

**MAC 6711 - Tópicos de Análise de Algoritmos**  
*Departamento de Ciência da Computação*  
Primeiro semestre de 2018

**Lista 3**

1. Exercícios C.2-2, C.2-3, C.2-4, C.2-7, C.2-8 e C.2-9.
2. Exercícios C.3-2 e C.3-8.
3. Considere dois sorteios aleatórios independentes e uniformes, de um inteiro entre 1 e  $k$ , obtendo valores  $X_1$  e  $X_2$ .
  - (a) Quanto é  $\mathbf{E}[\max\{X_1, X_2\}]$  e  $\mathbf{E}[\min\{X_1, X_2\}]$ ?
  - (b) Verifique que  $\mathbf{E}[\max\{X_1, X_2\}] + \mathbf{E}[\min\{X_1, X_2\}] = \mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2]$ .
  - (c) Prove que a identidade acima vale quaisquer que sejam as variáveis aleatórias  $X_1$  e  $X_2$ .
4. Considere o seguinte algoritmo para calcular o máximo de um vetor  $v[1..n]$ .

**Algoritmo** Máximo ( $v, n$ )

1.  $m \leftarrow v[1]$
2. **para**  $i = 2$  **até**  $n$  **faça**
3.     **se**  $v[i] > m$
4.         **então**  $m \leftarrow v[i]$
5. **devolva**  $m$

Suponha que  $v$  é uma permutação escolhida uniformemente dentre todas as permutações de 1 a  $n$ . Qual é o número esperado de vezes que a linha 4 do algoritmo acima é executada?

5. Considere o seguinte algoritmo que determina o segundo maior elemento de um vetor  $v[1..n]$  com  $n \geq 2$  números positivos distintos.

**Algoritmo** Máximo ( $v, n$ )

1.  $maior \leftarrow 0$
2.  $segundo\_maior \leftarrow 0$
3. **para**  $i \leftarrow 1$  **até**  $n$  **faça**
4.     **se**  $v[i] > maior$
5.         **então**  $segundo\_maior \leftarrow maior$
6.          $maior \leftarrow v[i]$
7.     **senão se**  $v[i] > segundo\_maior$
8.         **então**  $segundo\_maior \leftarrow v[i]$
9. **devolva**  $segundo\_maior$

Suponha que  $v$  é uma permutação de 1 a  $n$  escolhida ao acaso dentre todas as permutações de 1 a  $n$ , de acordo com a distribuição uniforme de probabilidade. Seja  $X$  o número de vezes que a variável  $segundo\_maior$  é alterada (ou seja, o número de execuções das linhas 5 e 8 do algoritmo) numa chamada de Máximo( $v, n$ ). Note que  $X$  é uma variável aleatória. Calcule o valor esperado de  $X$ .

6. Considere o seguinte algoritmo que calcula o maior e o menor elemento de um vetor  $v[1..n]$  com elementos distintos.

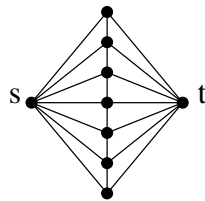
**Algoritmo** MaiorMenor ( $v, n$ )

1.  $maior \leftarrow v[1]$
2.  $menor \leftarrow v[1]$
3. **para**  $i \leftarrow 2$  **até**  $n$  **faça**
4.     **se**  $v[i] > maior$
5.         **então**  $maior \leftarrow v[i]$
6.     **senão se**  $v[i] < menor$
7.         **então**  $menor \leftarrow v[i]$
8. **devolva**  $maior, menor$

Suponha que a entrada do algoritmo é uma permutação de 1 a  $n$  escolhida uniformemente dentre todas as permutações de 1 a  $n$ .

Qual é o número esperado de comparações executadas na linha 6 do algoritmo? Qual é o número esperado de atribuições efetuadas na linha 7 do algoritmo?

7. Exercício 1 do cap. 13 do KT.
8. Exercício 12 do cap. 13 do KT.
9. Exercício 15 do cap. 13 do KT.
10. Considere a seguinte instância do  $s$ - $t$  corte.



Mostre que a probabilidade do algoritmo de Karger sugerido no exercício 12 do KT dar uma resposta correta, ou seja, um  $s$ - $t$  corte mínimo, é exponencialmente pequena no número  $n$  de vértices deste grafo.