexo faça
      i ← i + 1
      se T ∪ e_i não tem circuito
            então T ← T ∪ e_i
devolva T
```

Algoritmo inspirado no Kruskal

Como adaptar MST-KRUSKAL para resolver o k-clustering?

Algoritmo inspirado no Kruskal

Como adaptar MST-KRUSKAL para resolver o k-clustering?

Acrescentamos arestas até termos k componentes.

Algoritmo inspirado no Kruskal

Como adaptar MST-KRUSKAL para resolver o k-clustering?

Acrescentamos arestas até termos k componentes.

CLUSTERING-KRUSKAL (V, E, c, k)

$e_1, \ldots, e_m \leftarrow$ ORDENE(E, c) $\quad \triangleright$ pelo valor de c_e
$F \leftarrow \emptyset \qquad i \leftarrow 0$
enquanto $G' = (V, F)$ tem $> k$ componentes **faça**
    $i \leftarrow i + 1$
    se $F \cup e_i$ não tem circuito
        então $F \leftarrow F \cup e_i$
devolva F

Algoritmo inspirado no Kruskal

Como adaptar MST-KRUSKAL para resolver o k-clustering?

Acrescentamos arestas até termos k componentes.

CLUSTERING-KRUSKAL (V, E, c, k)
1 $e_1, \ldots, e_m \leftarrow$ ORDENE(E, c) $\triangleright$ pelo valor de c_e
2 $F \leftarrow \emptyset$ $i \leftarrow 0$
3 **enquanto** $G' = (V, F)$ tem $> k$ componentes **faça**
4   $i \leftarrow i + 1$
5   **se** $F \cup e_i$ não tem circuito
6   **então** $F \leftarrow F \cup e_i$
7 **devolva** F

Este algoritmo resolve o problema?

Análise da correção

CLUSTERING-KRUSKAL (V, E, c, k)

```
e_1, ..., e_m ← ORDENE(E, c)      ▷ pelo valor de c_e
F ← ∅        i ← 0
enquanto G' = (V, F) tem ≥ k componentes faça
      i ← i + 1
      se F ∪ e_i não tem circuito
            então F ← F ∪ e_i
devolva as componentes de F
```

Qual é o espaçamento do clustering devolvido?

Análise da correção

CLUSTERING-KRUSKAL (V, E, c, k)

```
e_1, ..., e_m ← ORDENE(E, c)      ▷ pelo valor de c_e
F ← ∅        i ← 0
enquanto G' = (V, F) tem ≥ k componentes faça
      i ← i + 1
      se F ∪ e_i não tem circuito
            então F ← F ∪ e_i
devolva as componentes de F
```

Qual é o espaçamento do clustering devolvido?

É o custo da próxima aresta que seria incluída em F.

Análise da correção

CLUSTERING-KRUSKAL (V, E, c, k)

```
e_1, ..., e_m ← ORDENE(E, c)      ▷ pelo valor de c_e
F ← ∅        i ← 0
enquanto G' = (V, F) tem ≥ k componentes faça
    i ← i + 1
    se F ∪ e_i não tem circuito
        então F ← F ∪ e_i
devolva as componentes de F
```

Qual é o espaçamento do clustering devolvido?

É o custo da próxima aresta que seria incluída em F.

A próxima aresta que não forma circuito com F.

Análise da correção

Seja e a próxima aresta que seria incluída em F.

Análise da correção

Seja e a próxima aresta que seria incluída em F.

Seja $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_k\}$ o k-clustering devolvido,
e $\mathcal{C}^* = \{C_1^*, \ldots, C_k^*\}$ um k-clustering ótimo.

Análise da correção

Seja e a próxima aresta que seria incluída em F.

Seja $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_k\}$ o k-clustering devolvido,
e $\mathcal{C}^* = \{C_1^*, \ldots, C_k^*\}$ um k-clustering ótimo.

O espaçamento de $\mathcal{C}$ é c_e.

Basta mostrar que o espaçamento de $\mathcal{C}^*$ é no máximo c_e.

Análise da correção

Seja e a próxima aresta que seria incluída em F.

Seja $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_k\}$ o k-clustering devolvido,
e $\mathcal{C}^* = \{C_1^*, \ldots, C_k^*\}$ um k-clustering ótimo.

O espaçamento de $\mathcal{C}$ é c_e.

Basta mostrar que o espaçamento de $\mathcal{C}^*$ é no máximo c_e.

Algum C_i não está contido em nenhum C_j^*.

Análise da correção

Seja e a próxima aresta que seria incluída em F.

Seja $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_k\}$ o k-clustering devolvido,
e $\mathcal{C}^* = \{C_1^*, \ldots, C_k^*\}$ um k-clustering ótimo.

O espaçamento de $\mathcal{C}$ é c_e.

Basta mostrar que o espaçamento de $\mathcal{C}^*$ é no máximo c_e.

Algum C_i não está contido em nenhum C_j^*.

Seja j tal que $C_i \cap C_j^* \neq \emptyset$.

Análise da correção

Seja e a próxima aresta que seria incluída em F.

Seja $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_k\}$ o k-clustering devolvido,
e $\mathcal{C}^* = \{C_1^*, \ldots, C_k^*\}$ um k-clustering ótimo.

O espaçamento de $\mathcal{C}$ é c_e.

Basta mostrar que o espaçamento de $\mathcal{C}^*$ é no máximo c_e.

Algum C_i não está contido em nenhum C_j^*.

Seja j tal que $C_i \cap C_j^* \neq \emptyset$.

Seja f aresta de F em C_i com um único extremo em C_j^*.

Análise da correção

Seja e a próxima aresta que seria incluída em F.

Seja $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_k\}$ o k-clustering devolvido,
e $\mathcal{C}^* = \{C_1^*, \ldots, C_k^*\}$ um k-clustering ótimo.

O espaçamento de $\mathcal{C}$ é c_e.

Basta mostrar que o espaçamento de $\mathcal{C}^*$ é no máximo c_e.

Algum C_i não está contido em nenhum C_j^*.

Seja j tal que $C_i \cap C_j^* \neq \emptyset$.

Seja f aresta de F em C_i com um único extremo em C_j^*.

Claro que $c_f \leq c_e$ e espaçamento de $\mathcal{C}^*$ é no máximo c_f.

Implementação

Como se implementa este algoritmo?

Implementação

Como se implementa este algoritmo?

Como se implementa o algoritmo de Kruskal?

Implementação

Como se implementa este algoritmo?

Como se implementa o algoritmo de Kruskal?

Estrutura de dados para conjuntos disjuntos...

Implementação

Como se implementa este algoritmo?

Como se implementa o algoritmo de Kruskal?

Estrutura de dados para conjuntos disjuntos...

MAKESET(x)
1. $pai[x] \leftarrow x$
2. $rank[x] \leftarrow 0$

FINDSET(x)
1. **se** $x \neq pai[x]$
2. **então** $pai[x] \leftarrow$ FINDSET$(pai[x])$
3. **devolva** $pai[x]$

Union-Find

MAKESET(x)

1. $pai[x] \leftarrow x$
2. $rank[x] \leftarrow 0$

FINDSET(x)

1. **se** $x \neq pai[x]$
2. **então** $pai[x] \leftarrow$FINDSET$(pai[x])$
3. **devolva** $pai[x]$

UNION(x, y)

1. $x' \leftarrow$FINDSET(x)
2. $y' \leftarrow$FINDSET(y)
3. **se** $x' \neq y'$
4. **então** LINK(x', y')

LINK(x, y)

1. **se** $rank[x] > rank[y]$
2. **então** $pai[y] \leftarrow x$
3. **senão** $pai[x] \leftarrow y$
4. **se** $rank[x] = rank[y]$
5. **então** $rank[y] \leftarrow rank[y] + 1$

Union-Find

MAKESET(x)

1. $pai[x] \leftarrow x$
2. $rank[x] \leftarrow 0$

FINDSET(x)

1. **se** $x \neq pai[x]$
2. **então** $pai[x] \leftarrow$FINDSET$(pai[x])$
3. **devolva** $pai[x]$

UNION(x, y)

1. $x' \leftarrow$FINDSET(x)
2. $y' \leftarrow$FINDSET(y)
3. **se** $x' \neq y'$
4. **então** LINK(x', y')

LINK(x, y)

1. **se** $rank[x] > rank[y]$
2. **então** $pai[y] \leftarrow x$
3. **senão** $pai[x] \leftarrow y$
4. **se** $rank[x] = rank[y]$
5. **então** $rank[y] \leftarrow rank[y] + 1$

Semana que vem: análise desta estrutura de dados.