Mecanismos

n: número de participantes

A: conjunto de alternativas

$v_i : A \to \mathbb{R}$ valoração das alternativas para i

$V_i \subseteq \mathbb{R}^A$: conjunto das possíveis valorações de i

Mecanismos

n: número de participantes

A: conjunto de alternativas

$v_i : A \to \mathbb{R}$ valoração das alternativas para i

$V_i \subseteq \mathbb{R}^A$: conjunto das possíveis valorações de i

Mecanismo: função de escolha social $f : V_1 \times \cdots \times V_n \to A$ e vetor de preços $p_1, \ldots, p_n$ que cada participante paga, onde $p_i : V_1 \times \cdots \times V_n \to \mathbb{R}$.

Mecanismos

n: número de participantes

A: conjunto de alternativas

$v_i : A \to \mathbb{R}$ valoração das alternativas para i

$V_i \subseteq \mathbb{R}^A$: conjunto das possíveis valorações de i

Mecanismo: função de escolha social $f : V_1 \times \cdots \times V_n \to A$ e vetor de preços $p_1, \ldots, p_n$ que cada participante paga, onde $p_i : V_1 \times \cdots \times V_n \to \mathbb{R}$.

Mecanismo (f, p) é à prova de estratégia se, para todo i, e todo $v_1, \ldots, v_n$ e v_i', para $a = f(v_{-i}, v_i)$ e $a' = f(v_{-i}, v_i')$, vale que $v_i(a) - p_i(v_{-i}, v_i) \geq v_i(a') - p_i(v_{-i}, v_i')$.

Mecanismos

n: número de participantes

A: conjunto de alternativas

$v_i : A \to \mathbb{R}$ valoração das alternativas para i

$V_i \subseteq \mathbb{R}^A$: conjunto das possíveis valorações de i

Mecanismo: função de escolha social $f : V_1 \times \cdots \times V_n \to A$
e vetor de preços $p_1, \ldots, p_n$ que cada participante paga,
onde $p_i : V_1 \times \cdots \times V_n \to \mathbb{R}$.

Mecanismo (f, p) é à prova de estratégia se, para todo i,
e todo $v_1, \ldots, v_n$ e v'_i, para $a = f(v_{-i}, v_i)$ e $a' = f(v_{-i}, v'_i)$,
vale que $v_i(a) - p_i(v_{-i}, v_i) \geq v_i(a') - p_i(v_{-i}, v'_i)$.

O valor $v_i(a) - p_i(v_1, \ldots, v_n)$ é a utilidade de i para $v_1, \ldots, v_n$.

Exemplo

Leilão de Vickrey:

Cada comprador dá um lance em um envelope.

Ganha o maior lance, e paga o segundo maior lance.

Exemplo

Leilão de Vickrey:
Cada comprador dá um lance em um envelope.
Ganha o maior lance, e paga o segundo maior lance.

n: número de compradores

$A = [n]$ (ganhador)

Valoração: valor v_i $\quad (v_a(a) = v_a$ e $v_i(a) = 0$ se $i \neq a)$.

Exemplo

Leilão de Vickrey:
Cada comprador dá um lance em um envelope.
Ganha o maior lance, e paga o segundo maior lance.

n: número de compradores

$A = [n]$ (ganhador)

Valoração: valor v_i $\quad (v_a(a) = v_a$ e $v_i(a) = 0$ se $i \neq a)$.

Lance: valor ℓ_i.

Ganhador: a tal que $\ell_a = \max\{\ell_i : i \in [n]\}$.

Exemplo

Leilão de Vickrey:
Cada comprador dá um lance em um envelope.
Ganha o maior lance, e paga o segundo maior lance.

n: número de compradores

$A = [n]$ (ganhador)

Valoração: valor v_i $\quad (v_a(a) = v_a$ e $v_i(a) = 0$ se $i \neq a)$.

Lance: valor ℓ_i.

Ganhador: a tal que $\ell_a = \max\{\ell_i : i \in [n]\}$.

Preços: para cada i em $[n]$, $p_i(a) = 0$ se $i \neq a$ e $p_a(a) = \ell_b$,
onde $\ell_b = \max\{\ell_i : i \in [n], i \neq a\}$ (segundo maior lance).

Exemplo

Leilão de Vickrey:
Cada comprador dá um lance em um envelope.
Ganha o maior lance, e paga o segundo maior lance.

n: número de compradores

$A = [n]$ (ganhador)

Valoração: valor v_i $\quad (v_a(a) = v_a$ e $v_i(a) = 0$ se $i \neq a)$.

Lance: valor ℓ_i.

Ganhador: a tal que $\ell_a = \max\{\ell_i : i \in [n]\}$.

Preços: para cada i em $[n]$, $p_i(a) = 0$ se $i \neq a$ e $p_a(a) = \ell_b$,
onde $\ell_b = \max\{\ell_i : i \in [n], i \neq a\}$ (segundo maior lance).

É à prova de estratégia ou não?

Exemplo: Leilão de Vickrey

n: número de compradores
$A = [n]$ (ganhador)
Valoração: valor v_i.

Ganhador: a tal que $v_a = \max\{v_i : i \in [n]\}$.

Preços: para cada i em $[n]$, $p_i(a) = 0$ se $i \neq a$ e $p_a(a) = v_b$,
onde $v_b = \max\{v_i : i \in [n], i \neq a\}$ (segundo maior lance).

É à prova de estratégia ou não?

Exemplo: Leilão de Vickrey

n: número de compradores
$A = [n]$ (ganhador)
Valoração: valor v_i.

Ganhador: a tal que $v_a = \max\{v_i : i \in [n]\}$.

Preços: para cada i em $[n]$, $p_i(a) = 0$ se $i \neq a$ e $p_a(a) = v_b$, onde $v_b = \max\{v_i : i \in [n], i \neq a\}$ (segundo maior lance).

É à prova de estratégia ou não?

Seja v'_i um lance distinto de v_i e a' o ganhador para v_{-i}, v'_i.

Exemplo: Leilão de Vickrey

n: número de compradores
$A = [n]$ (ganhador)
Valoração: valor v_i.

Ganhador: a tal que $v_a = \max\{v_i : i \in [n]\}$.

Preços: para cada i em $[n]$, $p_i(a) = 0$ se $i \neq a$ e $p_a(a) = v_b$,
onde $v_b = \max\{v_i : i \in [n], i \neq a\}$ (segundo maior lance).

É à prova de estratégia ou não?

Seja v_i' um lance distinto de v_i e a' o ganhador para v_{-i}, v_i'.

Vamos mostrar que $v_i(a) - p_i(v_{-i}, v_i) \geq v_i(a') - p_i(v_{-i}, v_i')$.

Exemplo: Leilão de Vickrey

n: número de compradores
$A = [n]$ (ganhador)
Valoração: valor v_i.

Ganhador: a tal que $v_a = \max\{v_i : i \in [n]\}$.

Preços: para cada i em $[n]$, $p_i(a) = 0$ se $i \neq a$ e $p_a(a) = v_b$, onde $v_b = \max\{v_i : i \in [n], i \neq a\}$ (segundo maior lance).

É à prova de estratégia ou não?

Seja v_i' um lance distinto de v_i e a' o ganhador para v_{-i}, v_i'.

Vamos mostrar que $v_i(a) - p_i(v_{-i}, v_i) \geq v_i(a') - p_i(v_{-i}, v_i')$.

Divida em dois casos: $v_i' \geq v_i$ e $v_i' \leq v_i$.

Exemplo: Leilão de Vickrey

n: número de compradores
$A = [n]$ (ganhador)
Valoração: valor v_i.

Ganhador: a tal que $v_a = \max\{v_i : i \in [n]\}$.

Preços: para cada i em $[n]$, $p_i(a) = 0$ se $i \neq a$ e $p_a(a) = v_b$, onde $v_b = \max\{v_i : i \in [n], i \neq a\}$ (segundo maior lance).

É à prova de estratégia ou não?

Seja v_i' um lance distinto de v_i e a' o ganhador para v_{-i}, v_i'.

Vamos mostrar que $v_i(a) - p_i(v_{-i}, v_i) \geq v_i(a') - p_i(v_{-i}, v_i')$.

Divida em dois casos: $v_i' \geq v_i$ e $v_i' \leq v_i$.

(continua ganhando ou passa a ganhar com utilidade negativa,
ou continua ganhando com mesma utilidade ou deixa de ganhar,
passando a utilidade zero).

Mecanismos VCG

Lembre-se que $\sum_i v_i(a)$ é o chamado bem-estar social.

Mecanismos VCG

Lembre-se que $\sum_i v_i(a)$ é o chamado bem-estar social.

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$.
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$ tq $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Mecanismos VCG

Lembre-se que $\sum_i v_i(a)$ é o chamado bem-estar social.

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$.
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$ tq $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Observações:

O mecanismo maximiza o bem-estar social.

Mecanismos VCG

Lembre-se que $\sum_i v_i(a)$ é o chamado bem-estar social.

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$.
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$ tq
  $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Observações:

O mecanismo maximiza o bem-estar social.

O preço $p_i(v_1, \ldots, v_n)$ não depende do valor v_i.

Mecanismos VCG

Lembre-se que $\sum_i v_i(a)$ é o chamado bem-estar social.

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$.
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$ tq
  $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Observações:

O mecanismo maximiza o bem-estar social.

O preço $p_i(v_1, \ldots, v_n)$ não depende do valor v_i.

Portanto, para minimizar o seu preço,
i pode apenas escolher v_i de modo que $\sum_{j \neq i} v_j(a)$ seja máximo

Mecanismos VCG

Lembre-se que $\sum_i v_i(a)$ é o chamado bem-estar social.

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$.
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$ tq
  $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Observações:

O mecanismo maximiza o bem-estar social.

O preço $p_i(v_1, \ldots, v_n)$ não depende do valor v_i.

Portanto, para minimizar o seu preço,
i pode apenas escolher v_i de modo que $\sum_{j \neq i} v_j(a)$ seja máximo
(já que a escolha de v_i afeta o $a = f(v_1, \ldots, v_n)$).

Mecanismos VCG

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$ tq $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Mecanismos VCG

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$ tq $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Teorema: O mecanismo VCG é à prova de estratégia.

Mecanismos VCG

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$ tq
  $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Teorema: O mecanismo VCG é à prova de estratégia.

Prova: Fixe i, $v_1, \ldots, v_n$ e v'_i e $a = f(v_{-i}, v_i)$ e $a' = f(v_{-i}, v'_i)$.

Precisamos mostrar que u_i é tão alta quanto u'_i,
onde $u_i = v_i(a) - p_i(v_{-i}, v_i)$ e $u'_i = v_i(a') - p_i(v_{-i}, v'_i)$.

Mecanismos VCG

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$ tq
  $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Teorema: O mecanismo VCG é à prova de estratégia.

Prova: Fixe i, $v_1, \ldots, v_n$ e v'_i e $a = f(v_{-i}, v_i)$ e $a' = f(v_{-i}, v'_i)$.

Precisamos mostrar que u_i é tão alta quanto u'_i,
onde $u_i = v_i(a) - p_i(v_{-i}, v_i)$ e $u'_i = v_i(a') - p_i(v_{-i}, v'_i)$.

Mas $u_i = v_i(a) - h_i(v_{-i}) + \sum_{j \neq i} v_j(a) = \sum_j v_j(a) - h_i(v_{-i})$.

Mecanismos VCG

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$ tq $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Teorema: O mecanismo VCG é à prova de estratégia.

Prova: Fixe i, $v_1, \ldots, v_n$ e v_i' e $a = f(v_{-i}, v_i)$ e $a' = f(v_{-i}, v_i')$.

Precisamos mostrar que u_i é tão alta quanto u_i',
onde $u_i = v_i(a) - p_i(v_{-i}, v_i)$ e $u_i' = v_i(a') - p_i(v_{-i}, v_i')$.

Mas $u_i = v_i(a) - h_i(v_{-i}) + \sum_{j \neq i} v_j(a) = \sum_j v_j(a) - h_i(v_{-i})$.

Similarmente, $u_i' = \sum_j v_j(a') - h_i(v_{-i})$.

Mecanismos VCG

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$ tq $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Teorema: O mecanismo VCG é à prova de estratégia.

Prova: Fixe i, $v_1, \ldots, v_n$ e v'_i e $a = f(v_{-i}, v_i)$ e $a' = f(v_{-i}, v'_i)$.

Precisamos mostrar que u_i é tão alta quanto u'_i,
onde $u_i = v_i(a) - p_i(v_{-i}, v_i)$ e $u'_i = v_i(a') - p_i(v_{-i}, v'_i)$.

Mas $u_i = v_i(a) - h_i(v_{-i}) + \sum_{j \neq i} v_j(a) = \sum_j v_j(a) - h_i(v_{-i})$.

Similarmente, $u'_i = \sum_j v_j(a') - h_i(v_{-i})$.

Como a é tq $\sum_j v_j(a)$ é máxima, declarar v_i é ótimo para i. $\square$

Regra de Clarke

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$.
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$ tq $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Regra de Clarke

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$.
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$ tq $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Como escolher as funções h_i?

Regra de Clarke

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \dots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$.
- existem funções $h_1, \dots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$ tq
  $p_i(v_1, \dots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \dots, v_n$.

Como escolher as funções h_i?

Regra de Clarke:

Tome $h_i(v_{-i}) = \max_{b \in A} \sum_{j \neq i} v_j(b)$ para todo i
(bem-estar social ótimo sem o i).

Regra de Clarke

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$.
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$ tq $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Como escolher as funções h_i?

Regra de Clarke:

Tome $h_i(v_{-i}) = \max_{b \in A} \sum_{j \neq i} v_j(b)$ para todo i
(bem-estar social ótimo sem o i).

Resulta em $p_i(v_1, \ldots, v_n) = \max_b \sum_{j \neq i} v_j(b) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$,
onde $a = f(v_1, \ldots, v_n)$.

Regra de Clarke

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$ tq
  $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Regra de Clarke:

Tome $h_i(v_{-i}) = \max_{b \in A} \sum_{j \neq i} v_j(b)$ para todo i.

Resulta em $p_i(v_1, \ldots, v_n) = \max_b \sum_{j \neq i} v_j(b) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$,
onde $a = f(v_1, \ldots, v_n)$.

Regra de Clarke

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$ tq
  $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Regra de Clarke:

Tome $h_i(v_{-i}) = \max_{b \in A} \sum_{j \neq i} v_j(b)$ para todo i.

Resulta em $p_i(v_1, \ldots, v_n) = \max_b \sum_{j \neq i} v_j(b) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$,
onde $a = f(v_1, \ldots, v_n)$.

O preço de i é a diferença entre o bem-estar social ótimo sem i,
e o bem-estar social ótimo com i sem a sua parcela $v_i(a)$.

Exemplo

Leilão de Vickrey:
Cada comprador dá um lance em um envelope.
Ganha o maior lance, e paga o segundo maior lance.

n: número de compradores
$A = [n]$ (ganhador)
Lance: valor v_i.

Exemplo

Leilão de Vickrey:
Cada comprador dá um lance em um envelope.
Ganha o maior lance, e paga o segundo maior lance.

n: número de compradores
$A = [n]$ (ganhador)
Lance: valor v_i.

Ganhador: a tal que $v_a = \max\{v_i : i \in [n]\}$.

Exemplo

Leilão de Vickrey:
Cada comprador dá um lance em um envelope.
Ganha o maior lance, e paga o segundo maior lance.

n: número de compradores
$A = [n]$ (ganhador)
Lance: valor v_i.

Ganhador: a tal que $v_a = \max\{v_i : i \in [n]\}$.

Clarke: $p_i(v_1, \ldots, v_n) = \max_b \sum_{j \neq i} v_j(b) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$

Exemplo

Leilão de Vickrey:
Cada comprador dá um lance em um envelope.
Ganha o maior lance, e paga o segundo maior lance.

n: número de compradores
$A = [n]$ (ganhador)
Lance: valor v_i.

Ganhador: a tal que $v_a = \max\{v_i : i \in [n]\}$.

Clarke: $p_i(v_1, \ldots, v_n) = \max_b \sum_{j \neq i} v_j(b) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$

Preços:
Se $i \neq a$, então $\max_b \sum_{j \neq i} v_j(b) = v_a$
e $\sum_{j \neq i} v_j(a) = v_a$, ou seja, $p_i = 0$.

Exemplo

Leilão de Vickrey:
Cada comprador dá um lance em um envelope.
Ganha o maior lance, e paga o segundo maior lance.

n: número de compradores
$A = [n]$ (ganhador)
Lance: valor v_i.

Ganhador: a tal que $v_a = \max\{v_i : i \in [n]\}$.

Clarke: $p_i(v_1, \ldots, v_n) = \max_b \sum_{j \neq i} v_j(b) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$

Preços:
Se $i \neq a$, então $\max_b \sum_{j \neq i} v_j(b) = v_a$
e $\sum_{j \neq i} v_j(a) = v_a$, ou seja, $p_i = 0$.

Se $i = a$, então $\sum_{j \neq i} v_j(a) = 0$ e $\max_b \sum_{j \neq i} v_j(b) = v_s$
onde v_s é o segundo maior lance, ou seja, $p_i = v_s$.

Transferência de dinheiro

As funções h_i controlam a transferência de dinheiro:
quem paga para quem.

Transferência de dinheiro

As funções h_i controlam a transferência de dinheiro:
quem paga para quem.

Poderíamos tomar $h_i = 0$ para todo i,
mas nesse caso o leiloeiro pagaria aos participantes.

Transferência de dinheiro

As funções h_i controlam a transferência de dinheiro:
quem paga para quem.

Poderíamos tomar $h_i = 0$ para todo i,
mas nesse caso o leiloeiro pagaria aos participantes.

Propriedades interessantes:

- Um mecanismo é (ex-post) individualmente racional se a utilidade de todos os participantes é não-negativa, ou seja, se $v_i(f(v_1, \ldots, v_n)) - p_i(v_1, \ldots, v_n) \geq 0$ para todo i.

Transferência de dinheiro

As funções h_i controlam a transferência de dinheiro:
quem paga para quem.

Poderíamos tomar $h_i = 0$ para todo i,
mas nesse caso o leiloeiro pagaria aos participantes.

Propriedades interessantes:

- Um mecanismo é (ex-post) individualmente racional se a utilidade de todos os participantes é não-negativa, ou seja, se $v_i(f(v_1, \ldots, v_n)) - p_i(v_1, \ldots, v_n) \geq 0$ para todo i.
- Um mecanismo não tem transferências positivas se nenhum participante recebe dinheiro, ou seja, $p_i(v_1, \ldots, v_n) \geq 0$ para todo $v_1, \ldots, v_n$ e i.

Transferência de dinheiro

Propriedades interessantes:

- Um mecanismo é (ex-post) individualmente racional se a utilidade de todos os participantes é não-negativa, ou seja, se $v_i(f(v_1, \ldots, v_n)) - p_i(v_1, \ldots, v_n) \geq 0$ para todo i.
- Um mecanismo não tem transferências positivas se nenhum participante recebe dinheiro, ou seja, $p_i(v_1, \ldots, v_n) \geq 0$ para todo $v_1, \ldots, v_n$ e i.

Transferência de dinheiro

Propriedades interessantes:

- Um mecanismo é (ex-post) individualmente racional se a utilidade de todos os participantes é não-negativa, ou seja, se $v_i(f(v_1, \ldots, v_n)) - p_i(v_1, \ldots, v_n) \geq 0$ para todo i.
- Um mecanismo não tem transferências positivas se nenhum participante recebe dinheiro, ou seja, $p_i(v_1, \ldots, v_n) \geq 0$ para todo $v_1, \ldots, v_n$ e i.

Regra de Clarke:

$$p_i(v_1, \ldots, v_n) = \max_b \sum_{j \neq i} v_j(b) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$$

Transferência de dinheiro

Propriedades interessantes:

- Um mecanismo é (ex-post) individualmente racional se a utilidade de todos os participantes é não-negativa, ou seja, se $v_i(f(v_1, \ldots, v_n)) - p_i(v_1, \ldots, v_n) \geq 0$ para todo i.
- Um mecanismo não tem transferências positivas se nenhum participante recebe dinheiro, ou seja, $p_i(v_1, \ldots, v_n) \geq 0$ para todo $v_1, \ldots, v_n$ e i.

Regra de Clarke:

$$p_i(v_1, \ldots, v_n) = \max_b \sum_{j \neq i} v_j(b) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$$

Fácil ver que garante que $p_i \geq 0$ para todo i.

Transferência de dinheiro

Lema: Mecanismo VCG com pagamento de Clarke não tem transferências positivas e, se $v_i(a) \geq 0$ para todo $v_i \in V_i$ e $a \in A$, tal mecanismo é individualmente racional.

Transferência de dinheiro

Lema: Mecanismo VCG com pagamento de Clarke não tem transferências positivas e, se $v_i(a) \geq 0$ para todo $v_i \in V_i$ e $a \in A$, tal mecanismo é individualmente racional.

Prova: Como já observado, claro que

$$p_i(v_1, \ldots, v_n) = \max_b \sum_{j \neq i} v_j(b) - \sum_{j \neq i} v_j(a) \geq 0.$$

Transferência de dinheiro

Lema: Mecanismo VCG com pagamento de Clarke não tem transferências positivas e, se $v_i(a) \geq 0$ para todo $v_i \in V_i$ e $a \in A$, tal mecanismo é individualmente racional.

Prova: Como já observado, claro que

$$p_i(v_1, \ldots, v_n) = \max_b \sum_{j \neq i} v_j(b) - \sum_{j \neq i} v_j(a) \geq 0.$$

Seja $a = f(v_1, \ldots, v_n)$ e $p_i = p_i(v_1, \ldots, v_n)$. Então

Transferência de dinheiro

Lema: Mecanismo VCG com pagamento de Clarke não tem transferências positivas e, se $v_i(a) \geq 0$ para todo $v_i \in V_i$ e $a \in A$, tal mecanismo é individualmente racional.

Prova: Como já observado, claro que

$$p_i(v_1, \ldots, v_n) = \max_b \sum_{j \neq i} v_j(b) - \sum_{j \neq i} v_j(a) \geq 0.$$

Seja $a = f(v_1, \ldots, v_n)$ e $p_i = p_i(v_1, \ldots, v_n)$. Então

$$\begin{aligned}
v_i(a) - p_i &= v_i(a) - \max_b \sum_{j \neq i} v_j(b) + \sum_{j \neq i} v_j(a) \\
&= \sum_j v_j(a) - \max_b \sum_{j \neq i} v_j(b) \\
&\geq \sum_j v_j(a) - \max_b \sum_j v_j(b) \quad \text{pois } v_i(b) \geq 0 \\
&= 0 \quad \text{pois } a \in \arg\max\{\textstyle\sum_i v_i(a') : a' \in A\}
\end{aligned}$$

Transferência de dinheiro

Lema: Mecanismo VCG com pagamento de Clarke não tem transferências positivas e, se $v_i(a) \geq 0$ para todo $v_i \in V_i$ e $a \in A$, tal mecanismo é individualmente racional.

Com valorações negativas (ou seja, custos), regra de Clarke não funciona bem, mas há similares que funcionam.

Transferência de dinheiro

Lema: Mecanismo VCG com pagamento de Clarke não tem transferências positivas e, se $v_i(a) \geq 0$ para todo $v_i \in V_i$ e $a \in A$, tal mecanismo é individualmente racional.

Com valorações negativas (ou seja, custos), regra de Clarke não funciona bem, mas há similares que funcionam.

Basta adaptar a ideia para o valor ganho ser a diferença causada aos outros participantes pela participação de i.

Transferência de dinheiro

Lema: Mecanismo VCG com pagamento de Clarke não tem transferências positivas e, se $v_i(a) \geq 0$ para todo $v_i \in V_i$ e $a \in A$, tal mecanismo é individualmente racional.

Com valorações negativas (ou seja, custos), regra de Clarke não funciona bem, mas há similares que funcionam.

Basta adaptar a ideia para o valor ganho ser a diferença causada aos outros participantes pela participação de i.

Vamos mostrar que mecanismos à prova de estratégia que maximizam o bem-estar social são VCG.

Caracterização direta

Mecanismo (f, p) é à prova de estratégia se, para todo i, e todo $v_1, \ldots, v_n$ e v'_i, para $a = f(v_{-i}, v_i)$ e $a' = f(v_{-i}, v'_i)$, vale que $v_i(a) - p_i(v_{-i}, v_i) \geq v_i(a') - p_i(v_{-i}, v'_i)$.

Proposição: Um mecanismo é à prova de estratégia sse satisfaz as seguintes condições para todo i e v_{-i}:

(a) Para todo $a \in A$, existe preço p_a tq $p_i(v_i, v_{-i}) = p_a$ para todo v_i com $f(v_i, v_{-i}) = a$.

(b) Para todo v_i, $f(v_i, v_{-i}) \in \arg\max\{v_i(a) - p_a\}$, onde o max é sobre alternativas da imagem de $f(\cdot, v_{-i})$.

Prova feita na aula.

Mecanismos VCG e regra de Clarke

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$.
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$ tq
  $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Pagamentos de Clarke: Se $a = f(v_1, \ldots, v_n)$,

$$p_i(v_1, \ldots, v_n) = \max_b \sum_{j \neq i} v_j(b) - \sum_{j \neq i} v_j(a).$$

Propriedades:

- Mecanismo é (ex-post) individualmente racional
  se $u_i \geq 0$ para todo i.
- Mecanismo não tem transferências positivas
  se $p_i \geq 0$ para todo i.

Mecanismos VCG

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$ tq
  $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Mecanismos VCG

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$ tq
  $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Sabemos que mecanismos VCG são à prova de estratégia.

Mecanismos VCG

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$ tq
  $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Sabemos que mecanismos VCG são à prova de estratégia.

Vamos mostrar basicamente que
qualquer mecanismo à prova de estratégia
que maximize o bem-estar social é VCG.

Unicidade dos preços

Proposição: Um mecanismo é à prova de estratégia sse satisfaz as seguintes condições para todo i e v_{-i}:

(a) Para todo $a \in A$, existe preço p_a tq $p_i(v_i, v_{-i}) = p_a$ para todo v_i com $f(v_i, v_{-i}) = a$.

(b) Para todo v_i, $f(v_i, v_{-i}) \in \arg\max\{v_i(a) - p_a\}$, onde o max é sobre alternativas da imagem de $f(\cdot, v_{-i})$.

Teorema: Se cada V_i é conexo no espaço Euclideano e (f, p) é à prova de estratégia, então qq mecanismo (f, p') é à prova de estratégia sse existem $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$ tq $p'_i(v_1, \ldots, v_n) = p_i(v_1, \ldots, v_n) + h_i(v_{-i})$ para toda $v_1, \ldots, v_n$.

Prova feita na aula.