Mecanismos

n: número de participantes

A: conjunto de alternativas

$v_i : A \to \boldsymbol{R}$ valoração das alternativas para i

$V_i \subseteq \boldsymbol{R}^A$: conjunto das possíveis valorações de i

Mecanismo: função de escolha social $f : V_1 \times \cdots \times V_n \to A$ e vetor de preços $p_1, \ldots, p_n$ que cada participante paga, onde $p_i : V_1 \times \cdots \times V_n \to \boldsymbol{R}$.

Mecanismo (f, p) é à prova de estratégia se, para todo i, e todo $v_1, \ldots, v_n$ e v_i', para $a = f(v_{-i}, v_i)$ e $a' = f(v_{-i}, v_i')$, vale que $v_i(a) - p_i(v_{-i}, v_i) \geq v_i(a') - p_i(v_{-i}, v_i')$.

O valor $v_i(a) - p_i(v_1, \ldots, v_n)$ é a utilidade de i para $v_1, \ldots, v_n$.

Unicidade dos preços

Proposição: Um mecanismo é à prova de estratégia sse satisfaz as seguintes condições para todo i e v_{-i}:

(a) Para todo $a \in A$, existe preço p_a tq $p_i(v_i, v_{-i}) = p_a$ para todo v_i com $f(v_i, v_{-i}) = a$.

(b) Para todo v_i, $f(v_i, v_{-i}) \in \arg\max\{v_i(a) - p_a\}$, onde o max é sobre alternativas da imagem de $f(\cdot, v_{-i})$.

Teorema: Se cada V_i é conexo no espaço Euclideano e (f, p) é à prova de estratégia, então qq mecanismo (f, p') é à prova de estratégia sse existem $h_i : V_{-i} \to \boldsymbol{R}$ tq $p'_i(v_1, \ldots, v_n) = p_i(v_1, \ldots, v_n) + h_i(v_{-i})$ para toda $v_1, \ldots, v_n$.

Prova feita na aula.

Teorema de Gibbard-Satterthwaite

Teorema de Gibbard-Satterthwaite: Se f é uma função de escolha social à prova de estratégia sobre A, com $|A| \geq 3$, então f é uma ditadura.

Teorema de Gibbard-Satterthwaite

Teorema de Gibbard-Satterthwaite: Se f é uma função de escolha social à prova de estratégia sobre A, com $|A| \geq 3$, então f é uma ditadura.

Dinheiro pode ser usado para driblar o teorema acima.

Teorema de Gibbard-Satterthwaite

Teorema de Gibbard-Satterthwaite: Se f é uma função de escolha social à prova de estratégia sobre A, com $|A| \geq 3$, então f é uma ditadura.

Dinheiro pode ser usado para driblar o teorema acima.

Nem sempre dinheiro pode ser usado como compensação:
por razões éticas ou considerações institucionais
(decisões políticas, doações de orgãos, etc)

Teorema de Gibbard-Satterthwaite

Teorema de Gibbard-Satterthwaite: Se f é uma função de escolha social à prova de estratégia sobre A, com $|A| \geq 3$, então f é uma ditadura.

Dinheiro pode ser usado para driblar o teorema acima.

Nem sempre dinheiro pode ser usado como compensação:
por razões éticas ou considerações institucionais
(decisões políticas, doações de orgãos, etc)

Consideraremos situações
onde a preferência dos participantes é restrita de algum modo.
(De modo que o teorema não se aplique,
e tenhamos mecanismos à prova de estratégia interessantes.)

Preferências de pico único

Como escolher a temperatura do AC
num ambiente de trabalho com muitas pessoas?

Preferências de pico único

Como escolher a temperatura do AC
num ambiente de trabalho com muitas pessoas?

Considere $A = [0, 1]$ (conjunto de possíveis escolhas).

Preferências de pico único

Como escolher a temperatura do AC
num ambiente de trabalho com muitas pessoas?

Considere $A = [0, 1]$ (conjunto de possíveis escolhas).

Cada indivíduo tem uma preferência $\succ_i$ sobre A.

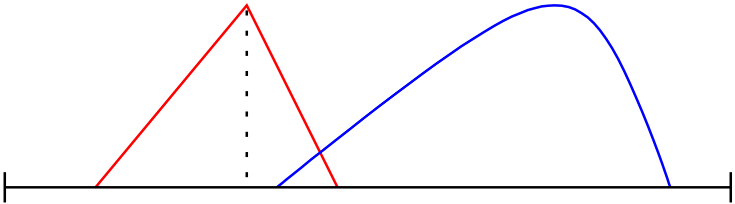
Preferências de pico único

Como escolher a temperatura do AC
num ambiente de trabalho com muitas pessoas?

Considere $A = [0, 1]$ (conjunto de possíveis escolhas).

Cada indivíduo tem uma preferência $\succ_i$ sobre A.

$\succ_i$ é de pico único se existe $p_i \in A$ tq,
para todo $x \in A \setminus \{p_i\}$ e $\lambda \in [0, 1)$,
$\lambda x + (1 - \lambda) p_i \succ_i x$.



Preferências de pico único

Como escolher a temperatura do AC
num ambiente de trabalho com muitas pessoas?

Considere $A = [0, 1]$ (conjunto de possíveis escolhas).

Cada indivíduo tem uma preferência $\succ_i$ sobre A.

$\succ_i$ é de pico único se existe $p_i \in A$ tq,
para todo $x \in A \setminus \{p_i\}$ e $\lambda \in [0, 1)$,
$\lambda\, x + (1 - \lambda)\, p_i \succ_i x$.

$\mathcal{R}$: coleção das preferências com pico único.

Preferências de pico único

Como escolher a temperatura do AC
num ambiente de trabalho com muitas pessoas?

Considere $A = [0, 1]$ (conjunto de possíveis escolhas).

Cada indivíduo tem uma preferência $\succ_i$ sobre A.

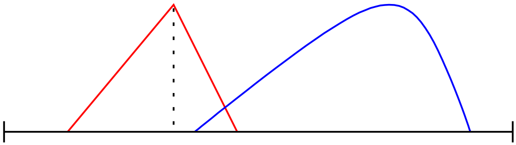
$\succ_i$ é de pico único se existe $p_i \in A$ tq,
para todo $x \in A \setminus \{p_i\}$ e $\lambda \in [0, 1)$,
$\lambda\, x + (1 - \lambda)\, p_i \succ_i x$.

$\mathcal{R}$: coleção das preferências com pico único.

Mecanismo $f : \mathcal{R}^n \to A$ é à prova de estratégia se declarar
a sua real preferência é uma estratégia (fracamente) dominante.

Preferências de pico único

$\succ_i$ é de pico único se existe $p_i \in A$ tq,
para todo $x \in A \setminus \{p_i\}$ e $\lambda \in [0, 1)$,
$\lambda\, x + (1 - \lambda)\, p_i \succ_i x$.

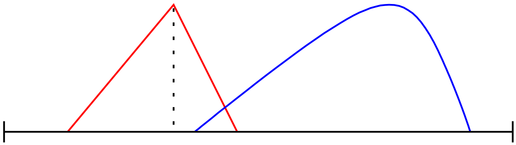


$\mathcal{R}$: coleção das preferências com pico único.

Mecanismo $f : \mathcal{R}^n \to A$ é à prova de estratégia:
preferência real é estratégia (fracamente) dominante.

Preferências de pico único

$\succ_i$ é de pico único se existe $p_i \in A$ tq,
para todo $x \in A \setminus \{p_i\}$ e $\lambda \in [0, 1)$,
$\lambda\, x + (1 - \lambda)\, p_i \succ_i x$.



$\mathcal{R}$: coleção das preferências com pico único.

Mecanismo $f : \mathcal{R}^n \to A$ é à prova de estratégia:
preferência real é estratégia (fracamente) dominante.

Vamos mostrar
um universo rico de mecanismos à prova de estratégia.

Definições

Considere um mecanismo $f : \mathcal{R}^n \to A$.

$\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n) \in \mathcal{R}^n, \quad p_i$ pico de $\succ_i$

Definições

Considere um mecanismo $f : \mathcal{R}^n \to A$.

$\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n) \in \mathcal{R}^n, \quad p_i$ pico de $\succ_i$

f é sobrejetor se existe $\succ$ tq $f(\succ) = x$ para todo $x \in A$.

Definições

Considere um mecanismo $f : \mathcal{R}^n \to A$.

$\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n) \in \mathcal{R}^n, \quad p_i$ pico de $\succ_i$

f é sobrejetor se existe $\succ$ tq $f(\succ) = x$ para todo $x \in A$.

f é unânime se $f(\succ) = x$ sempre que $p_i = x$ para todo i.

Definições

Considere um mecanismo $f : \mathcal{R}^n \to A$.

$\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n) \in \mathcal{R}^n, \quad p_i$ pico de $\succ_i$

f é sobrejetor se existe $\succ$ tq $f(\succ) = x$ para todo $x \in A$.

f é unânime se $f(\succ) = x$ sempre que $p_i = x$ para todo i.

Se f é unânime, então f é sobrejetor.

Definições

Considere um mecanismo $f : \mathcal{R}^n \to A$.

$\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n) \in \mathcal{R}^n, \quad p_i$ pico de $\succ_i$

f é sobrejetor se existe $\succ$ tq $f(\succ) = x$ para todo $x \in A$.

f é unânime se $f(\succ) = x$ sempre que $p_i = x$ para todo i.

Se f é unânime, então f é sobrejetor.

f é Pareto-ótimo se, para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$,
não existe $x \in A$ tq $x \succ_i f(\succ)$ para todo i.

Definições

Considere um mecanismo $f : \mathcal{R}^n \to A$.

$\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n) \in \mathcal{R}^n$, p_i pico de $\succ_i$

f é sobrejetor se existe $\succ$ tq $f(\succ) = x$ para todo $x \in A$.

f é unânime se $f(\succ) = x$ sempre que $p_i = x$ para todo i.

Se f é unânime, então f é sobrejetor.

f é Pareto-ótimo se, para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$,
não existe $x \in A$ tq $x \succ_i f(\succ)$ para todo i.

Se f é Pareto-ótimo, então f é unânime.

Equivalência das condições

f é sobrejetor se existe $\succ$ tq $f(\succ) = x$ para todo $x \in A$.

f é unânime se $f(\succ) = x$ sempre que $p_i = x$ para todo i.

f é Pareto-ótimo se, para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$,
não existe $x \in A$ tq $x \succ_i f(\succ)$ para todo i.

Equivalência das condições

f é sobrejetor se existe $\succ$ tq $f(\succ) = x$ para todo $x \in A$.

f é unânime se $f(\succ) = x$ sempre que $p_i = x$ para todo i.

f é Pareto-ótimo se, para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$,
não existe $x \in A$ tq $x \succ_i f(\succ)$ para todo i.

Lema: Seja f à prova de estratégia.
Vale que f é sobrejetora sse f é unânime sse f é Pareto-ótimo.

Equivalência das condições

f é sobrejetor se existe $\succ$ tq $f(\succ) = x$ para todo $x \in A$.

f é unânime se $f(\succ) = x$ sempre que $p_i = x$ para todo i.

f é Pareto-ótimo se, para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$,
não existe $x \in A$ tq $x \succ_i f(\succ)$ para todo i.

Lema: Seja f à prova de estratégia.
Vale que f é sobrejetora sse f é unânime sse f é Pareto-ótimo.

Prova feita na aula.

Mecanismo à prova de estratégia

Dadas as preferências $\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n)$, com picos $p_1, \ldots, p_n$, seja $f(\succ)$ a mediana dos p_i's.

Mecanismo à prova de estratégia

Dadas as preferências $\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n)$, com picos $p_1, \ldots, p_n$, seja $f(\succ)$ a mediana dos p_i's.

Note que tal mecanismo é à prova de estratégia!

Mecanismo à prova de estratégia

Dadas as preferências $\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n)$, com picos $p_1, \ldots, p_n$, seja $f(\succ)$ a mediana dos p_i's.

Note que tal mecanismo é à prova de estratégia!

Para todo $k \in [n]$,
tomar $f(\succ)$ como o k-ésimo p_i é à prova de estratégia.

Mecanismo à prova de estratégia

Dadas as preferências $\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n)$, com picos $p_1, \ldots, p_n$, seja $f(\succ)$ a mediana dos p_i's.

Note que tal mecanismo é à prova de estratégia!

Para todo $k \in [n]$,
tomar $f(\succ)$ como o k-ésimo p_i é à prova de estratégia.

Em contraposição, tomar $f(\succ)$ como
a média dos p_i's não é à prova de estratégia!

Mecanismo à prova de estratégia

Dadas as preferências $\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n)$, com picos $p_1, \ldots, p_n$, seja $f(\succ)$ a mediana dos p_i's.

Note que tal mecanismo é à prova de estratégia!

Para todo $k \in [n]$,
tomar $f(\succ)$ como o k-ésimo p_i é à prova de estratégia.

Em contraposição, tomar $f(\succ)$ como
a média dos p_i's não é à prova de estratégia!

Qualquer média ponderada não é à prova de estratégia,
a menos que seja uma ditadura.

Mecanismos de estatísticas de ordem

Dadas as preferências $\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n)$, com picos $p_1, \ldots, p_n$, seja $f(\succ)$ a mediana dos p_i's.

Para todo $k \in [n]$,
tomar $f(\succ)$ como o k-ésimo p_i é à prova de estratégia.

Mecanismos de estatísticas de ordem

Dadas as preferências $\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n)$, com picos $p_1, \ldots, p_n$, seja $f(\succ)$ a mediana dos p_i's.

Para todo $k \in [n]$,
tomar $f(\succ)$ como o k-ésimo p_i é à prova de estratégia.

Tais mecanismos são à prova de estratégia!

Mecanismos de estatísticas de ordem

Dadas as preferências $\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n)$, com picos $p_1, \ldots, p_n$, seja $f(\succ)$ a mediana dos p_i's.

Para todo $k \in [n]$,
tomar $f(\succ)$ como o k-ésimo p_i é à prova de estratégia.

Tais mecanismos são à prova de estratégia!

Ademais, tais mecanismos só dependem dos p_i's,
e não da $\succ_i$ completa.

Mecanismos de estatísticas de ordem

Dadas as preferências $\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n)$, com picos $p_1, \ldots, p_n$, seja $f(\succ)$ a mediana dos p_i's.

Para todo $k \in [n]$,
tomar $f(\succ)$ como o k-ésimo p_i é à prova de estratégia.

Tais mecanismos são à prova de estratégia!

Ademais, tais mecanismos só dependem dos p_i's,
e não da $\succ_i$ completa.

Vamos mostrar que todo mecanismo sobrejetor
à prova de estratégia só depende dos p_i's.

Generalização

Para as preferências $\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n)$,
sejam $p_1, \ldots, p_n$ os picos correspondentes.

Generalização

Para as preferências $\succ = (\succ_1, \dots, \succ_n)$,
sejam $p_1, \dots, p_n$ os picos correspondentes.

Sejam $y_1, \dots, y_{n-1}$ valores em $A = [0, 1]$.

Generalização

Para as preferências $\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n)$,
sejam $p_1, \ldots, p_n$ os picos correspondentes.

Sejam $y_1, \ldots, y_{n-1}$ valores em $A = [0, 1]$.

Seja $f(\succ)$ a mediana do conjunto $\{p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1}\}$.

Generalização

Para as preferências $\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n)$,
sejam $p_1, \ldots, p_n$ os picos correspondentes.

Sejam $y_1, \ldots, y_{n-1}$ valores em $A = [0, 1]$.

Seja $f(\succ)$ a mediana do conjunto $\{p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1}\}$.

Note que f é à prova de estratégia!

Generalização

Para as preferências $\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n)$,
sejam $p_1, \ldots, p_n$ os picos correspondentes.

Sejam $y_1, \ldots, y_{n-1}$ valores em $A = [0, 1]$.

Seja $f(\succ)$ a mediana do conjunto $\{p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1}\}$.

Note que f é à prova de estratégia!

Estes são todos os mecanismos "anônimos"
sobrejetores à prova de estratégia.

Generalização

Para as preferências $\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n)$,
sejam $p_1, \ldots, p_n$ os picos correspondentes.

Sejam $y_1, \ldots, y_{n-1}$ valores em $A = [0, 1]$.

Seja $f(\succ)$ a mediana do conjunto $\{p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1}\}$.

Note que f é à prova de estratégia!

Estes são todos os mecanismos "anônimos"
sobrejetores à prova de estratégia.

Anônimo: $f(\succ) = f(\succ')$ para toda permutação $\succ'$ de $\succ$.

Generalização

Para as preferências $\succ = (\succ_1, \dots, \succ_n)$,
sejam $p_1, \dots, p_n$ os picos correspondentes.

Sejam $y_1, \dots, y_{n-1}$ valores em $A = [0, 1]$.

Seja $f(\succ)$ a mediana do conjunto $\{p_1, \dots, p_n, y_1, \dots, y_{n-1}\}$.

f é à prova de estratégia!

Generalização

Para as preferências $\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n)$,
sejam $p_1, \ldots, p_n$ os picos correspondentes.

Sejam $y_1, \ldots, y_{n-1}$ valores em $A = [0, 1]$.

Seja $f(\succ)$ a mediana do conjunto $\{p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1}\}$.

f é à prova de estratégia!

Teorema: Um mecanismo f é à prova de estratégia, sobrejetor e anônimo sse existem $y_1, \ldots, y_{n-1} \in A$ tq $f(\succ) \; = \; \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$ para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$.

Generalização

Para as preferências $\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n)$, sejam $p_1, \ldots, p_n$ os picos correspondentes.

Sejam $y_1, \ldots, y_{n-1}$ valores em $A = [0, 1]$.

Seja $f(\succ)$ a mediana do conjunto $\{p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1}\}$.

f é à prova de estratégia!

Teorema: Um mecanismo f é à prova de estratégia, sobrejetor e anônimo sse existem $y_1, \ldots, y_{n-1} \in A$ tq $f(\succ) \;=\; \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$ para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$.

Prova esboçada na aula.

Sem anonimato

Um mecanismo é um esquema generalizado de mediana se existem 2^n pontos $\{\alpha_S : S \subseteq [n]\}$ em $[0, 1]$ tais que

(a) $S \subseteq T \subseteq [n]$ implica que $\alpha_S \leq \alpha_T$;

(b) $\alpha_\emptyset = 0$ e $\alpha_{[n]} = 1$;

(c) $f(\succ) = \max_{S \subseteq [n]} \min\{\alpha_S, p_i : i \in S\}$ para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$.

Sem anonimato

Um mecanismo é um esquema generalizado de mediana se existem 2^n pontos $\{\alpha_S : S \subseteq [n]\}$ em $[0,1]$ tais que

(a) $S \subseteq T \subseteq [n]$ implica que $\alpha_S \leq \alpha_T$;

(b) $\alpha_\emptyset = 0$ e $\alpha_{[n]} = 1$;

(c) $f(\succ) = \max_{S \subseteq [n]} \min\{\alpha_S, p_i : i \in S\}$ para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$.

Condição (a) é desnecessária.

Sem anonimato

Um mecanismo é um esquema generalizado de mediana
se existem 2^n pontos $\{\alpha_S : S \subseteq [n]\}$ em $[0,1]$ tais que

(a) $S \subseteq T \subseteq [n]$ implica que $\alpha_S \leq \alpha_T$;

(b) $\alpha_\emptyset = 0$ e $\alpha_{[n]} = 1$;

(c) $f(\succ) = \max_{S \subseteq [n]} \min\{\alpha_S, p_i : i \in S\}$ para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$.

Condição (a) é desnecessária.

Condição (b) apenas garante que f é sobrejetor.

Sem anonimato

Um mecanismo é um esquema generalizado de mediana
se existem 2^n pontos $\{\alpha_S : S \subseteq [n]\}$ em $[0,1]$ tais que

(a) $S \subseteq T \subseteq [n]$ implica que $\alpha_S \leq \alpha_T$;

(b) $\alpha_\emptyset = 0$ e $\alpha_{[n]} = 1$;

(c) $f(\succ) = \max_{S \subseteq [n]} \min\{\alpha_S, p_i : i \in S\}$ para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$.

Condição (a) é desnecessária.

Condição (b) apenas garante que f é sobrejetor.

Teorema: Um mecanismo f é à prova de estratégia
e sobrejetor sse for um esquema generalizado de mediana.