Análise de Algoritmos

Parte destes slides são adaptações de slides

do Prof. Paulo Feofiloff e do Prof. José Coelho de Pina.

Introdução

CLRS 2.2 e 3.1

AU 3.3, 3.4 e 3.6

Exemplo: número de inversões

Problema: Dada uma permutação $p[1\,..\,n]$, determinar o número de inversões em p.

Uma inversão é um par (i, j) de índices de p tal que $i < j$ e $p[i] > p[j]$.

Entrada:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p	2	4	1	9	5	3	8	6	7

Exemplo: número de inversões

Problema: Dada uma permutação $p[1\,..\,n]$, determinar o número de inversões em p.

Uma inversão é um par (i, j) de índices de p tal que $i < j$ e $p[i] > p[j]$.

Entrada:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p	2	4	1	9	5	3	8	6	7

Saída: 11

Inversões: $(1,3)$, $(2,3)$, $(4,5)$, $(2,6)$, $(4,6)$,
$(5,6)$, $(4,7)$, $(4,8)$, $(7,8)$, $(4,9)$ e $(7,9)$.

Número de inversões

```
CONTA-INVERSÕES $(p, n)$
    $c \leftarrow 0$
    para $i \leftarrow 1$ até $n - 1$ faça
        para $j \leftarrow i + 1$ até $n$ faça
            se $p[i] > p[j]$
                então $c \leftarrow c + 1$
    devolva $c$
```

Número de inversões

```
CONTA-INVERSÕES $(p, n)$
    $c \leftarrow 0$
    para $i \leftarrow 1$ até $n - 1$ faça
        para $j \leftarrow i + 1$ até $n$ faça
            se $p[i] > p[j]$
                então $c \leftarrow c + 1$
    devolva $c$
```

Se a execução de cada linha de código consome 1 unidade de tempo, o consumo total é $\ldots$

Consumo de tempo

Se a execução de cada linha de código consome 1 unidade de tempo, o consumo total é:

linha	todas as execuções da linha
1	$= 1$
2	$= n$
3	$= \sum_{i=2}^{n} i \; = \; (n+2)(n-1)/2$
4	$= \sum_{i=1}^{n-1} i \; = \; n(n-1)/2$
5	$\leq \sum_{i=1}^{n-1} i \; = \; n(n-1)/2$
6	$= 1$
total	$\leq (3/2)n^2 + n/2 + 1$

Consumo de tempo

Se a execução de cada linha de código consome 1 unidade de tempo, o consumo total é:

linha		todas as execuções da linha
1	$=$	1
2	$=$	n
3	$=$	$\sum_{i=2}^{n} i \ = \ (n+2)(n-1)/2$
4	$=$	$\sum_{i=1}^{n-1} i \ = \ n(n-1)/2$
5	$\leq$	$\sum_{i=1}^{n-1} i \ = \ n(n-1)/2$
6	$=$	1
total	$\leq$	$(3/2)n^2 + n/2 + 1$

O algoritmo CONTA-INVERSÕES consome
não mais que $(3/2)n^2 + n/2 + 1$ unidades de tempo.

Consumo de tempo

Se a execução de cada linha de código consome um tempo diferente, o consumo total é:

linha	todas as execuções da linha		
1	$=$	1	$\times t_1$
2	$=$	n	$\times t_2$
3	$=$	$(n+2)(n-1)/2$	$\times t_3$
4	$=$	$n(n-1)/2$	$\times t_4$
5	$\leq$	$n(n-1)/2$	$\times t_5$
6	$=$	1	$\times t_6$
total	$\leq$	?	

Consumo de tempo

Se a execução de cada linha de código consome um tempo diferente, o consumo total é:

linha	todas as execuções da linha		
1	$=$	1	$\times t_1$
2	$=$	n	$\times t_2$
3	$=$	$(n+2)(n-1)/2$	$\times t_3$
4	$=$	$n(n-1)/2$	$\times t_4$
5	$\leq$	$n(n-1)/2$	$\times t_5$
6	$=$	1	$\times t_6$

$$\begin{aligned} \text{total} \quad &\leq \left(\tfrac{t_3+t_4+t_5}{2}\right)n^2 + \left(t_2 + \tfrac{t_3-t_4-t_5}{2}\right)n + (t_1 - t_3 + t_6) \\ &= c_2 n^2 + c_1 n + c_0, \end{aligned}$$

onde c_2, c_1 e c_0 são constantes que dependem da máquina.

Consumo de tempo

Se a execução de cada linha de código consome um tempo diferente, o consumo total é:

linha	todas as execuções da linha		
1	$=$	1	$\times t_1$
2	$=$	n	$\times t_2$
3	$=$	$(n+2)(n-1)/2$	$\times t_3$
4	$=$	$n(n-1)/2$	$\times t_4$
5	$\leq$	$n(n-1)/2$	$\times t_5$
6	$=$	1	$\times t_6$

total

$$\begin{aligned} &\leq \left(\tfrac{t_3+t_4+t_5}{2}\right)n^2 + \left(t_2 + \tfrac{t_3-t_4-t_5}{2}\right)n + (t_1 - t_3 + t_6) \\ &= c_2 n^2 + c_1 n + c_0, \end{aligned}$$

onde c_2, c_1 e c_0 são constantes que dependem da máquina.

n^2 é para sempre! Está nas entranhas do algoritmo!

Notação O

Intuitivamente...

$\mathrm{O}(f(n)) \quad \approx \quad$ funções que não crescem mais rápido que $f(n)$

$\approx \quad$ funções menores ou iguais a um múltiplo de $f(n)$

$n^2 \qquad (3/2)n^2 \qquad 9999n^2 \qquad n^2/1000$ etc.

crescem todas com a mesma velocidade

Notação O

Intuitivamente...

$\mathrm{O}(f(n))$ $\approx$ funções que não crescem mais rápido que $f(n)$

$\approx$ funções menores ou iguais a um múltiplo de $f(n)$

n^2 $(3/2)n^2$ $9999n^2$ $n^2/1000$ etc.

crescem todas com a mesma velocidade

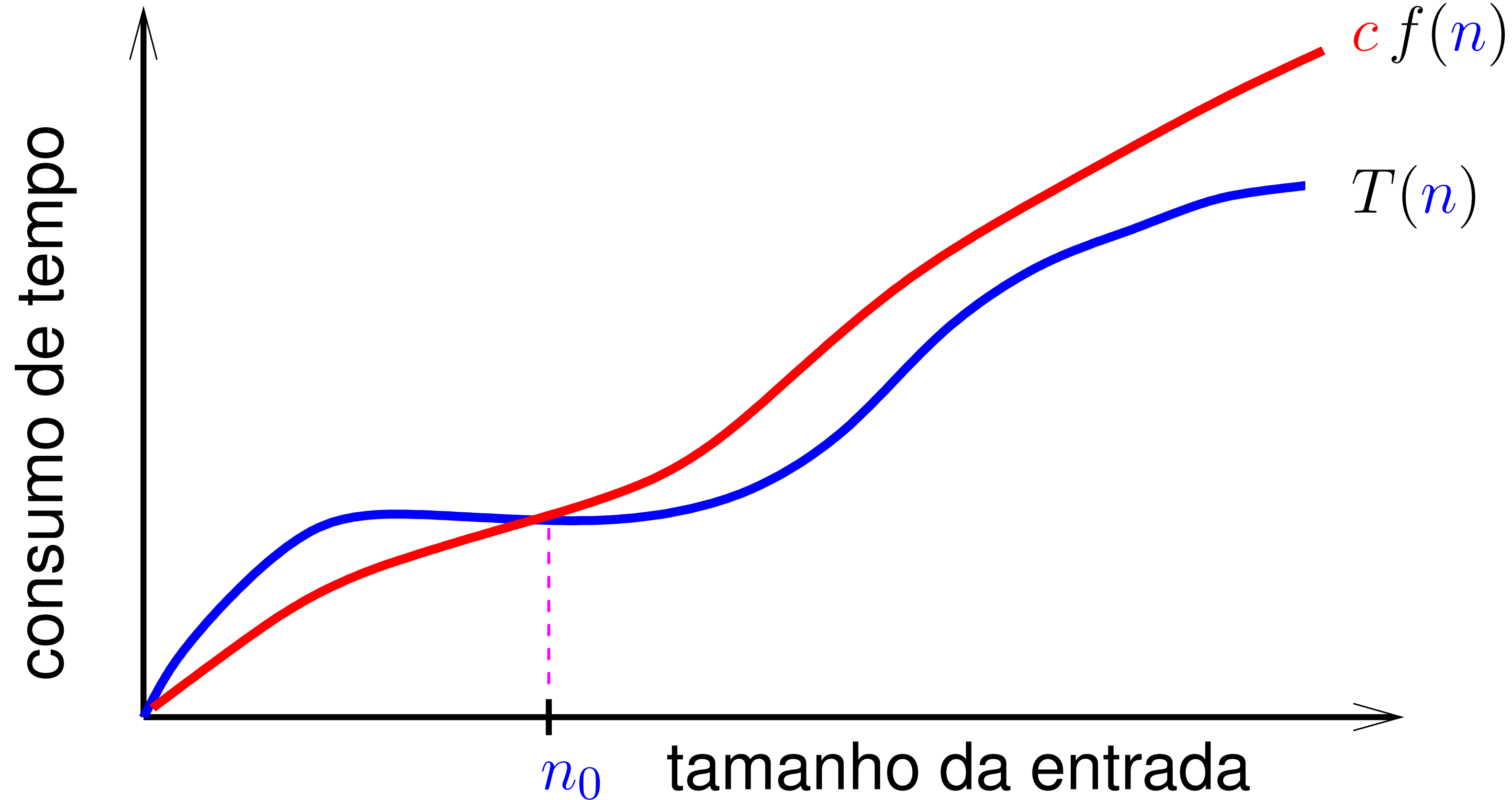
- $n^2 + 99n$ é $\mathrm{O}(n^2)$
- $33n^2$ é $\mathrm{O}(n^2)$
- $9n + 2$ é $\mathrm{O}(n^2)$
- $0{,}00001n^3 - 200n^2$ não é $\mathrm{O}(n^2)$

Definição

Sejam $T(n)$ e $f(n)$ funções dos inteiros nos reais. Dizemos que $T(n)$ é $\mathrm{O}(f(n))$ se existem constantes positivas c e n_0 tais que

$$0 \le T(n) \le c\,f(n)$$

para todo $n \geq n_0$.

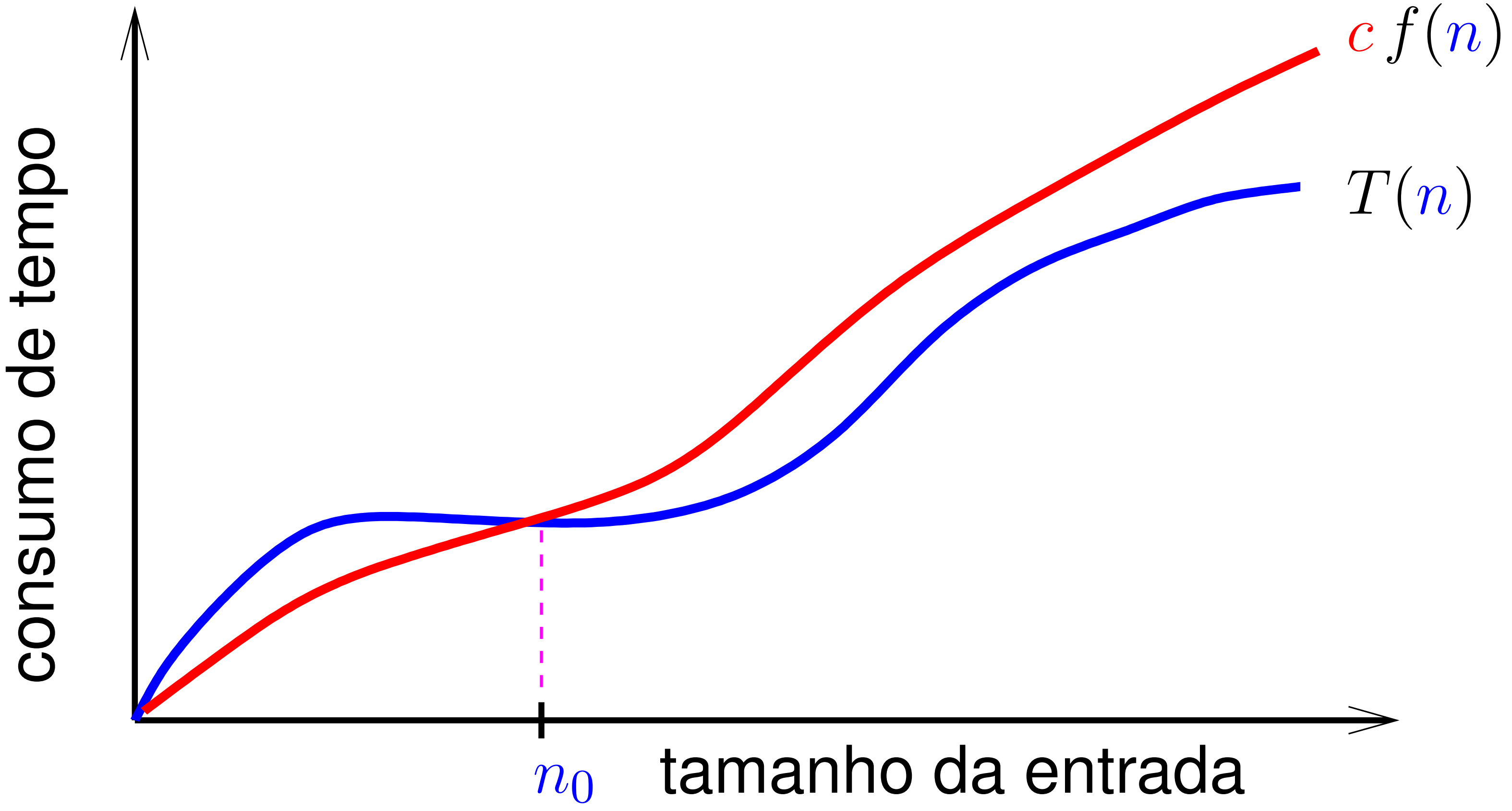


Mais informal

$T(n)$ é $\mathrm{O}(f(n))$ se existe $c > 0$ tal que

$$T(n) \leq c\,f(n)$$

para todo n suficientemente GRANDE.



Exemplos

$T(n)$ é $\mathrm{O}(f(n))$ lê-se "$T(n)$ é O de $f(n)$" ou
"$T(n)$ é da ordem de $f(n)$"

Exemplos

$T(n)$ é $\mathrm{O}(f(n))$ lê-se "$T(n)$ é O de $f(n)$" ou
"$T(n)$ é da ordem de $f(n)$"

Exemplo 1

$10n^2$ é $\mathrm{O}(n^3)$.

Exemplos

$T(n)$ é $\mathrm{O}(f(n))$ lê-se "$T(n)$ é O de $f(n)$" ou
"$T(n)$ é da ordem de $f(n)$"

Exemplo 1

$10n^2$ é $\mathrm{O}(n^3)$.

Prova: Para $n \geq 1$, temos que $0 \leq 10n^2 \leq 10\,n^3$.

Exemplos

$T(n)$ é $\mathrm{O}(f(n))$ lê-se "$T(n)$ é O de $f(n)$" ou
"$T(n)$ é da ordem de $f(n)$"

Exemplo 1

$10n^2$ é $\mathrm{O}(n^3)$.

Prova: Para $n \geq 1$, temos que $0 \leq 10n^2 \leq 10\, n^3$.

Outra prova: Para $n \geq 10$, temos $0 \leq 10n^2 \leq n \times n^2 = 1\, n^3$.

Exemplos

$T(n)$ é $\mathrm{O}(f(n))$ lê-se "$T(n)$ é O de $f(n)$" ou
"$T(n)$ é da ordem de $f(n)$"

Exemplo 1

$10n^2$ é $\mathrm{O}(n^3)$.

Prova: Para $n \geq 1$, temos que $0 \leq 10n^2 \leq 10\, n^3$.

Outra prova: Para $n \geq 10$, temos $0 \leq 10n^2 \leq n \times n^2 = 1\, n^3$.

Exemplo 2

$\lg n$ é $\mathrm{O}(n)$.

Exemplos

$T(n)$ é $\mathrm{O}(f(n))$ lê-se "$T(n)$ é O de $f(n)$" ou
"$T(n)$ é da ordem de $f(n)$"

Exemplo 1

$10n^2$ é $\mathrm{O}(n^3)$.

Prova: Para $n \geq 1$, temos que $0 \leq 10n^2 \leq 10\,n^3$.

Outra prova: Para $n \geq 10$, temos $0 \leq 10n^2 \leq n \times n^2 = 1\,n^3$.

Exemplo 2

$\lg n$ é $\mathrm{O}(n)$.

Prova: Para $n \geq 1$, tem-se que $\lg n \leq 1\,n$.

Mais exemplos

Exemplo 3

$20n^3 + 10n \log n + 5$ é $\mathrm{O}(n^3)$.

Mais exemplos

Exemplo 3

$20n^3 + 10n \log n + 5$ é $\mathrm{O}(n^3)$.

Prova: Para $n \geq 1$, tem-se que

$$20n^3 + 10n \lg n + 5 \leq 20n^3 + 10n^3 + 5n^3 = 35\, n^3.$$

Mais exemplos

Exemplo 3

$20n^3 + 10n \log n + 5$ é $\mathrm{O}(n^3)$.

Prova: Para $n \geq 1$, tem-se que

$$20n^3 + 10n \lg n + 5 \leq 20n^3 + 10n^3 + 5n^3 = 35\, n^3.$$

Outra prova: Para $n \geq 10$, tem-se que

$$20n^3 + 10n \lg n + 5 \leq 20n^3 + n\, n \lg n + n \leq 20n^3 + n^3 + n^3 = 22\, n^3.$$

Uso da notação O

$\mathrm{O}(f(n)) = \{T(n)$: existem c e n_0 tq $T(n) \leq cf(n), n \geq n_0\}$

"$T(n)$ é $\mathrm{O}(f(n))$" deve ser entendido como "$T(n) \in \mathrm{O}(f(n))$".

"$T(n) = \mathrm{O}(f(n))$" deve ser entendido como "$T(n) \in \mathrm{O}(f(n))$".

"$T(n) \leq \mathrm{O}(f(n))$" é feio.

"$T(n) \geq \mathrm{O}(f(n))$" não faz sentido!

"$T(n)$ é $g(n) + \mathrm{O}(f(n))$" significa que existem constantes positivas c e n_0 tais que

$$T(n) \leq g(n) + c\, f(n)$$

para todo $n \geq n_0$.

Nomes de classes O

classe	nome
$\mathrm{O}(1)$	constante
$\mathrm{O}(\lg n)$	logarítmica
$\mathrm{O}(n)$	linear
$\mathrm{O}(n \lg n)$	$n \log n$
$\mathrm{O}(n^2)$	quadrática
$\mathrm{O}(n^3)$	cúbica
$\mathrm{O}(n^k)$ com $k \geq 1$	polinomial
$\mathrm{O}(2^n)$	exponencial
$\mathrm{O}(a^n)$ com $a > 1$	exponencial

Número de inversões

```
CONTA-INVERSÕES $(p, n)$
    $c \leftarrow 0$
    para $i \leftarrow 1$ até $n - 1$ faça
        para $j \leftarrow i + 1$ até $n$ faça
            se $p[i] > p[j]$
                então $c \leftarrow c + 1$
    devolva $c$
```

Número de inversões

CONTA-INVERSÕES (p, n)

```
1  $c \leftarrow 0$
2  para $i \leftarrow 1$ até $n - 1$ faça
3      para $j \leftarrow i + 1$ até $n$ faça
4          se $p[i] > p[j]$
5              então $c \leftarrow c + 1$
6  devolva $c$
```

linha	consumo de todas as execuções da linha
1	?
2	?
3	?
4	?
5	?
6	?
total	?

Número de inversões

```
CONTA-INVERSÕES $(p, n)$
$c \leftarrow 0$
para $i \leftarrow 1$ até $n-1$ faça
    para $j \leftarrow i+1$ até $n$ faça
        se $p[i] > p[j]$
            então $c \leftarrow c+1$
devolva $c$
```

linha	consumo de todas as execuções da linha
1	$\mathrm{O}(1)$
2	$\mathrm{O}(n)$
3	$\mathrm{O}(n^2)$
4	$\mathrm{O}(n^2)$
5	$\mathrm{O}(n^2)$
6	$\mathrm{O}(1)$
total	$\mathrm{O}(3n^2+n+2) = \mathrm{O}(n^2)$

Conclusão

O algoritmo CONTA-INVERSÕES consome $O(n^2)$ unidades de tempo.

Também escreve-se

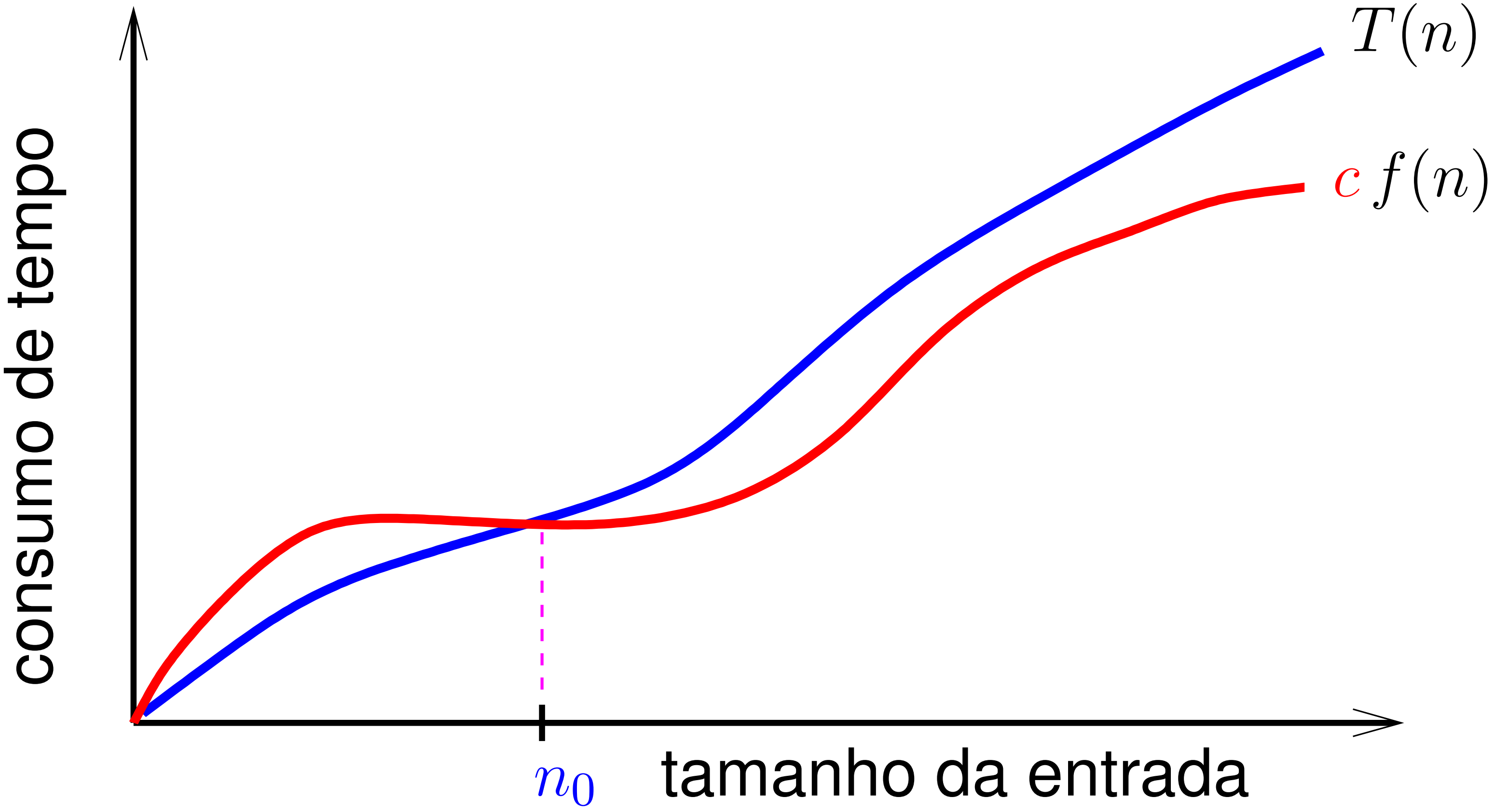
O algoritmo CONTA-INVERSÕES consome tempo $O(n^2)$.

Notação Omega

Dizemos que $T(n)$ é $\Omega(f(n))$ se existem constantes positivas c e n_0 tais que

$$c\,f(n) \;\leq\; T(n)$$

para todo $n \geq n_0$.

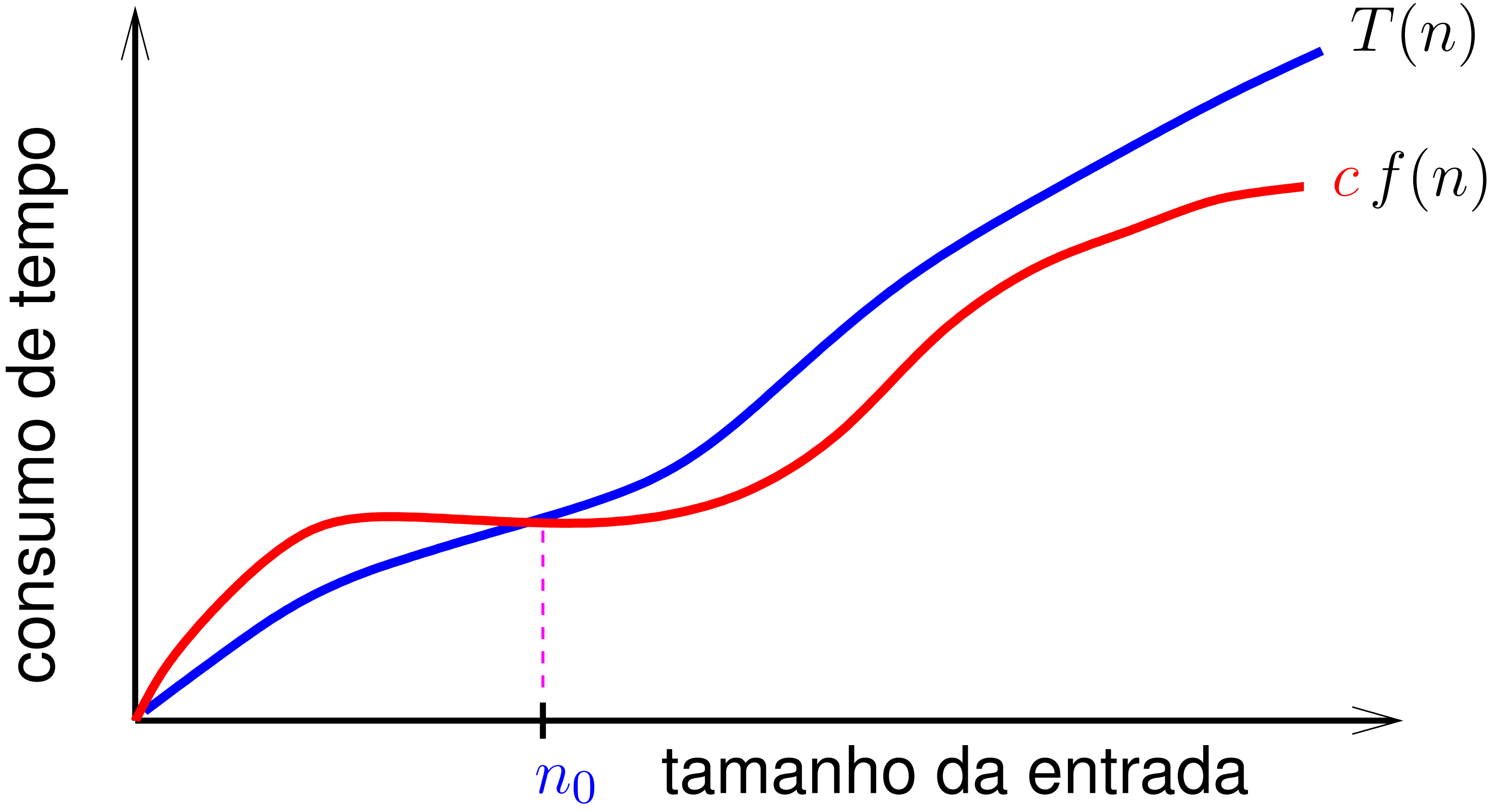


Mais informal

$T(n) = \Omega(f(n))$ se existe $c > 0$ tal que

$$c\,f(n) \leq T(n)$$

para todo n suficientemente GRANDE.



Exemplos

Exemplo 1

Se $T(n) \geq 0.001n^2$ para todo $n \geq 8$, então $T(n)$ é $\Omega(n^2)$.

Exemplos

Exemplo 1

Se $T(n) \geq 0.001n^2$ para todo $n \geq 8$, então $T(n)$ é $\Omega(n^2)$.

Prova: Aplique a definição com $c = 0.001$ e $n_0 = 8$.

Exemplo 2

O consumo de tempo do CONTA-INVERSÕES é $\mathrm{O}(n^2)$ e também $\Omega(n^2)$.

Exemplo 2

O consumo de tempo do CONTA-INVERSÕES é $\mathrm{O}(n^2)$ e também $\Omega(n^2)$.

```
CONTA-INVERSÕES $(p, n)$
    $c \leftarrow 0$
    **para** $i \leftarrow 1$ **até** $n - 1$ **faça**
        **para** $j \leftarrow i + 1$ **até** $n$ **faça**
            **se** $p[i] > p[j]$
                **então** $c \leftarrow c + 1$
    **devolva** $c$
```

Exemplo 2

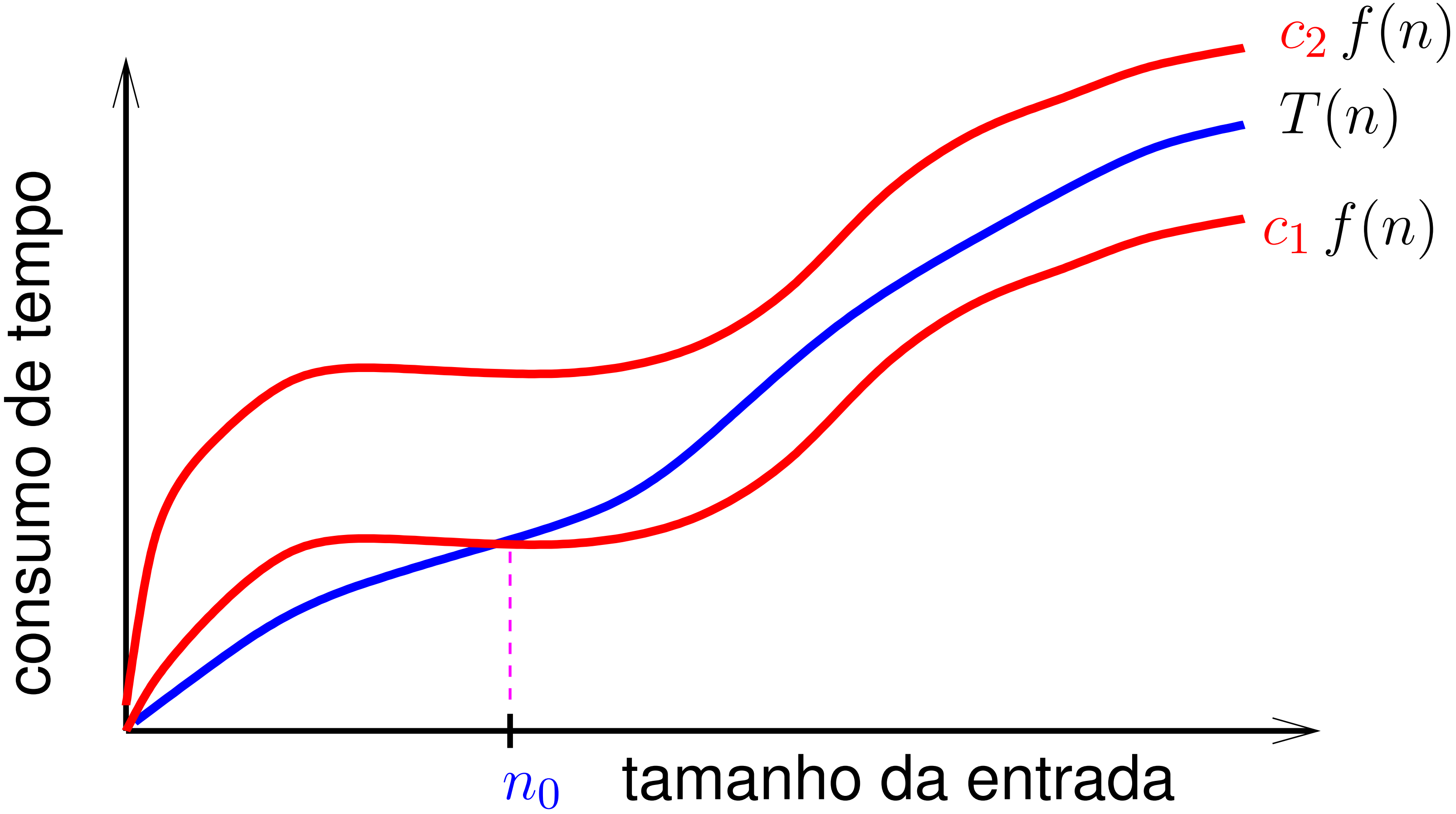
O consumo de tempo do CONTA-INVERSÕES é $\mathrm{O}(n^2)$ e também $\Omega(n^2)$.

linha	todas as execuções da linha	
1	$=$	1
2	$=$	n
3	$=$	$(n+2)(n-1)/2$
4	$=$	$n(n-1)/2$
5	$\geq$	0
6	$=$	1
total	$\geq$	$n^2 + n \; = \; \Omega(n^2)$

Notação Theta

Sejam $T(n)$ e $f(n)$ funções dos inteiros no reais. Dizemos que $T(n)$ é $\Theta(f(n))$ se

$T(n)$ é $\mathrm{O}(f(n))$ e $T(n)$ é $\Omega(f(n))$.

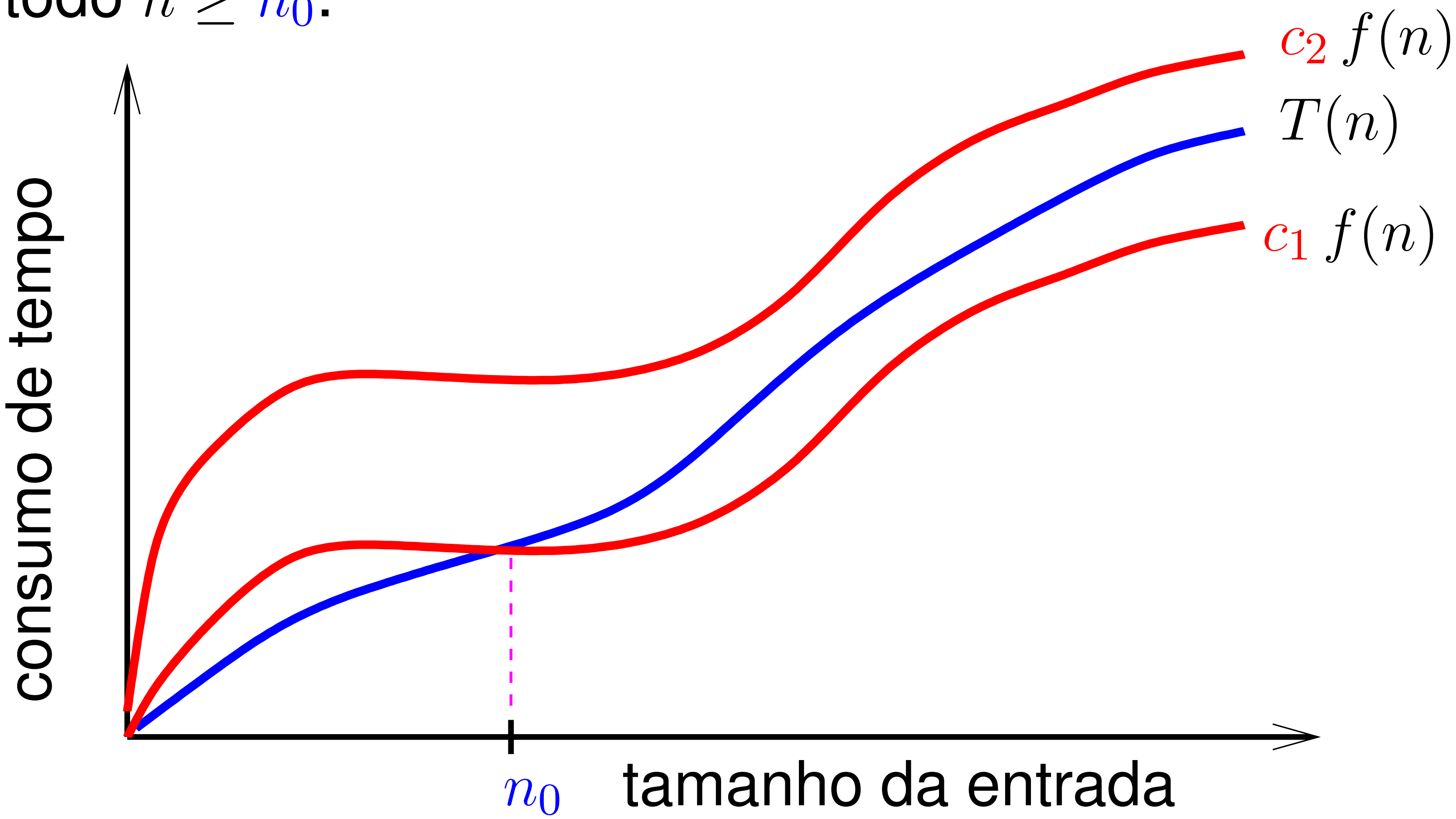


Notação Theta

Dizemos que $T(n)$ é $\Theta(f(n))$ se se existem constantes positivas c_1, c_2 e n_0 tais que

$$c_1\, f(n) \;\leq\; T(n) \;\leq\; c_2\, f(n)$$

para todo $n \geq n_0$.



Intuitivamente

Comparação assintótica, ou seja, para n ENORME.

comparação	comparação assintótica
$T(n) \leq f(n)$	$T(n)$ é $\mathrm{O}(f(n))$
$T(n) \geq f(n)$	$T(n)$ é $\Omega(f(n))$
$T(n) = f(n)$	$T(n)$ é $\Theta(f(n))$

Tamanho máximo de problemas

Suponha que cada operação consome 1 microsegundo ($1\mu s$).

consumo de tempo (μs)	Tamanho máximo de problemas (n)		
	1 segundo	1 minuto	1 hora
$400n$	2500	150000	9000000
$20\,n\,\lceil \lg n \rceil$	4096	166666	7826087
$2n^2$	707	5477	42426
n^4	31	88	244
2^n	19	25	31

Michael T. Goodrich e Roberto Tamassia, *Projeto de Algoritmos*, Bookman.

Crescimento de algumas funções

n	$\lg n$	$\sqrt{n}$	$n \lg n$	n^2	n^3	2^n
2	1	1,4	2	4	8	4
4	2	2	8	16	64	16
8	3	2,8	24	64	512	256
16	4	4	64	256	4096	65536
32	5	5,7	160	1024	32768	4294967296
64	6	8	384	4096	262144	1,8 10^{19}
128	7	11	896	16384	2097152	3,4 10^{38}
256	8	16	1048	65536	16777216	1,1 10^{77}
512	9	23	4608	262144	134217728	1,3 10^{154}
1024	10	32	10240	1048576	1,1 10^9	1,7 10^{308}

Nomes de classes Θ

classe	nome
$\Theta(1)$	constante
$\Theta(\log n)$	logarítmica
$\Theta(n)$	linear
$\Theta(n \log n)$	$n \log n$
$\Theta(n^2)$	quadrática
$\Theta(n^3)$	cúbica
$\Theta(n^k)$ com $k \geq 1$	polinomial
$\Theta(2^n)$	exponencial
$\Theta(a^n)$ com $a > 1$	exponencial

Palavras de Cautela

Suponha que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são algoritmos para um mesmo problema. Suponha que o consumo de tempo de $\mathcal{A}$ é "essencialmente" $100\,n$ e que o consumo de tempo de $\mathcal{B}$ é "essencialmente" $n \log_{10} n$.

Palavras de Cautela

Suponha que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são algoritmos para um mesmo problema. Suponha que o consumo de tempo de $\mathcal{A}$ é "essencialmente" $100\,n$ e que o consumo de tempo de $\mathcal{B}$ é "essencialmente" $n\log_{10} n$.

$100\,n$ é $\Theta(n)$ e $n\log_{10} n$ é $\Theta(n\lg n)$.
Logo, $\mathcal{A}$ é assintoticamente mais eficiente que $\mathcal{B}$.

Palavras de Cautela

Suponha que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são algoritmos para um mesmo problema. Suponha que o consumo de tempo de $\mathcal{A}$ é “essencialmente” $100\,n$ e que o consumo de tempo de $\mathcal{B}$ é “essencialmente” $n \log_{10} n$.

$100\,n$ é $\Theta(n)$ e $n \log_{10} n$ é $\Theta(n \lg n)$.
Logo, $\mathcal{A}$ é assintoticamente mais eficiente que $\mathcal{B}$.

$\mathcal{A}$ é mais eficiente que $\mathcal{B}$ para $n \geq 10^{100}$.

10^{100} = um *googol*
≈ número de átomos no universo observável
= número ENORME

Palavras de Cautela

Conclusão:

Lembre das constantes e termos de baixa ordem que estão “escondidos” na notação assintótica.

Em geral um algoritmo que consome tempo $\Theta(n \lg n)$, e com fatores constantes razoáveis, é bem eficiente.

Um algoritmo que consome tempo $\Theta(n^2)$ pode, algumas vezes, ser satisfatório.

Um algoritmo que consome tempo $\Theta(2^n)$ é dificilmente aceitável.

Do ponto de vista de AA, eficiente $=$ polinomial.

Número de inversões

Você sabe fazer um algoritmo mais rápido para o problema do número de inversões?

Número de inversões

Você sabe fazer um algoritmo mais rápido para o problema do número de inversões?

Note que o número de inversões pode ser $\Theta(n^2)$.
Portanto, para isso, não podemos contar de uma em uma as inversões, como faz o algoritmo que vimos hoje.
Temos que ser mais espertos...

Número de inversões

Você sabe fazer um algoritmo mais rápido para o problema do número de inversões?

Note que o número de inversões pode ser $\Theta(n^2)$.
Portanto, para isso, não podemos contar de uma em uma as inversões, como faz o algoritmo que vimos hoje.
Temos que ser mais espertos...

Ideia: vamos ordenar e contar ao mesmo tempo!

Número de inversões

Você sabe fazer um algoritmo mais rápido para o problema do número de inversões?

Note que o número de inversões pode ser $\Theta(n^2)$.
Portanto, para isso, não podemos contar de uma em uma as inversões, como faz o algoritmo que vimos hoje.
Temos que ser mais espertos...

Ideia: vamos ordenar e contar ao mesmo tempo!

Resultado: um algoritmo $\mathrm{O}(n \lg n)$ para o problema do número de inversões de uma permutação!

Número de inversões

Problema: Dada uma permutação $p[1\,..\,n]$, determinar o número de inversões em p.

Queremos um algoritmo $\mathrm{O}(n \lg n)$ para o problema.

O número de inversões pode ser $\Theta(n^2)$.
Portanto, não podemos contar de uma em uma as inversões, como faz o algoritmo anterior.

Número de inversões

Problema: Dada uma permutação $p[1\,..\,n]$, determinar o número de inversões em p.

Queremos um algoritmo $\mathrm{O}(n \lg n)$ para o problema.

O número de inversões pode ser $\Theta(n^2)$.
Portanto, não podemos contar de uma em uma as inversões, como faz o algoritmo anterior.

Ideia: Vamos ordenar e contar ao mesmo tempo!
A ordenação ajuda a contar várias inversões de uma só vez.

Número de inversões

Problema: Dada uma permutação $p[1\,..\,n]$, determinar o número de inversões em p.

Queremos um algoritmo $\mathrm{O}(n \lg n)$ para o problema.

O número de inversões pode ser $\Theta(n^2)$.
Portanto, não podemos contar de uma em uma as inversões,
como faz o algoritmo anterior.

Ideia: Vamos ordenar e contar ao mesmo tempo!
A ordenação ajuda a contar várias inversões de uma só vez.

Que algoritmo de ordenação usaremos?

Número de inversões

Problema: Dada uma permutação $p[1\,.\,.\,n]$, determinar o número de inversões em p.

Queremos um algoritmo $\mathrm{O}(n \lg n)$ para o problema.

O número de inversões pode ser $\Theta(n^2)$.
Portanto, não podemos contar de uma em uma as inversões,
como faz o algoritmo anterior.

Ideia: Vamos ordenar e contar ao mesmo tempo!
A ordenação ajuda a contar várias inversões de uma só vez.

Que algoritmo de ordenação usaremos?

Duas opções: o MERGESORT e o HEAPSORT.
Qual deles parece mais adequado?

Número de inversões

Problema: Dada uma permutação $p[1\,.\,.\,n]$, determinar o número de inversões em p.

Queremos um algoritmo $\mathrm{O}(n \lg n)$ para o problema.

O número de inversões pode ser $\Theta(n^2)$.
Portanto, não podemos contar de uma em uma as inversões,
como faz o algoritmo anterior.

Ideia: Vamos ordenar e contar ao mesmo tempo!
A ordenação ajuda a contar várias inversões de uma só vez.

Que algoritmo de ordenação usaremos?

Duas opções: o MERGESORT e o HEAPSORT.
Qual deles parece mais adequado?

Resposta: o MERGESORT.

Merge-Sort

Rearranja $A[p\,.\,.\,r]$, com $p \leq r$, em ordem crescente.

```
MERGESORT $(A, p, r)$
    se $p < r$
        então $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$
              MERGESORT $(A, p, q)$
              MERGESORT $(A, q + 1, r)$
              INTERCALA $(A, p, q, r)$
```

Método: Divisão e conquista.

Intercalação

Problema: Dados $A[p\,.\,.\,q]$ e $A[q{+}1\,.\,.\,r]$ crescentes, rearranjar $A[p\,.\,.\,r]$ de modo que ele fique em ordem crescente.

Para que valores de q o problema faz sentido?

Entra:

	p				q				r
A	22	33	55	77	99	11	44	66	88

Intercalação

Problema: Dados $A[p\,..\,q]$ e $A[q{+}1\,..\,r]$ crescentes, rearranjar $A[p\,..\,r]$ de modo que ele fique em ordem crescente.

Para que valores de q o problema faz sentido?

Entra:

	p				q				r
A	22	33	55	77	99	11	44	66	88

Sai:

	p				q				r
A	11	22	33	44	55	66	77	88	99

Intercalação

```
INTERCALA $(A, p, q, r)$
    ▷ $B[p\,..\,r]$ é um vetor auxiliar
    para $i \leftarrow p$ até $q$ faça
        $B[i] \leftarrow A[i]$
    para $j \leftarrow q+1$ até $r$ faça
        $B[r+q+1-j] \leftarrow A[j]$
    $i \leftarrow p$
    $j \leftarrow r$
    para $k \leftarrow p$ até $r$ faça
        se $B[i] \leq B[j]$
            então $A[k] \leftarrow B[i]$
                  $i \leftarrow i+1$
            senão $A[k] \leftarrow B[j]$
                  $j \leftarrow j-1$
```

Adaptação do Merge-Sort

Conta o número de inversões de $A[p\,..\,r]$, com $p \leq r$, e rearranja $A[p\,..\,r]$ em ordem crescente.

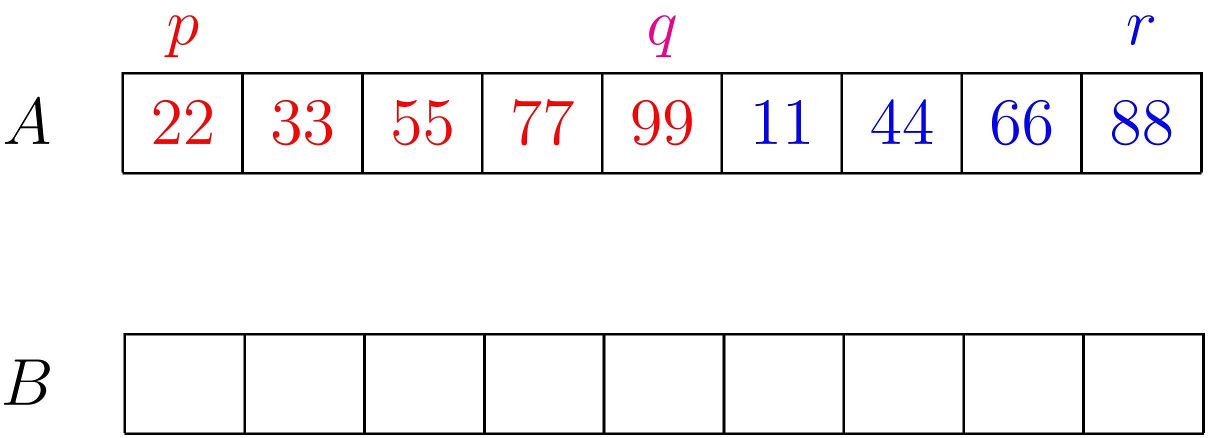
```
CONTA-E-ORDENA $(A, p, r)$
    se $p \geq r$
        então devolva $0$
        senão $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$
            $c \leftarrow$ CONTA-E-ORDENA $(A, p, q) +$
                CONTA-E-ORDENA $(A, q + 1, r) +$
                CONTA-E-INTERCALA $(A, p, q, r)$
            devolva $c$
```

Método: Divisão e conquista.

Contagem na intercalação

```
CONTA-E-INTERCALA $(A, p, q, r)$
para $i \leftarrow p$ até $q$ faça
    $B[i] \leftarrow A[i]$
para $j \leftarrow q+1$ até $r$ faça
    $B[r+q+1-j] \leftarrow A[j]$
$i \leftarrow p$
$j \leftarrow r$
$c \leftarrow 0$                                  ▷ inicializa o contador
para $k \leftarrow p$ até $r$ faça
    se $B[i] \leq B[j]$
        então $A[k] \leftarrow B[i]$
              $i \leftarrow i+1$
        senão $A[k] \leftarrow B[j]$
              $j \leftarrow j-1$
              $c \leftarrow c+(q-i+1)$             ▷ conta inversões
devolva $c$
```

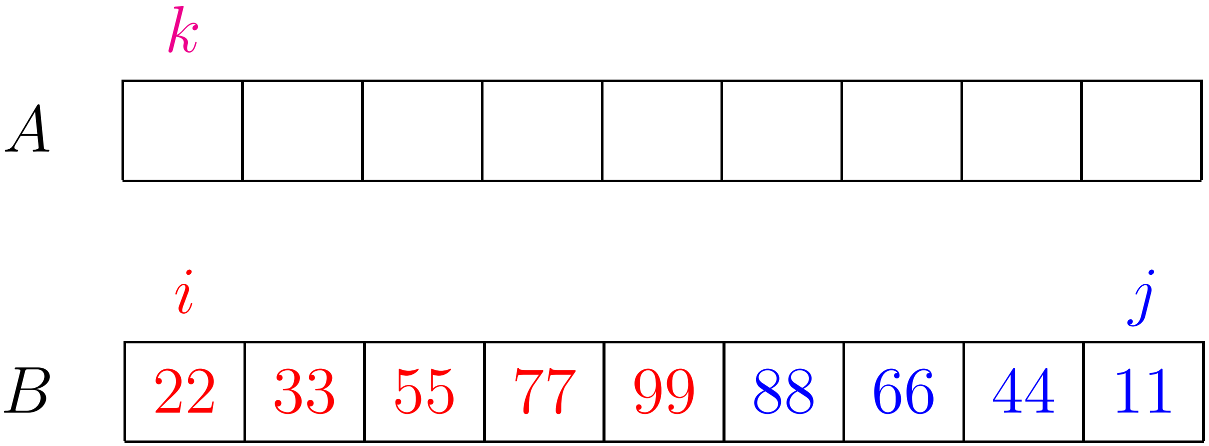
Simulação



	p				q				r
A	22	33	55	77	99	11	44	66	88
B									

$c = 0$

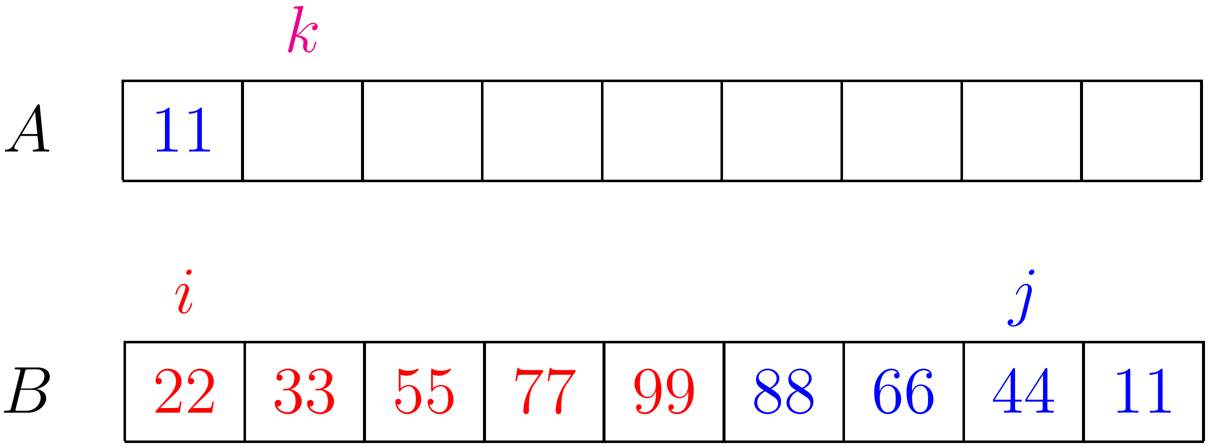
Simulação



	k								
A									
	i								j
B	22	33	55	77	99	88	66	44	11

$c = 0$

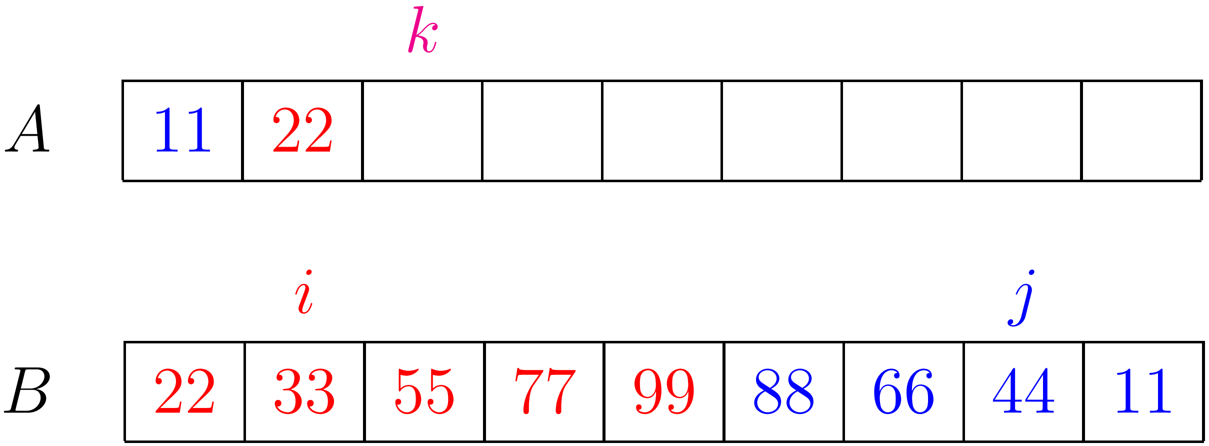
Simulação



		k							
A	11								
	i							j	
B	22	33	55	77	99	88	66	44	11

$$c = 0 + 5 = 5$$

Simulação

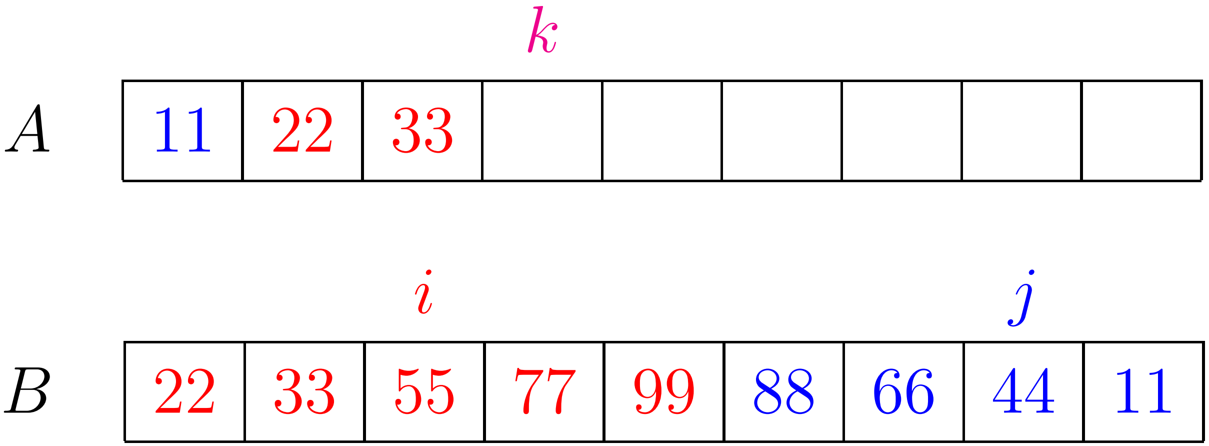


			k						
A	11	22							

		i						j	
B	22	33	55	77	99	88	66	44	11

$c = 5$

Simulação

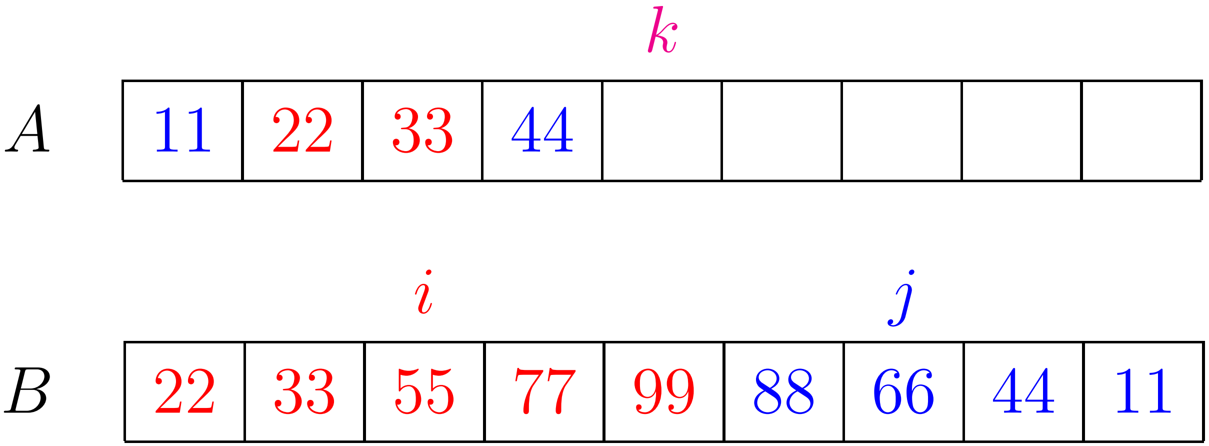


				k					
A	11	22	33						

			i					j	
B	22	33	55	77	99	88	66	44	11

$c = 5$

Simulação



					k				
A	11	22	33	44					

			i				j		
B	22	33	55	77	99	88	66	44	11

$$c = 5 + 3 = 8$$

Simulação

						k			
A	11	22	33	44	55				

				i			j		
B	22	33	55	77	99	88	66	44	11

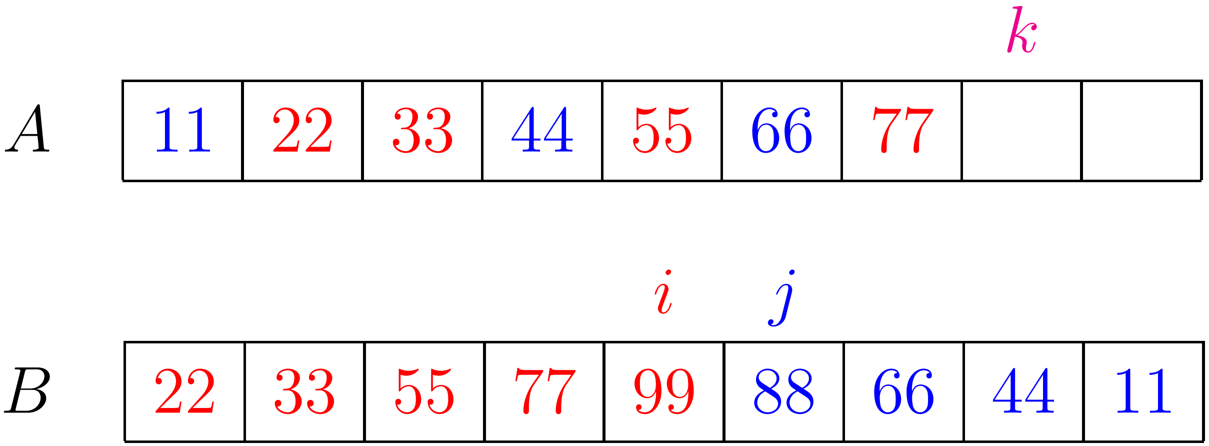
$c = 8$

Simulação

							k		
A	11	22	33	44	55	66			
				i		j			
B	22	33	55	77	99	88	66	44	11

$$c = 8 + 2 = 10$$

Simulação



								k	
A	11	22	33	44	55	66	77		

					i	j			
B	22	33	55	77	99	88	66	44	11

$c = 10$

Simulação

									k
A	11	22	33	44	55	66	77	88	

					$i = j$				
B	22	33	55	77	99	88	66	44	11

$c = 10 + 1 = 11$

Simulação

A	11	22	33	44	55	66	77	88	99
					j	i			
B	22	33	55	77	99	88	66	44	11

$c = 11$

Contagem na intercalação

```
CONTA-E-INTERCALA $(A, p, q, r)$
    para $i \leftarrow p$ até $q$ faça
        $B[i] \leftarrow A[i]$
    para $j \leftarrow q + 1$ até $r$ faça
        $B[r + q + 1 - j] \leftarrow A[j]$
    $i \leftarrow p$
    $j \leftarrow r$
    $c \leftarrow 0$                                        ▷ inicializa o contador
    para $k \leftarrow p$ até $r$ faça
        se $B[i] \leq B[j]$
            então $A[k] \leftarrow B[i]$
                  $i \leftarrow i + 1$
            senão $A[k] \leftarrow B[j]$
                  $j \leftarrow j - 1$
                  $c \leftarrow c + (q - i + 1)$           ▷ conta inversões
    devolva $c$
```

Consumo de tempo

Quanto tempo consome em função de $n := r - p + 1$?

linha	consumo de todas as execuções da linha
1	$\mathrm{O}(n)$
2	$\mathrm{O}(n)$
3	$\mathrm{O}(n)$
4	$\mathrm{O}(n)$
5–7	$\mathrm{O}(1)$
8	$\mathrm{O}(n)$
9	$\mathrm{O}(n)$
10–14	$\mathrm{O}(n)$
15	$\mathrm{O}(1)$
total	$\mathrm{O}(7n + 2)$ = $\mathrm{O}(n)$

Conclusão

O algoritmo CONTA-E-INTERCALA consome $\mathrm{O}(n)$ unidades de tempo.

Também escreve-se

O algoritmo CONTA-E-INTERCALA consome tempo $\mathrm{O}(n)$.

Análise do Conta-E-Ordena

Seja $T(n)$ o tempo consumido pelo CONTA-E-ORDENA.

Análise do Conta-E-Ordena

Seja $T(n)$ o tempo consumido pelo CONTA-E-ORDENA.

Vale a seguinte recorrência para $T(n)$:

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \mathrm{O}(n)$$

Análise do Conta-E-Ordena

Seja $T(n)$ o tempo consumido pelo CONTA-E-ORDENA.

Vale a seguinte recorrência para $T(n)$:

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \mathrm{O}(n)$$

Solução: $T(n) = \mathrm{O}(n \lg n)$.

Prova?

Análise do Conta-E-Ordena

Seja $T(n)$ o tempo consumido pelo CONTA-E-ORDENA.

Vale a seguinte recorrência para $T(n)$:

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \mathrm{O}(n)$$

Solução: $T(n) = \mathrm{O}(n \lg n)$.

Prova?

Considera-se a recorrência simplificada

$$T(n) = 2\,T(n/2) + n$$

definida apenas para n potência de 2.

Análise do Conta-E-Ordena

Seja $T(n)$ o tempo consumido pelo CONTA-E-ORDENA.

Vale a seguinte recorrência para $T(n)$:

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \mathrm{O}(n)$$

Solução: $T(n) = \mathrm{O}(n \lg n)$.

Prova?

Considera-se a recorrência simplificada

$$T(n) = 2\,T(n/2) + n$$

definida apenas para n potência de 2.

Prova-se por indução em n que $T(n) = n + n \lg n = \mathrm{O}(n \lg n)$.

Prova

Afirmação: A recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 2\,T(n/2) + n & \text{se } n \geq 2\text{, } n \text{ potência de } 2 \end{cases}$$

tem como soluçao $T(n) = n + n \lg n$.

Prova

Afirmação: A recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 2\,T(n/2) + n & \text{se } n \geq 2\text{, } n \text{ potência de } 2 \end{cases}$$

tem como soluçao $T(n) = n + n\lg n$.

Prova: Por indução em n.

Base: $n = 1$

$$T(1) = 1 = 1 + 1 \cdot 0 = 1 + 1\lg 1.$$

Prova

Afirmação: A recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 2\,T(n/2) + n & \text{se } n \geq 2\text{, } n \text{ potência de } 2 \end{cases}$$

tem como soluçao $T(n) = n + n \lg n$.

Prova: Por indução em n.

Base: $n = 1$

$$T(1) = 1 = 1 + 1 \cdot 0 = 1 + 1 \lg 1.$$

Passo: $n \geq 2$

$$\begin{aligned} T(n) &= 2\,T(n/2) + n \\ &= 2\,(n/2 + (n/2)\lg(n/2)) + n \qquad \text{por indução} \\ &= 2n + n\lg(n/2) \\ &= 2n + n(\lg n \;-\; 1) \\ &= n + n\lg n. \end{aligned}$$

Resolução de recorrências

Mas como descobrimos que $T(n) = n + n \lg n$?

Resolução de recorrências

Mas como descobrimos que $T(n) = n + n \lg n$? No chute!

Resolução de recorrências

Mas como descobrimos que $T(n) = n + n \lg n$? No chute!

Uma maneira de se obter um “chute” de solução de recorrência é desenrolando a recorrência.

Resolução de recorrências

Mas como descobrimos que $T(n) = n + n \lg n$? No chute!

Uma maneira de se obter um “chute” de solução de recorrência é desenrolando a recorrência.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2\,T(n/2) + n \\
&= 2\,(2\,T(n/2^2) + n/2) + n \;=\; 2^2 T(n/2^2) + 2n \\
&= 2^2\,(2\,T(n/2^3) + n/2^2) + 2n \;=\; 2^3 T(n/2^3) + 3n \\
&= 2^3\,(2\,T(n/2^4) + n/2^3) + 3n \;=\; 2^4 T(n/2^4) + 4n \\
&= \cdots \\
&= 2^k\,T(n/2^k) + kn,
\end{aligned}
$$

onde $k = \lg n$. Disso concluímos que

$$T(n) = n + n \lg n.$$