# Leilões combinatórios

$n$ participantes $\qquad$ $m$ itens

valorações: para cada $i \in [n]$,
um valor $v_i(S)$ para cada $S \subseteq [m]$.

# Leilões combinatórios

$n$ participantes $\qquad$ $m$ itens

valorações: para cada $i \in [n]$,
um valor $v_i(S)$ para cada $S \subseteq [m]$.

Restrições:

- *free-disposal*
  $v_i(S) \leq v_i(T)$ para todo $S \subseteq T$ e todo $i$.
- normalização
  $v_i(\emptyset) = 0$ para todo $i$.

# Leilões combinatórios

$n$ participantes $m$ itens

valorações: para cada $i \in [n]$,
um valor $v_i(S)$ para cada $S \subseteq [m]$.

Restrições:

- *free-disposal*
  $v_i(S) \leq v_i(T)$ para todo $S \subseteq T$ e todo $i$.
- normalização
  $v_i(\emptyset) = 0$ para todo $i$.

Leilão combinatório $\times$ vários leilões de um único item.

# Leilões combinatórios

$n$ participantes $\qquad$ $m$ itens

valorações: para cada $i \in [n]$,
um valor $v_i(S)$ para cada $S \subseteq [m]$.

Restrições:

- *free-disposal*
  $v_i(S) \leq v_i(T)$ para todo $S \subseteq T$ e todo $i$.
- normalização
  $v_i(\emptyset) = 0$ para todo $i$.

Leilão combinatório $\times$ vários leilões de um único item.

- $S$ e $T$ se complementam se $v_i(S) + v_i(T) < v_i(S \cup T)$.
- $S$ e $T$ se substituem se $v_i(S) + v_i(T) > v_i(S \cup T)$.

# Alocações

$n$ participantes $\qquad$ $m$ itens

valorações: para cada $i \in [n]$,

um valor $v_i(S)$ para cada $S \subseteq [m]$.

# Alocações

$n$ participantes $\quad\quad$ $m$ itens

valorações: para cada $i \in [n]$,
um valor $v_i(S)$ para cada $S \subseteq [m]$.

Alocação: conjuntos $S_1, \ldots, S_n$ de itens tq
$S_i \cap S_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$.

# Alocações

$n$ participantes $\qquad$ $m$ itens

valorações: para cada $i \in [n]$,
um valor $v_i(S)$ para cada $S \subseteq [m]$.

Alocação: conjuntos $S_1, \ldots, S_n$ de itens tq
$S_i \cap S_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$.

Bem-estar social: $\sum_{i=1}^{n} v_i(S_i)$.

# Alocações

$n$ participantes $\qquad$ $m$ itens

valorações: para cada $i \in [n]$,
um valor $v_i(S)$ para cada $S \subseteq [m]$.

Alocação: conjuntos $S_1, \ldots, S_n$ de itens tq
$S_i \cap S_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$.

Bem-estar social: $\sum_{i=1}^{n} v_i(S_i)$.

Alocação socialmente eficiente:
maximiza o bem-estar social.

# Alocações

$n$ participantes $\qquad$ $m$ itens

valorações: para cada $i \in [n]$,
um valor $v_i(S)$ para cada $S \subseteq [m]$.

Alocação: conjuntos $S_1, \ldots, S_n$ de itens tq
$S_i \cap S_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$.

Bem-estar social: $\sum_{i=1}^{n} v_i(S_i)$.

Alocação socialmente eficiente:
maximiza o bem-estar social.

Valorações são informação privada.

Queremos métodos eficientes para
maximizar o bem-estar social.

# Dificuldades

$n$ participantes $\qquad$ $m$ itens

valorações: para cada $i \in [n]$,
um valor $v_i(S)$ para cada $S \subseteq [m]$.

Alocação: conjuntos $S_1, \dots, S_n$ de itens tq
$S_i \cap S_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$.

# Dificuldades

$n$ participantes $\qquad$ $m$ itens

valorações: para cada $i \in [n]$,
um valor $v_i(S)$ para cada $S \subseteq [m]$.

Alocação: conjuntos $S_1, \ldots, S_n$ de itens tq
$S_i \cap S_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$.

- Mesmo para casos particulares, encontrar alocações ótimas pode ser um problema difícil (NP-difícil).

# Dificuldades

$n$ participantes $m$ itens

valorações: para cada $i \in [n]$,
um valor $v_i(S)$ para cada $S \subseteq [m]$.

Alocação: conjuntos $S_1, \ldots, S_n$ de itens tq
$S_i \cap S_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$.

- Mesmo para casos particulares, encontrar alocações ótimas pode ser um problema difícil (NP-difícil).
- Valorações têm tamanho exponencial em $m$.
  Como lidar com isso?

# Dificuldades

$n$ participantes $\qquad$ $m$ itens

valorações: para cada $i \in [n]$,
um valor $v_i(S)$ para cada $S \subseteq [m]$.

Alocação: conjuntos $S_1, \ldots, S_n$ de itens tq
$S_i \cap S_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$.

- Mesmo para casos particulares, encontrar alocações ótimas pode ser um problema difícil (NP-difícil).

- Valorações têm tamanho exponencial em $m$.
Como lidar com isso?

- Comportamento estratégico: como garantir que os participantes declararão suas reais valorações?

# Caso de objetivo único

Caso particular: *single-minded*

Cada participante está interessado em um único conjunto.

# Caso de objetivo único

Caso particular: *single-minded*
Cada participante está interessado em um único conjunto.

Cada valoração é dada por um par $(S_i, v_i)$,
representando $v_i(S) = v_i$ se $S \supseteq S_i$ e 0 caso contrário.

# Caso de objetivo único

Caso particular: *single-minded*
Cada participante está interessado em um único conjunto.

Cada valoração é dada por um par $(S_i, v_i)$,
representando $v_i(S) = v_i$ se $S \supseteq S_i$ e 0 caso contrário.

Complexidade computacional: encontrar
uma alocação ótima para esta versão do problema é NP-difícil.

# Caso de objetivo único

Caso particular: *single-minded*
Cada participante está interessado em um único conjunto.

Cada valoração é dada por um par $(S_i, v_i)$,
representando $v_i(S) = v_i$ se $S \supseteq S_i$ e 0 caso contrário.

Complexidade computacional: encontrar
uma alocação ótima para esta versão do problema é NP-difícil.

Conjunto independente:
Dado um grafo $G$ e um inteiro $k$, determinar
se $G$ tem um conjunto independente de tamanho $k$.

# Caso de objetivo único

Caso particular: *single-minded*
Cada participante está interessado em um único conjunto.

Cada valoração é dada por um par $(S_i, v_i)$,
representando $v_i(S) = v_i$ se $S \supseteq S_i$ e 0 caso contrário.

Complexidade computacional: encontrar
uma alocação ótima para esta versão do problema é NP-difícil.

Conjunto independente:
Dado um grafo $G$ e um inteiro $k$, determinar
se $G$ tem um conjunto independente de tamanho $k$.

Redução do problema do conjunto independente para a versão de decisão do problema single-minded da alocação ótima.

# Complexidade computacional

Teorema: O problema single-minded da alocação ótima é NP-difícil.

Prova feita na aula.

É pior que isso: a redução preserva aproximação,
assim o problema herda a dificuldade do conjunto independente.

# Complexidade computacional

Teorema: O problema single-minded da alocação ótima é NP-difícil.

Prova feita na aula.

É pior que isso: a redução preserva aproximação,
assim o problema herda a dificuldade do conjunto independente.

Teorema: Para todo $\epsilon > 0$, não existe $n^{1-\epsilon}$-aproximação
para o conjunto independente a menos que P $=$ NP,
onde $n$ é o número de vértices do grafo.

# Complexidade computacional

Teorema: O problema single-minded da alocação ótima é NP-difícil.

Prova feita na aula.

É pior que isso: a redução preserva aproximação,
assim o problema herda a dificuldade do conjunto independente.

Teorema: Para todo $\epsilon > 0$, não existe $n^{1-\epsilon}$-aproximação
para o conjunto independente a menos que $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$,
onde $n$ é o número de vértices do grafo.

Como o número de arestas de um grafo é no máximo $n^2$,
e as arestas são os itens na redução, vale o seguinte:

# Complexidade computacional

Teorema: O problema single-minded da alocação ótima é NP-difícil.

Prova feita na aula.

É pior que isso: a redução preserva aproximação,
assim o problema herda a dificuldade do conjunto independente.

Teorema: Para todo $\epsilon > 0$, não existe $n^{1-\epsilon}$-aproximação
para o conjunto independente a menos que $P = NP$,
onde $n$ é o número de vértices do grafo.

Como o número de arestas de um grafo é no máximo $n^2$,
e as arestas são os itens na redução, vale o seguinte:

Teorema: Para todo $\epsilon > 0$, não existe $m^{1/2-\epsilon}$-aproximação para a alocação ótima a menos que $P = NP$, onde $m$ é o número de itens.

# Aproximação à prova de estratégia

Um algoritmo guloso...

# Aproximação à prova de estratégia

Um algoritmo guloso...

Guloso $(S, v, n)$

ordene os participantes de modo que
$$\frac{v_1}{\sqrt{|S_1|}} \geq \cdots \geq \frac{v_n}{\sqrt{|S_n|}}.$$
$W \leftarrow \emptyset$
**para** $i \leftarrow 1$ **até** $n$ **faça**
    **se** $S_i \cap \cup_{k \in W} S_k = \emptyset$
        **então** $W \leftarrow W \cup \{i\}$
**devolva** $W$

# Aproximação à prova de estratégia

Um algoritmo guloso...

Guloso $(S, v, n)$

1 ordene os participantes de modo que

$$\frac{v_1}{\sqrt{|S_1|}} \geq \cdots \geq \frac{v_n}{\sqrt{|S_n|}}.$$

2 $W \leftarrow \emptyset$

3 **para** $i \leftarrow 1$ **até** $n$ **faça**

4     **se** $S_i \cap \cup_{k \in W} S_k = \emptyset$

5         **então** $W \leftarrow W \cup \{i\}$

6 **devolva** $W$

Mas e os preços?

# Aproximação à prova de estratégia

Um algoritmo guloso...

Guloso $(S, v, n)$

ordene os participantes de modo que
$$\frac{v_1}{\sqrt{|S_1|}} \geq \cdots \geq \frac{v_n}{\sqrt{|S_n|}}.$$
$W \leftarrow \emptyset$
**para** $i \leftarrow 1$ **até** $n$ **faça**
    **se** $S_i \cap \cup_{k \in W} S_k = \emptyset$
        **então** $W \leftarrow W \cup \{i\}$
**devolva** $W$

Mas e os preços?

Infelizmente preços VCG podem não funcionar dado que a alocação produzida não é ótima.

# Aproximação à prova de estratégia

Guloso $(S, v, n)$

ordene $v$ e $S$ de modo que $\frac{v_1}{\sqrt{|S_1|}} \geq \cdots \geq \frac{v_n}{\sqrt{|S_n|}}$.
$W \leftarrow \emptyset$
**para** $i \leftarrow 1$ **até** $n$ **faça**
    **se** $S_i \cap \cup_{k \in W} S_k = \emptyset$
        **então** $p_i \leftarrow \text{PreçoCrítico}(S, v, n, i, W)$
            $W \leftarrow W \cup \{i\}$
        **senão** $p_i \leftarrow 0$
**devolva** $W$, $p$

# Aproximação à prova de estratégia

Guloso $(S, v, n)$

ordene $v$ e $S$ de modo que $\frac{v_1}{\sqrt{|S_1|}} \geq \cdots \geq \frac{v_n}{\sqrt{|S_n|}}$.
$W \leftarrow \emptyset$
**para** $i \leftarrow 1$ **até** $n$ **faça**
    **se** $S_i \cap \cup_{k \in W} S_k = \emptyset$
        **então** $p_i \leftarrow$ PreçoCrítico$(S, v, n, i, W)$
            $W \leftarrow W \cup \{i\}$
        **senão** $p_i \leftarrow 0$
**devolva** $W$, $p$

PreçoCrítico $(S, v, n, i, W)$

$W' \leftarrow W$
**para** $j \leftarrow i + 1$ **até** $n$ **faça**
    **se** $S_j \cap \cup_{k \in W'} S_k = \emptyset$
        **então se** $S_j \cap S_i \neq \emptyset$ **então devolva** $\frac{v_j}{\sqrt{|S_j|}} \sqrt{|S_i|}$
            $W' \leftarrow W' \cup \{j\}$
**devolva** 0

# Aproximação à prova de estratégia

Guloso $(S, v, n)$

```
ordene v e S de modo que v_1/√|S_1| ≥ ··· ≥ v_n/√|S_n|.
W ← ∅
para i ← 1 até n faça
    se S_i ∩ ∪_{k∈W} S_k = ∅
        então p_i ← PreçoCrítico(S, v, n, i, W)
              W ← W ∪ {i}
        senão p_i ← 0
devolva W, p
```

Preço $p_i$: valor limite que faz $i$ deixar de ganhar o leilão.

# Aproximação à prova de estratégia

Guloso $(S, v, n)$

ordene $v$ e $S$ de modo que $\frac{v_1}{\sqrt{|S_1|}} \geq \cdots \geq \frac{v_n}{\sqrt{|S_n|}}$.
$W \leftarrow \emptyset$
**para** $i \leftarrow 1$ **até** $n$ **faça**
    **se** $S_i \cap \cup_{k \in W} S_k = \emptyset$
        **então** $p_i \leftarrow$ PreçoCrítico$(S, v, n, i, W)$
            $W \leftarrow W \cup \{i\}$
        **senão** $p_i \leftarrow 0$
**devolva** $W$, $p$

Preço $p_i$: valor limite que faz $i$ deixar de ganhar o leilão.

Algoritmo obviamente polinomial.

# Aproximação à prova de estratégia

Guloso $(S, v, n)$

ordene $v$ e $S$ de modo que $\frac{v_1}{\sqrt{|S_1|}} \geq \cdots \geq \frac{v_n}{\sqrt{|S_n|}}$.
$W \leftarrow \emptyset$
**para** $i \leftarrow 1$ **até** $n$ **faça**
    **se** $S_i \cap \cup_{k \in W} S_k = \emptyset$
        **então** $p_i \leftarrow$ PreçoCrítico$(S, v, n, i, W)$
            $W \leftarrow W \cup \{i\}$
        **senão** $p_i \leftarrow 0$
**devolva** $W$, $p$

Preço $p_i$: valor limite que faz $i$ deixar de ganhar o leilão.

Algoritmo obviamente polinomial.

Resta mostrar que

- é uma $\sqrt{m}$-aproximação; (essencialmente o melhor que dá)
- é a prova de estratégia.

# Razão de aproximação

Teorema: Guloso é uma $\sqrt{m}$-aproximação.

# Razão de aproximação

Teorema: Guloso é uma $\sqrt{m}$-aproximação.

Prova: Seja $W^* \subseteq [n]$ uma solução ótima.

# Razão de aproximação

Teorema: Guloso é uma $\sqrt{m}$-aproximação.

Prova: Seja $W^* \subseteq [n]$ uma solução ótima.

Seja $W_i^* = \{j \in W^* \mid j \geq i \text{ e } S_j \cap S_i \neq \emptyset\}$ para cada $i \in W$.

# Razão de aproximação

Teorema: Guloso é uma $\sqrt{m}$-aproximação.

Prova: Seja $W^* \subseteq [n]$ uma solução ótima.

Seja $W_i^* = \{j \in W^* \mid j \geq i \text{ e } S_j \cap S_i \neq \emptyset\}$ para cada $i \in W$.

Note que $W^* \subseteq \bigcup_i W_i^*$.

# Razão de aproximação

Teorema: Guloso é uma $\sqrt{m}$-aproximação.

Prova: Seja $W^* \subseteq [n]$ uma solução ótima.

Seja $W_i^* = \{j \in W^* \mid j \geq i \text{ e } S_j \cap S_i \neq \emptyset\}$ para cada $i \in W$.

Note que $W^* \subseteq \bigcup_i W_i^*$.

Vamos provar que $\sum_{j \in W_i^*} v_j \leq v_i \sqrt{m}$.

# Razão de aproximação

Teorema: Guloso é uma $\sqrt{m}$-aproximação.

Prova: Seja $W^* \subseteq [n]$ uma solução ótima.

Seja $W_i^* = \{j \in W^* \mid j \geq i \text{ e } S_j \cap S_i \neq \emptyset\}$ para cada $i \in W$.

Note que $W^* \subseteq \bigcup_i W_i^*$.

Vamos provar que $\sum_{j \in W_i^*} v_j \leq v_i \sqrt{m}$.

Note que $v_j \leq \frac{v_i}{\sqrt{|S_i|}} \sqrt{|S_j|}$, logo

$$\sum_{j \in W_i^*} v_j \;\leq\; \frac{v_i}{\sqrt{|S_i|}} \sum_{j \in W_i^*} \sqrt{|S_j|}.$$

# Razão de aproximação

Teorema: Guloso é uma $\sqrt{m}$-aproximação.

Prova: Seja $W^* \subseteq [n]$ uma solução ótima.

Seja $W_i^* = \{j \in W^* \mid j \geq i \text{ e } S_j \cap S_i \neq \emptyset\}$ para cada $i \in W$.

Note que $W^* \subseteq \bigcup_i W_i^*$.

Vamos provar que $\sum_{j \in W_i^*} v_j \leq v_i \sqrt{m}$.

Note que $v_j \leq \frac{v_i}{\sqrt{|S_i|}} \sqrt{|S_j|}$, logo

$$\sum_{j \in W_i^*} v_j \;\leq\; \frac{v_i}{\sqrt{|S_i|}} \sum_{j \in W_i^*} \sqrt{|S_j|}.$$

Por Cauchy-Schwarz, $\sum_{j \in W_i^*} \sqrt{|S_j|} \leq \sqrt{|W_i^*|} \sqrt{\sum_{j \in W_i^*} |S_j|}$.

# Análise

Teorema: Guloso é uma $\sqrt{m}$-aproximação.

Prova: Seja $W^* \subseteq [n]$ uma solução ótima.

Seja $W_i^* = \{j \in W^* \mid j \geq i \text{ e } S_j \cap S_i \neq \emptyset\}$ para cada $i \in W$.

Note que $W^* \subseteq \bigcup_i W_i^*$ e vamos provar que $\sum_{j \in W_i^*} v_j \leq v_i \sqrt{m}$.
Por Cauchy-Schwarz e um pouco mais,

$$\sum_{j \in W_i^*} \sqrt{|S_j|} \;\leq\; \sqrt{|W_i^*|}\sqrt{\sum_{j \in W_i^*} |S_j|} \;\leq\; \sqrt{|S_i|}\sqrt{m}.$$

# Análise

Teorema: Guloso é uma $\sqrt{m}$-aproximação.

Prova: Seja $W^* \subseteq [n]$ uma solução ótima.

Seja $W_i^* = \{j \in W^* \mid j \geq i \text{ e } S_j \cap S_i \neq \emptyset\}$ para cada $i \in W$.

Note que $W^* \subseteq \bigcup_i W_i^*$ e vamos provar que $\sum_{j \in W_i^*} v_j \leq v_i \sqrt{m}$.
Por Cauchy-Schwarz e um pouco mais,

$$\sum_{j \in W_i^*} \sqrt{|S_j|} \;\leq\; \sqrt{|W_i^*|} \sqrt{\sum_{j \in W_i^*} |S_j|} \;\leq\; \sqrt{|S_i|}\sqrt{m}.$$

Portanto,

$$\sum_{j \in W_i^*} v_j \;\leq\; \frac{v_i}{\sqrt{|S_i|}} \sum_{j \in W_i^*} \sqrt{|S_j|} \;\leq\; v_i \sqrt{m},$$

# Análise

Teorema: Guloso é uma $\sqrt{m}$-aproximação.

Prova: Seja $W^* \subseteq [n]$ uma solução ótima.

Seja $W_i^* = \{j \in W^* \mid j \geq i \text{ e } S_j \cap S_i \neq \emptyset\}$ para cada $i \in W$.

Note que $W^* \subseteq \bigcup_i W_i^*$ e vamos provar que $\sum_{j \in W_i^*} v_j \leq v_i \sqrt{m}$.
Por Cauchy-Schwarz e um pouco mais,

$$\sum_{j \in W_i^*} \sqrt{|S_j|} \;\leq\; \sqrt{|W_i^*|}\sqrt{\sum_{j \in W_i^*} |S_j|} \;\leq\; \sqrt{|S_i|}\sqrt{m}.$$

Portanto,

$$\sum_{j \in W_i^*} v_j \;\leq\; \frac{v_i}{\sqrt{|S_i|}} \sum_{j \in W_i^*} \sqrt{|S_j|} \;\leq\; v_i \sqrt{m},$$

e então $\sum_{j \in W^*} v_j \leq \sqrt{m} \sum_{i \in W} v_i$. $\square$

# À prova de estratégia

Teorema: Guloso é à prova de estratégia.

# À prova de estratégia

Teorema: Guloso é à prova de estratégia.

Na verdade, vale o seguinte para o caso single-minded.

Lema: Um mecanismo no qual perdedores pagam zero é à prova de estratégia sse satisfaz as duas seguintes condições:

- **Monotonicidade:** participante que vence com aposta $(S_i, v_i)$ vence com aposta $(S_i', v_i')$ para todo $S_i' \subseteq S_i$ e $v_i' \geq v_i$.
- **Pagamento crítico:** participante vencedor paga o valor mínimo necessário para ele ganhar.

# À prova de estratégia

Teorema: Guloso é à prova de estratégia.

Na verdade, vale o seguinte para o caso single-minded.

Lema: Um mecanismo no qual perdedores pagam zero é
à prova de estratégia sse satisfaz as duas seguintes condições:

- **Monotonicidade:** participante que vence com aposta $(S_i, v_i)$ vence com aposta $(S_i', v_i')$ para todo $S_i' \subseteq S_i$ e $v_i' \geq v_i$.
- **Pagamento crítico:** participante vencedor paga o valor mínimo necessário para ele ganhar.

Note que o mecanismo do Guloso satisfaz essas condições.

# À prova de estratégia

Teorema: Guloso é à prova de estratégia.

Na verdade, vale o seguinte para o caso single-minded.

Lema: Um mecanismo no qual perdedores pagam zero é
à prova de estratégia sse satisfaz as duas seguintes condições:

- **Monotonicidade:** participante que vence com aposta $(S_i, v_i)$ vence com aposta $(S'_i, v'_i)$ para todo $S'_i \subseteq S_i$ e $v'_i \geq v_i$.
- **Pagamento crítico:** participante vencedor paga o valor mínimo necessário para ele ganhar.

Note que o mecanismo do Guloso satisfaz essas condições.

Prova só da volta: se satisfaz as condições, é à prova de estratégia.

# À prova de estratégia

Lema: Um mecanismo no qual perdedores pagam zero é à prova de estratégia sse satisfaz as duas seguintes condições:

- **Monotonicidade:** participante que vence com aposta $(S_i, v_i)$ vence com aposta $(S'_i, v'_i)$ para todo $S'_i \subseteq S_i$ e $v'_i \geq v_i$.
- **Pagamento crítico:** participante vencedor paga o valor mínimo necessário para ele ganhar.

Prova da volta:

# À prova de estratégia

Lema: Um mecanismo no qual perdedores pagam zero é à prova de estratégia sse satisfaz as duas seguintes condições:

- **Monotonicidade:** participante que vence com aposta $(S_i, v_i)$ vence com aposta $(S'_i, v'_i)$ para todo $S'_i \subseteq S_i$ e $v'_i \geq v_i$.
- **Pagamento crítico:** participante vencedor paga o valor mínimo necessário para ele ganhar.

Prova da volta:

Participante cuja aposta $(S, v)$ é verdadeira tem utilidade $\geq 0$.

# À prova de estratégia

Lema: Um mecanismo no qual perdedores pagam zero é à prova de estratégia sse satisfaz as duas seguintes condições:

- **Monotonicidade:** participante que vence com aposta $(S_i, v_i)$ vence com aposta $(S'_i, v'_i)$ para todo $S'_i \subseteq S_i$ e $v'_i \geq v_i$.
- **Pagamento crítico:** participante vencedor paga o valor mínimo necessário para ele ganhar.

Prova da volta:

Participante cuja aposta $(S, v)$ é verdadeira tem utilidade $\geq 0$.

Se aposta $(S', v')$ e perde, certamente não melhora sua utilidade.

# À prova de estratégia

Lema: Um mecanismo no qual perdedores pagam zero é à prova de estratégia sse satisfaz as duas seguintes condições:

- **Monotonicidade:** participante que vence com aposta $(S_i, v_i)$ vence com aposta $(S'_i, v'_i)$ para todo $S'_i \subseteq S_i$ e $v'_i \geq v_i$.
- **Pagamento crítico:** participante vencedor paga o valor mínimo necessário para ele ganhar.

Prova da volta:

Participante cuja aposta $(S, v)$ é verdadeira tem utilidade $\geq 0$.

Se aposta $(S', v')$ e perde, certamente não melhora sua utilidade.

Se ganha mas $S \not\subseteq S'$, também não melhora sua utilidade.

# À prova de estratégia

Lema: Um mecanismo no qual perdedores pagam zero é à prova de estratégia sse satisfaz as duas seguintes condições:

- **Monotonicidade:** participante que vence com aposta $(S_i, v_i)$ vence com aposta $(S'_i, v'_i)$ para todo $S'_i \subseteq S_i$ e $v'_i \geq v_i$.
- **Pagamento crítico:** participante vencedor paga o valor mínimo necessário para ele ganhar.

Prova da volta:

Participante cuja aposta $(S, v)$ é verdadeira tem utilidade $\geq 0$.

Se aposta $(S', v')$ e perde, certamente não melhora sua utilidade.

Se ganha mas $S \not\subseteq S'$, também não melhora sua utilidade.

Assuma então que ele aposta $(S', v')$ com $S \subseteq S'$ e ganha.

# À prova de estratégia

Lema: Um mecanismo no qual perdedores pagam zero é à prova de estratégia sse satisfaz as duas seguintes condições:

- **Monotonicidade:** participante que vence com aposta $(S_i, v_i)$ vence com aposta $(S'_i, v'_i)$ para todo $S'_i \subseteq S_i$ e $v'_i \geq v_i$.
- **Pagamento crítico:** participante vencedor paga o valor mínimo necessário para ele ganhar.

Prova da volta:

Participante cuja aposta $(S, v)$ é verdadeira.

Assuma que ele aposta $(S', v')$ com $S \subseteq S'$ e ganha.

# À prova de estratégia

Lema: Um mecanismo no qual perdedores pagam zero é à prova de estratégia sse satisfaz as duas seguintes condições:

- **Monotonicidade:** participante que vence com aposta $(S_i, v_i)$ vence com aposta $(S_i', v_i')$ para todo $S_i' \subseteq S_i$ e $v_i' \geq v_i$.
- **Pagamento crítico:** participante vencedor paga o valor mínimo necessário para ele ganhar.

Prova da volta:

Participante cuja aposta $(S, v)$ é verdadeira.

Assuma que ele aposta $(S', v')$ com $S \subseteq S'$ e ganha.

Pela monotonicidade, ele continua ganhando se apostar $(S, v')$.

# À prova de estratégia

Lema: Um mecanismo no qual perdedores pagam zero é à prova de estratégia sse satisfaz as duas seguintes condições:

- **Monotonicidade:** participante que vence com aposta $(S_i, v_i)$ vence com aposta $(S'_i, v'_i)$ para todo $S'_i \subseteq S_i$ e $v'_i \geq v_i$.
- **Pagamento crítico:** participante vencedor paga o valor mínimo necessário para ele ganhar.

Prova da volta:

Participante cuja aposta $(S, v)$ é verdadeira.

Assuma que ele aposta $(S', v')$ com $S \subseteq S'$ e ganha.

Pela monotonicidade, ele continua ganhando se apostar $(S, v')$.

Seja $p$ o preço que paga ao apostar $(S, v')$
e $p'$ o preço que paga ao apostar $(S', v')$.

# À prova de estratégia

Lema: Um mecanismo no qual perdedores pagam zero é à prova de estratégia sse satisfaz as duas seguintes condições:

- **Monotonicidade:** participante que vence com aposta $(S_i, v_i)$ vence com aposta $(S'_i, v'_i)$ para todo $S'_i \subseteq S_i$ e $v'_i \geq v_i$.
- **Pagamento crítico:** participante vencedor paga o valor mínimo necessário para ele ganhar.

Prova da volta:

Participante cuja aposta $(S, v)$ é verdadeira.

Assuma que ele aposta $(S', v')$ com $S \subseteq S'$ e ganha.

Pela monotonicidade, ele continua ganhando se apostar $(S, v')$.

Seja $p$ o preço que paga ao apostar $(S, v')$
e $p'$ o preço que paga ao apostar $(S', v')$.

Por monotonicidade, $p \leq p'$ logo não paga mais se apostar $(S, v')$.

# À prova de estratégia

Lema: Um mecanismo no qual perdedores pagam zero é à prova de estratégia sse satisfaz as duas seguintes condições:

- **Monotonicidade:** participante que vence com aposta $(S_i, v_i)$ vence com aposta $(S'_i, v'_i)$ para todo $S'_i \subseteq S_i$ e $v'_i \geq v_i$.
- **Pagamento crítico:** participante vencedor paga o valor mínimo necessário para ele ganhar.

Prova da volta:

Participante cuja aposta $(S, v)$ é verdadeira.
Assuma que ele aposta $(S, v')$ e ganha.

# À prova de estratégia

Lema: Um mecanismo no qual perdedores pagam zero é à prova de estratégia sse satisfaz as duas seguintes condições:

- **Monotonicidade:** participante que vence com aposta $(S_i, v_i)$ vence com aposta $(S'_i, v'_i)$ para todo $S'_i \subseteq S_i$ e $v'_i \geq v_i$.
- **Pagamento crítico:** participante vencedor paga o valor mínimo necessário para ele ganhar.

Prova da volta:

Participante cuja aposta $(S, v)$ é verdadeira.
Assuma que ele aposta $(S, v')$ e ganha.

Seja $p'$ o preço que paga ao apostar $(S, v')$.

# À prova de estratégia

Lema: Um mecanismo no qual perdedores pagam zero é à prova de estratégia sse satisfaz as duas seguintes condições:

- **Monotonicidade:** participante que vence com aposta $(S_i, v_i)$ vence com aposta $(S_i', v_i')$ para todo $S_i' \subseteq S_i$ e $v_i' \geq v_i$.
- **Pagamento crítico:** participante vencedor paga o valor mínimo necessário para ele ganhar.

Prova da volta:

Participante cuja aposta $(S, v)$ é verdadeira.
Assuma que ele aposta $(S, v')$ e ganha.

Seja $p'$ o preço que paga ao apostar $(S, v')$.

Se perde apostando $(S, v)$, então $v < p'$,
e a utilidade apostando $(S, v')$ seria negativa.

# À prova de estratégia

Lema: Um mecanismo no qual perdedores pagam zero é à prova de estratégia sse satisfaz as duas seguintes condições:

- **Monotonicidade:** participante que vence com aposta $(S_i, v_i)$ vence com aposta $(S'_i, v'_i)$ para todo $S'_i \subseteq S_i$ e $v'_i \geq v_i$.
- **Pagamento crítico:** participante vencedor paga o valor mínimo necessário para ele ganhar.

Prova da volta:

Participante cuja aposta $(S, v)$ é verdadeira.
Assuma que ele aposta $(S, v')$ e ganha.

Seja $p'$ o preço que paga ao apostar $(S, v')$.

Se perde apostando $(S, v)$, então $v < p'$,
e a utilidade apostando $(S, v')$ seria negativa.

Se ganha apostando $(S, v)$, também paga $p'$.