Leilões combinatórios

n participantes $\qquad$ m itens

Valorações: para cada $i \in [n]$,
um valor $v_i(S)$ para cada $S \subseteq [m]$.

Alocação: conjuntos $S_1, \ldots, S_n$ de itens tq
$S_i \cap S_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$.

Objetivo: encontrar alocação que
maximize o bem-estar social $\sum_{i=1}^{n} v_i(S_i)$.

Demandas

Dados preços $p_1, \ldots, p_m$ para os itens,
uma demanda para o participante i é
um conjunto $S \subseteq [m]$ que maximiza sua utilidade.

Demandas

Dados preços $p_1, \ldots, p_m$ para os itens,
uma demanda para o participante i é
um conjunto $S \subseteq [m]$ que maximiza sua utilidade.

A utilidade de i para S é $u_i(S) = v_i(S) - \sum_{j \in S} p_j$.

Demandas

Dados preços $p_1, \ldots, p_m$ para os itens,
uma demanda para o participante i é
um conjunto $S \subseteq [m]$ que maximiza sua utilidade.

A utilidade de i para S é $u_i(S) = v_i(S) - \sum_{j \in S} p_j$.

Ou seja, uma demanda é um conjunto S tal que

$$u_i(S) \;=\; v_i(S) - \sum_{j \in S} p_j \;\geq\; v_i(S') - \sum_{j \in S'} p_j,$$

para qualquer $S' \subseteq [m]$.

Leilões ascendentes

Subclasse dos chamados leilões iterativos.

Leilões ascendentes

Subclasse dos chamados leilões iterativos.

Preços só podem subir.

Leilões ascendentes

Subclasse dos chamados leilões iterativos.

Preços só podem subir.

Ideia:

Leiloeiro começa com os preços nulos (ou no mínimo).

Leilões ascendentes

Subclasse dos chamados leilões iterativos.

Preços só podem subir.

Ideia:

Leiloeiro começa com os preços nulos (ou no mínimo).

Cada participante aposta em um dos seus conjuntos mais desejados de itens, ou seja, em uma demanda.

Leilões ascendentes

Subclasse dos chamados leilões iterativos.

Preços só podem subir.

Ideia:

Leiloeiro começa com os preços nulos (ou no mínimo).

Cada participante aposta em um dos seus conjuntos mais desejados de itens, ou seja, em uma demanda.

Leiloeiro aumenta alguns preços de algum modo, até decidir por uma alocação.

Leilões ascendentes

Preços por itens

Leilões ascendentes

Preços por itens

Valoração v satisfaz a propriedade dos substitutos
se, para todo par de preços dos itens $q \geq p$,

Leilões ascendentes

Preços por itens

Valoração v satisfaz a propriedade dos substitutos
se, para todo par de preços dos itens $q \geq p$,
uma demanda com preços q contem todos os itens
de uma demanda com preços p que mantiveram seus preços.

Leilões ascendentes

Preços por itens

Valoração v satisfaz a propriedade dos substitutos
se, para todo par de preços dos itens $q \geq p$,
uma demanda com preços q contem todos os itens
de uma demanda com preços p que mantiveram seus preços.

Formalmente: para todo $A \in \arg\max_S \{v(S) - \sum_{j \in S} p_j\}$, existe
$D \in \arg\max_S \{v(S) - \sum_{j \in S} q_j\}$ tal que $D \supseteq \{j \in A : p_j = q_j\}$.

Leilões ascendentes

Preços por itens

Valoração v satisfaz a propriedade dos substitutos
se, para todo par de preços dos itens $q \geq p$,
uma demanda com preços q contem todos os itens
de uma demanda com preços p que mantiveram seus preços.

Formalmente: para todo $A \in \arg\max_S \{v(S) - \sum_{j \in S} p_j\}$, existe
$D \in \arg\max_S \{v(S) - \sum_{j \in S} q_j\}$ tal que $D \supseteq \{j \in A : p_j = q_j\}$.

Apenas itens cujo preço subiu podem sair da demanda.

Leilões ascendentes

Preços por itens

Valoração v satisfaz a propriedade dos substitutos
se, para todo par de preços dos itens $q \geq p$,
uma demanda com preços q contem todos os itens
de uma demanda com preços p que mantiveram seus preços.

Formalmente: para todo $A \in \arg\max_S \{v(S) - \sum_{j \in S} p_j\}$, existe $D \in \arg\max_S \{v(S) - \sum_{j \in S} q_j\}$ tal que $D \supseteq \{j \in A : p_j = q_j\}$.

Apenas itens cujo preço subiu podem sair da demanda.

Todo item está na demanda de algum participante.

Valorações com propriedade dos substitutos

Preços por itens

Valoração v satisfaz a propriedade dos substitutos
se, para todo par de preços dos itens $q \geq p$,
uma demanda com preços q contem todos os itens
de uma demanda com preços p que mantiveram seus preços.

Formalmente: para todo $A \in \arg\max_S\{v(S) - \sum_{j \in S} p_j\}$, existe $D \in \arg\max_S\{v(S) - \sum_{j \in S} q_j\}$ tal que $D \supseteq \{j \in A : p_j = q_j\}$.

Apenas itens cujo preço subiu podem sair da demanda.

Valorações com propriedade dos substitutos

Preços por itens

Valoração v satisfaz a propriedade dos substitutos
se, para todo par de preços dos itens $q \geq p$,
uma demanda com preços q contem todos os itens
de uma demanda com preços p que mantiveram seus preços.

Formalmente: para todo $A \in \arg\max_S \{v(S) - \sum_{j \in S} p_j\}$, existe $D \in \arg\max_S \{v(S) - \sum_{j \in S} q_j\}$ tal que $D \supseteq \{j \in A : p_j = q_j\}$.

Apenas itens cujo preço subiu podem sair da demanda.

Valorações aditivas ($v(S) = \sum_{j \in S} p_j$),
de demanda unitária ($v(S) = \max_{j \in S} p_j$),
decrescentes ($v(S) = \sum_{j=1}^{|S|} p_j$, onde $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_m$).

Leilão de preços ascendentes de itens

PreçosAscendentes (m, n)

para $j \leftarrow 1$ **até** m **faça** $p_j \leftarrow 0$
para $i \leftarrow 1$ **até** n **faça** $S_i \leftarrow \emptyset$
repita
    para $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**
        seja D_i uma demanda de i para preços
            p_j para $j \in S_i$ e $p_j + \epsilon$ para $j \notin S_i$
    se $D_i \neq S_i$ para algum i
        então para $j \in D_i \setminus S_i$ **faça** $p_j \leftarrow p_j + \epsilon$
            $S_i \leftarrow D_i$
            para $k \leftarrow 1$ **até** n **faça**
                se $k \neq i$ **então** $S_k \leftarrow S_k \setminus D_i$
até $D_i = S_i$ para todo i
devolva $S_1, \ldots, S_n$

Leilão de preços ascendentes de itens

PreçosAscendentes (m, n)

para $j \leftarrow 1$ **até** m **faça** $p_j \leftarrow 0$
para $i \leftarrow 1$ **até** n **faça** $S_i \leftarrow \emptyset$
repita
  para $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**
    seja D_i uma demanda de i para preços
      p_j para $j \in S_i$ e $p_j + \epsilon$ para $j \notin S_i$
  se $D_i \neq S_i$ para algum i
    então para $j \in D_i \setminus S_i$ **faça** $p_j \leftarrow p_j + \epsilon$
      $S_i \leftarrow D_i$
      para $k \leftarrow 1$ **até** n **faça**
        se $k \neq i$ **então** $S_k \leftarrow S_k \setminus D_i$
até $D_i = S_i$ para todo i
devolva $S_1, \ldots, S_n$

Termina quando nenhum item que está tentativamente com um participante está na demanda de outro.

Leilão de preços ascendentes de itens

PreçosAscendentes (m, n)

para $j \leftarrow 1$ **até** m **faça** $p_j \leftarrow 0$
para $i \leftarrow 1$ **até** n **faça** $S_i \leftarrow \emptyset$
repita
    para $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**
        seja D_i uma demanda de i para preços
            p_j para $j \in S_i$ e $p_j + \epsilon$ para $j \notin S_i$
    se $D_i \neq S_i$ para algum i
        então para $j \in D_i \setminus S_i$ **faça** $p_j \leftarrow p_j + \epsilon$
            $S_i \leftarrow D_i$
            para $k \leftarrow 1$ **até** n **faça**
                se $k \neq i$ **então** $S_k \leftarrow S_k \setminus D_i$
até $D_i = S_i$ para todo i
devolva $S_1, \ldots, S_n$

No máximo $m\ v_{\max}/\epsilon$ iterações do repita.

Leilão de preços ascendentes de itens

PreçosAscendentes (m, n)

para $j \leftarrow 1$ **até** m **faça** $p_j \leftarrow 0$
para $i \leftarrow 1$ **até** n **faça** $S_i \leftarrow \emptyset$
repita
    para $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**
        seja D_i uma demanda de i para preços
            p_j para $j \in S_i$ e $p_j + \epsilon$ para $j \notin S_i$
    se $D_i \neq S_i$ para algum i
        então para $j \in D_i \setminus S_i$ **faça** $p_j \leftarrow p_j + \epsilon$
            $S_i \leftarrow D_i$
            para $k \leftarrow 1$ **até** n **faça**
                se $k \neq i$ **então** $S_k \leftarrow S_k \setminus D_i$
até $D_i = S_i$ para todo i
devolva $S_1, \ldots, S_n$

Termina próximo a um equilíbrio Walrasiano.

Equilíbrio Walrasiano

Dados preços $p_1, \ldots, p_m$ para os itens,
uma demanda para o participante i é
um conjunto $S \subseteq [m]$ que maximiza sua utilidade.

A utilidade de i para S é $u_i(S) = v_i(S) - \sum_{j \in S} p_j$.

Ou seja, uma demanda é um conjunto S tal que

$$u_i(S) \;=\; v_i(S) - \sum_{j \in S} p_j \;\geq\; v_i(S') - \sum_{j \in S'} p_j,$$

para qualquer $S' \subseteq [m]$.

Equilíbrio Walrasiano

Dados preços $p_1, \dots, p_m$ para os itens,
uma demanda para o participante i é
um conjunto $S \subseteq [m]$ que maximiza sua utilidade.

A utilidade de i para S é $u_i(S) = v_i(S) - \sum_{j \in S} p_j$.

Ou seja, uma demanda é um conjunto S tal que

$$u_i(S) \;=\; v_i(S) - \sum_{j \in S} p_j \;\geq\; v_i(S') - \sum_{j \in S'} p_j,$$

para qualquer $S' \subseteq [m]$.

Equilíbrio Walrasiano: preços em que todo participante recebe uma demanda e itens não vendidos têm preço nulo.

Equilíbrio ϵ-Walrasiano

Alocação $S_1, \ldots, S_n$ e preços $p_1, \ldots, p_m$ são equilíbrio ϵ-Walrasiano se

- $\bigcup_i S_i \supseteq \{j : p_j > 0\}$ e
- S_i para cada i é uma demanda de i para os preços p_j para $j \in S_i$ e $p_j + \epsilon$ para $j \notin S_i$.

Equilíbrio ϵ-Walrasiano

Alocação $S_1, \ldots, S_n$ e preços $p_1, \ldots, p_m$
são equilíbrio ϵ-Walrasiano se

- $\bigcup_i S_i \supseteq \{j : p_j > 0\}$ e
- S_i para cada i é uma demanda de i para os preços p_j para $j \in S_i$ e $p_j + \epsilon$ para $j \notin S_i$.

Teorema: Para participantes com valoração de substitutos, o algoritmo PreçosAscendentes produz um equilíbrio ϵ-Walrasiano.
Assim a alocação produzida atinge um bem-estar social a $n\epsilon$ do bem-estar social ótimo.

Equilíbrio ϵ-Walrasiano

Alocação $S_1, \ldots, S_n$ e preços $p_1, \ldots, p_m$
são equilíbrio ϵ-Walrasiano se

- $\bigcup_i S_i \supseteq \{j : p_j > 0\}$ e
- S_i para cada i é uma demanda de i para os preços p_j para $j \in S_i$ e $p_j + \epsilon$ para $j \notin S_i$.

Teorema: Para participantes com valoração de substitutos, o algoritmo PreçosAscendentes produz um equilíbrio ϵ-Walrasiano. Assim a alocação produzida atinge um bem-estar social a $n\epsilon$ do bem-estar social ótimo.

O teorema é consequência do seguinte:
Para todo participante i, durante todo o algoritmo, $S_i \subseteq D_i$.

Equilíbrio ϵ-Walrasiano

Alocação $S_1, \ldots, S_n$ e preços $p_1, \ldots, p_m$
são equilíbrio ϵ-Walrasiano se

- $\bigcup_i S_i \supseteq \{j : p_j > 0\}$ e
- S_i para cada i é uma demanda de i para os preços p_j para $j \in S_i$ e $p_j + \epsilon$ para $j \notin S_i$.

Teorema: Para participantes com valoração de substitutos, o algoritmo PreçosAscendentes produz um equilíbrio ϵ-Walrasiano. Assim a alocação produzida atinge um bem-estar social a $n\epsilon$ do bem-estar social ótimo.

O teorema é consequência do seguinte:
Para todo participante i, durante todo o algoritmo, $S_i \subseteq D_i$.

Também é claro que $\bigcup_i S_i \supseteq \{j : p_j > 0\}$.

Lembra um algoritmo primal-dual

LP: encontrar x que

maximizem $\sum_{i=1}^{n} \sum_{S \subseteq [m]} x_{i,S} v_i(S)$

sujeitos a $\sum_{i=1}^{n} \sum_{S \subseteq [m] : j \in S} x_{i,S} \leq 1$ para cada $j \in [m]$

$\sum_{S \subseteq [m]} x_{i,S} \leq 1$ para cada $i \in [n]$

$x_{i,S} \geq 0$ para cada $i \in [n]$ e cada $S \subseteq [m]$.

Dual: encontrar u e p que

minimizem $\sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{j \in [m]} p_j$

sujeitos a $u_i + \sum_{j \in S} p_j \geq v_i(S)$ para cada $S \subseteq [m]$

$u_i \geq 0, \quad p_j \geq 0$ para cada $i \in [n]$ e $j \in [m]$.

Lembra um algoritmo primal-dual

LP: encontrar x que

maximizem $\sum_{i=1}^{n} \sum_{S \subseteq [m]} x_{i,S} v_i(S)$

sujeitos a $\sum_{i=1}^{n} \sum_{S \subseteq [m]: j \in S} x_{i,S} \leq 1$ para cada $j \in [m]$

$\sum_{S \subseteq [m]} x_{i,S} \leq 1$ para cada $i \in [n]$

$x_{i,S} \geq 0$ para cada $i \in [n]$ e cada $S \subseteq [m]$.

Dual: encontrar u e p que

minimizem $\sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{j \in [m]} p_j$

sujeitos a $u_i + \sum_{j \in S} p_j \geq v_i(S)$ para cada $S \subseteq [m]$

$u_i \geq 0, \quad p_j \geq 0$ para cada $i \in [n]$ e $j \in [m]$.

Algoritmo mantém soluções viáveis do primal (os S_i's)
e do dual (os p_j's e $u_i = u(D_i)$).

Lembra um algoritmo primal-dual

LP: encontrar x que

maximizem $\sum_{i=1}^{n} \sum_{S \subseteq [m]} x_{i,S} v_i(S)$

sujeitos a $\sum_{i=1}^{n} \sum_{S \subseteq [m]: j \in S} x_{i,S} \leq 1$ para cada $j \in [m]$

$\sum_{S \subseteq [m]} x_{i,S} \leq 1$ para cada $i \in [n]$

$x_{i,S} \geq 0$ para cada $i \in [n]$ e cada $S \subseteq [m]$.

Dual: encontrar u e p que

minimizem $\sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{j \in [m]} p_j$

sujeitos a $u_i + \sum_{j \in S} p_j \geq v_i(S)$ para cada $S \subseteq [m]$

$u_i \geq 0, \quad p_j \geq 0$ para cada $i \in [n]$ e $j \in [m]$.

Algoritmo mantém soluções viáveis do primal (os S_i's)
e do dual (os p_j's e $u_i = u(D_i)$).

Folgas complementares não satisfeitas: $u_i > u_i(S_i)$ e $x_{i,S_i} = 1$
Melhora as soluções, aumentando os preços e ajustando a alocação.

Não é à prova de estratégia

Considere dois itens, a e b, e dois jogadores, Alice e Bob, com as seguintes valorações

	$v(a)$	$v(b)$	$v(ab)$
Alice	4	4	4
Bob	5	5	10

Não é à prova de estratégia

Considere dois itens, a e b, e dois jogadores, Alice e Bob, com as seguintes valorações

	$v(a)$	$v(b)$	$v(ab)$
Alice	4	4	4
Bob	5	5	10

Para estas valorações, o leilão do algoritmo termina no equilíbrio Walrasiano, com preços $p_a = p_b = 4$, e Bob recebendo os dois itens, com utilidade 2.

Não é à prova de estratégia

Considere dois itens, a e b, e dois jogadores, Alice e Bob, com as seguintes valorações

	$v(a)$	$v(b)$	$v(ab)$
Alice	4	4	4
Bob	5	5	10

Para estas valorações, o leilão do algoritmo termina no equilíbrio Walrasiano, com preços $p_a = p_b = 4$, e Bob recebendo os dois itens, com utilidade 2.

Se Bob declarasse sua valoração apenas por a, então o algoritmo deixaria a com Bob e b com Alice, os dois pelo preço nulo.

Não é à prova de estratégia

Considere dois itens, a e b, e dois jogadores, Alice e Bob, com as seguintes valorações

	$v(a)$	$v(b)$	$v(ab)$
Alice	4	4	4
Bob	5	5	10

Para estas valorações, o leilão do algoritmo termina no equilíbrio Walrasiano, com preços $p_a = p_b = 4$, e Bob recebendo os dois itens, com utilidade 2.

Se Bob declarasse sua valoração apenas por a, então o algoritmo deixaria a com Bob e b com Alice, os dois pelo preço nulo.

Com essa declaração, Bob ficaria com utildade 5.

Equilíbrio ϵ-Walrasiano

Alocação $S_1, \ldots, S_n$ e preços $p_1, \ldots, p_m$
são equilíbrio ϵ-Walrasiano se

- $\cup_i S_i \supseteq \{j : p_j > 0\}$ e
- S_i para cada i é uma demanda de i para os preços p_j para $j \in S_i$ e $p_j + \epsilon$ para $j \notin S_i$.

Teorema: Para participantes com valoração de substitutos, o algoritmo PreçosAscendentes produz um equilíbrio ϵ-Walrasiano. Assim a alocação produzida atinge um bem-estar social a $n\epsilon$ do bem-estar social ótimo.

É à prova de estratégia para valorações unitárias.

(Preços serão VCG neste caso.)

Leilões ascendentes

Preços por bandos de itens:

Leilões ascendentes

Preços por bandos de itens:
Para cada i e cada $S \subseteq [m]$, um preço $p_i(S)$.

Leilões ascendentes

Preços por bandos de itens:
Para cada i e cada $S \subseteq [m]$, um preço $p_i(S)$.

Demanda para i: conjunto $D \in \arg\max_S \{v_i(S) - p_i(S)\}$.

Leilões ascendentes

Preços por bandos de itens:
Para cada i e cada $S \subseteq [m]$, um preço $p_i(S)$.

Demanda para i: conjunto $D \in \arg\max_S \{v_i(S) - p_i(S)\}$.

Equilíbrio competitivo:

preços p e alocação $S = (S_1, \ldots, S_n)$ tq

- para todo i, conjunto S_i é uma demanda para i;
- alocação maximiza o lucro do leiloeiro para p:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(S_i) \;\geq\; \sum_{i=1}^{n} p_i(T_i),$$

para qualquer outra alocação $T = (T_1, \ldots, T_n)$.

Leilões ascendentes

Preços por bandos de itens:
Para cada i e cada $S \subseteq [m]$, um preço $p_i(S)$.

Demanda para i: conjunto $D \in \arg\max_S \{v_i(S) - p_i(S)\}$.

Equilíbrio competitivo:

preços p e alocação $S = (S_1, \ldots, S_n)$ tq

- para todo i, conjunto S_i é uma demanda para i;
- alocação maximiza o lucro do leiloeiro para p:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(S_i) \;\geq\; \sum_{i=1}^{n} p_i(T_i),$$

para qualquer outra alocação $T = (T_1, \ldots, T_n)$.

Proposição: Em qualquer equilíbrio competitivo,
a alocação maximiza o bem-estar social.

Leilão de preços ascendentes de itens

```
PreçosAscendentes (m, n)
para j ← 1 até m e S ⊆ [m] faça p_i(S) ← 0
repita
    encontre alocação T = (T_1, ..., T_n) que maximiza
    lucro do leiloeiro com p_i(T_i) > 0 para todo T_i ≠ ∅.
    L ← {i : T_i = ∅}          ▷ perdedores
    para cada i ∈ L faça
        seja D_i uma demanda de i para os preços p_i
    se D_i = ∅ para todo i
        então devolva T e p
    para cada i ∈ L tq D_i ≠ ∅ faça
        p_i(D_i) ← p_i(D_i) + ϵ
```

Leilão de preços ascendentes de itens

PreçosAscendentes (m, n)

para $j \leftarrow 1$ **até** m e $S \subseteq [m]$ **faça** $p_i(S) \leftarrow 0$
repita
  encontre alocação $T = (T_1, \ldots, T_n)$ que maximiza
  lucro do leiloeiro com $p_i(T_i) > 0$ para todo $T_i \neq \emptyset$.
  $L \leftarrow \{i : T_i = \emptyset\}$ ▷ perdedores
  para cada $i \in L$ **faça**
    seja D_i uma demanda de i para os preços p_i
  se $D_i = \emptyset$ para todo i
    então devolva T e p
  para cada $i \in L$ tq $D_i \neq \emptyset$ **faça**
    $p_i(D_i) \leftarrow p_i(D_i) + \epsilon$

ϵ-demanda para i: conjunto D tq
$v_i(D) - p_i(D) \leq v_i(S) - p_i(S) - \epsilon$ para todo $S \subseteq [m]$.

Leilão de preços ascendentes de itens

PreçosAscendentes (m, n)

para $j \leftarrow 1$ **até** m e $S \subseteq [m]$ **faça** $p_i(S) \leftarrow 0$
repita
  encontre alocação $T = (T_1, \ldots, T_n)$ que maximiza
  lucro do leiloeiro com $p_i(T_i) > 0$ para todo $T_i \neq \emptyset$.
  $L \leftarrow \{i : T_i = \emptyset\}$ ▷ perdedores
  para cada $i \in L$ **faça**
    seja D_i uma demanda de i para os preços p_i
  se $D_i = \emptyset$ para todo i
    então devolva T e p
  para cada $i \in L$ tq $D_i \neq \emptyset$ **faça**
    $p_i(D_i) \leftarrow p_i(D_i) + \epsilon$

ϵ-demanda para i: conjunto D tq
$v_i(D) - p_i(D) \leq v_i(S) - p_i(S) - \epsilon$ para todo $S \subseteq [m]$.
Equilíbrio ϵ-competitivo: cada i recebe ϵ-demanda.

Leilão de preços ascendentes de itens

PreçosAscendentes (m, n)

```
para j ← 1 até m e S ⊆ [m] faça p_i(S) ← 0
repita
    encontre alocação T = (T_1, ..., T_n) que maximiza
    lucro do leiloeiro com p_i(T_i) > 0 para todo T_i ≠ ∅.
    L ← {i : T_i = ∅}          ▷ perdedores
    para cada i ∈ L faça
        seja D_i uma demanda de i para os preços p_i
    se D_i = ∅ para todo i
        então devolva T e p
    para cada i ∈ L tq D_i ≠ ∅ faça
        p_i(D_i) ← p_i(D_i) + ε
```

ϵ-demanda para i: conjunto D tq
$v_i(D) - p_i(D) \leq v_i(S) - p_i(S) - \epsilon$ para todo $S \subseteq [m]$.
Equilíbrio ϵ-competitivo: cada i recebe ϵ-demanda.
O algoritmo termina com um equilíbrio ϵ-competitivo.