

Jogos de formação de redes

Jogo de conexão local:

n jogadores vão formar um grafo com n vértices

estratégia de cada jogador: vértices com quem se liga

Jogos de formação de redes

Jogo de conexão local:

n jogadores vão formar um grafo com n vértices

estratégia de cada jogador: vértices com quem se liga

Dadas as escolhas dos jogadores, temos um grafo G .

Qual é o custo de G para cada jogador?

Jogos de formação de redes

Jogo de conexão local:

n jogadores vão formar um grafo com n vértices

estratégia de cada jogador: vértices com quem se liga

Dadas as escolhas dos jogadores, temos um grafo G .

Qual é o custo de G para cada jogador?

Custo por ligação: $\alpha > 0$

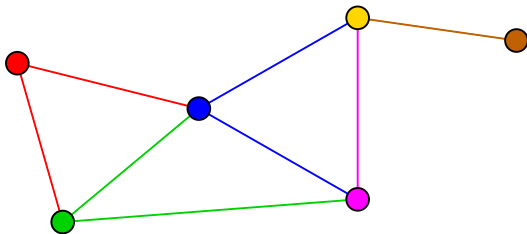
Custo por distâncias:

soma da distância em G a cada outro vértice

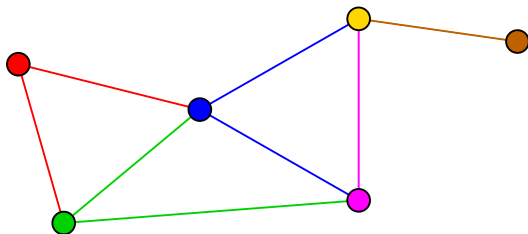
$$c_v(G) = \alpha |N_v| + \sum_{u \in [n]} d_G(u, v),$$

onde N_v é o conjunto de vértices a quem v se ligou.

Exemplo



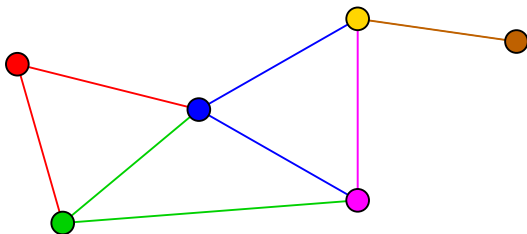
Exemplo



Para $\alpha = 2$, temos os seguintes custos:

- ▶ vértice verde: $4 + (1 + 1 + 1 + 2 + 3) = 4 + 8 = 12$
- ▶ vértice azul: $4 + (1 + 1 + 1 + 1 + 2) = 4 + 6 = 10$
- ▶ vértice marrom: $2 + (1 + 2 + 2 + 3 + 3) = 2 + 11 = 13$

Exemplo

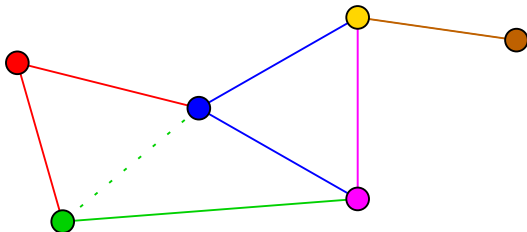


Para $\alpha = 2$, temos os seguintes custos:

- ▶ vértice verde: $4 + (1 + 1 + 1 + 2 + 3) = 4 + 8 = 12$
- ▶ vértice azul: $4 + (1 + 1 + 1 + 1 + 2) = 4 + 6 = 10$
- ▶ vértice marrom: $2 + (1 + 2 + 2 + 3 + 3) = 2 + 11 = 13$

É um equilíbrio?

Exemplo



Para $\alpha = 2$, temos os seguintes custos:

- ▶ vértice verde: $4 + (1 + 1 + 1 + 2 + 3) = 4 + 8 = 12$
- ▶ vértice azul: $4 + (1 + 1 + 1 + 1 + 2) = 4 + 6 = 10$
- ▶ vértice marrom: $2 + (1 + 2 + 2 + 3 + 3) = 2 + 11 = 13$

É um equilíbrio?

Não... o verde por exemplo pode melhorar...

Preço da anarquia

Para $\alpha < 1$, o grafo completo é o único equilíbrio,
e é solução ótima: o preço da anarquia é 1 para $\alpha < 1$.

Suponha então que $\alpha \geq 1$.

Fabrikant, Luthra, Maneva, e Papadimitriou (2003)

Lema: Se um grafo é um equilíbrio com diâmetro d ,
então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Preço da anarquia

Para $\alpha < 1$, o grafo completo é o único equilíbrio,
e é solução ótima: o preço da anarquia é 1 para $\alpha < 1$.

Suponha então que $\alpha \geq 1$.

Fabrikant, Luthra, Maneva, e Papadimitriou (2003)

Lema: Se um grafo é um equilíbrio com diâmetro d ,
então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Diâmetro: distância máxima entre dois vértices do grafo.

Preço da anarquia

Para $\alpha < 1$, o grafo completo é o único equilíbrio, e é solução ótima: o preço da anarquia é 1 para $\alpha < 1$.

Suponha então que $\alpha \geq 1$.

Fabrikant, Luthra, Maneva, e Papadimitriou (2003)

Lema: Se um grafo é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Diâmetro: distância máxima entre dois vértices do grafo.

Teorema: O diâmetro de um equilíbrio é no máximo $2\sqrt{\alpha}$, e portanto o preço da anarquia é $O(\sqrt{\alpha})$.

O Teorema vindo do Lema

Lema: Se um grafo é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Teorema: O diâmetro de um equilíbrio é no máximo $2\sqrt{\alpha}$, e portanto o preço da anarquia é $O(\sqrt{\alpha})$.

O Teorema vindo do Lema

Lema: Se um grafo é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Teorema: O diâmetro de um equilíbrio é no máximo $2\sqrt{\alpha}$, e portanto o preço da anarquia é $O(\sqrt{\alpha})$.

Prova: Pelo Lema, basta provar a primeira parte:

O Teorema vindo do Lema

Lema: Se um grafo é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

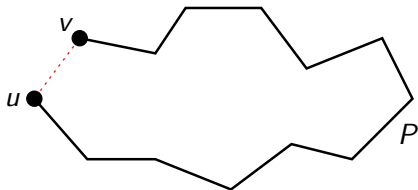
Teorema: O diâmetro de um equilíbrio é no máximo $2\sqrt{\alpha}$, e portanto o preço da anarquia é $O(\sqrt{\alpha})$.

Prova: Pelo Lema, basta provar a primeira parte: que o diâmetro de um equilíbrio é no máximo $2\sqrt{\alpha}$.

Diâmetro de um equilíbrio

Teorema: O diâmetro de um equilíbrio é no máximo $2\sqrt{\alpha}$, e portanto o preço da anarquia é $O(\sqrt{\alpha})$.

Prova: Sejam u e v tq $d(u, v) > 2k$ para algum $k \geq 1$.



Diâmetro de um equilíbrio

Teorema: O diâmetro de um equilíbrio é no máximo $2\sqrt{\alpha}$, e portanto o preço da anarquia é $O(\sqrt{\alpha})$.

Prova: Sejam u e v tq $d(u, v) > 2k$ para algum $k \geq 1$.



Se u passar a pagar pela aresta uv ,
gasta mais α e economiza nas distâncias

$$> (2k - 1) + (2k - 3) + \cdots + 3 + 1 = k^2.$$

O Lema

Lema: Se um grafo G é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

O Lema

Lema: Se um grafo G é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova: Ótimo tem custo $\Omega(\alpha n + n^2)$, pois o grafo tem que ser conexo ($m \geq n - 1$).

O Lema

Lema: Se um grafo G é um equilíbrio com diâmetro d ,
então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova: Ótimo tem custo $\Omega(\alpha n + n^2)$,
pois o grafo tem que ser conexo ($m \geq n - 1$).

Vamos mostrar que o custo social de G é $O(d\alpha n + dn^2)$.

O Lema

Lema: Se um grafo G é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova: Ótimo tem custo $\Omega(\alpha n + n^2)$, pois o grafo tem que ser conexo ($m \geq n - 1$).

Vamos mostrar que o custo social de G é $O(d\alpha n + dn^2)$.

Se G tem diâmetro d , o custo das distâncias é $O(dn^2)$.

O Lema

Lema: Se um grafo G é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova: Ótimo tem custo $\Omega(\alpha n + n^2)$, pois o grafo tem que ser conexo ($m \geq n - 1$).

Vamos mostrar que o custo social de G é $O(d\alpha n + dn^2)$.

Se G tem diâmetro d , o custo das distâncias é $O(dn^2)$.

Resta analisar o custo das arestas de G .

O Lema

Lema: Se um grafo G é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova: Ótimo tem custo $\Omega(\alpha n + n^2)$.

Se G tem diâmetro d , o custo das distâncias é $O(dn^2)$.

O Lema

Lema: Se um grafo G é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova: Ótimo tem custo $\Omega(\alpha n + n^2)$.

Se G tem diâmetro d , o custo das distâncias é $O(dn^2)$.

Quebramos o custo das arestas em duas partes:

- ▶ arestas de corte
- ▶ arestas não de corte

O Lema

Lema: Se um grafo G é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova: Ótimo tem custo $\Omega(\alpha n + n^2)$.

Se G tem diâmetro d , o custo das distâncias é $O(dn^2)$.

Quebramos o custo das arestas em duas partes:

- ▶ arestas de corte
- ▶ arestas não de corte

No máximo $n - 1$ arestas de corte.

O Lema

Lema: Se um grafo G é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova: Ótimo tem custo $\Omega(\alpha n + n^2)$.

Se G tem diâmetro d , o custo das distâncias é $O(dn^2)$.

Quebramos o custo das arestas em duas partes:

- ▶ arestas de corte
- ▶ arestas não de corte

No máximo $n - 1$ arestas de corte.

Então arestas de corte custam menos que αn .

Arestas não de corte

Lema: Se um grafo G é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova: Ótimo tem custo $\Omega(\alpha n + n^2)$.

Se G tem diâmetro d , o custo das distâncias é $O(dn^2)$.

Arestas de corte custam menos que αn .

Falta contabilizar o custo das arestas não de corte.

Arestas não de corte

Lema: Se um grafo G é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova: Ótimo tem custo $\Omega(\alpha n + n^2)$.

Se G tem diâmetro d , o **custo das distâncias** é $O(dn^2)$.

Arestas de corte custam menos que αn .

Falta contabilizar o custo das arestas não de corte.

Vamos mostrar que:

cada vértice paga por $O(nd/\alpha)$ arestas não de corte.

Arestas não de corte

Lema: Se um grafo G é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova: Ótimo tem custo $\Omega(\alpha n + n^2)$.

Se G tem diâmetro d , o **custo das distâncias** é $O(dn^2)$.

Arestas de corte custam menos que αn .

Falta contabilizar o custo das arestas não de corte.

Vamos mostrar que:

cada vértice paga por $O(nd/\alpha)$ arestas não de corte.

Disso segue que custo total destas arestas é $O(n^2d)$,
e a prova do lema termina.

Arestas não de corte

Lema: Se um grafo G é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova: Falta mostrar que:
cada vértice paga por $O(nd/\alpha)$ arestas não de corte.

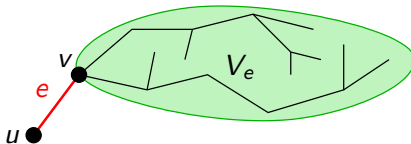
Arestas não de corte

Lema: Se um grafo G é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova: Falta mostrar que:
cada vértice paga por $O(nd/\alpha)$ arestas não de corte.

Para cada vértice u e cada aresta $e = uv$ paga por u ,

V_e : conjunto dos w tq **todo** caminho mínimo de u a w usa e .



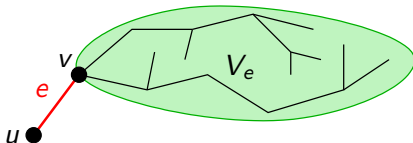
Arestas não de corte

Lema: Se um grafo G é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova: Falta mostrar que:
cada vértice paga por $O(nd/\alpha)$ arestas não de corte.

Para cada vértice u e cada aresta $e = uv$ paga por u ,

V_e : conjunto dos w tq **todo** caminho mínimo de u a w usa e .



Note que V_e é disjunto de um V_f para $f \neq e$.

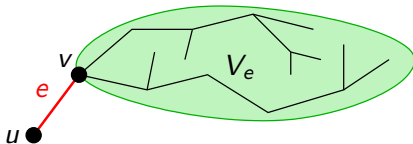
Arestas não de corte

Lema: Se um grafo G é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova: Falta mostrar que:
cada vértice paga por $O(nd/\alpha)$ arestas não de corte.

Para cada vértice u e cada aresta $e = uv$ paga por u ,

V_e : conjunto dos w tq **todo** caminho mínimo de u a w usa e .



Note que V_e é disjunto de um V_f para $f \neq e$.

Ideia da prova: mostrar uma delimitação inferior em $|V_e|$,
que implica que não podem haver muitos tais e 's incidentes a u .

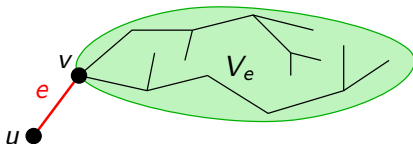
Arestas não de corte

Lema: Se um grafo G é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova: Falta mostrar que:
cada vértice paga por $O(nd/\alpha)$ arestas não de corte.

Para cada vértice u e cada aresta $e = uv$ paga por u ,

V_e : conjunto dos w tq **todo** caminho mínimo de u a w usa e .



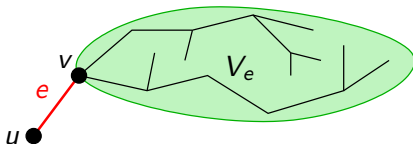
Arestas não de corte

Lema: Se um grafo G é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova: Falta mostrar que:
cada vértice paga por $O(nd/\alpha)$ arestas não de corte.

Para cada vértice u e cada aresta $e = uv$ paga por u ,

V_e : conjunto dos w tq **todo** caminho mínimo de u a w usa e .



Ao remover e , a distância de u aos vértices de V_e (e só a eles) aumenta.

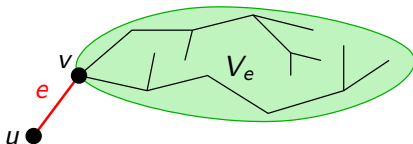
Arestas não de corte

Lema: Se um grafo G é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova: Falta mostrar que:
cada vértice paga por $O(nd/\alpha)$ arestas não de corte.

Para cada vértice u e cada aresta $e = uv$ paga por u ,

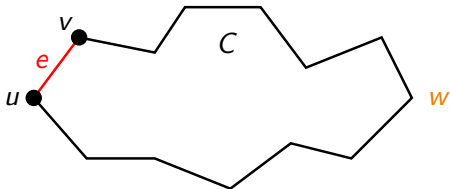
V_e : conjunto dos w tq **todo** caminho mínimo de u a w usa e .



Ao remover e , a distância de u aos vértices de V_e (e só a eles) aumenta. **Aumenta de quanto?**

Arestas não de corte

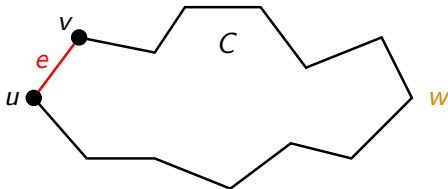
Seja C um circuito de comprimento mínimo contendo e .



Seja w o vértice mais distante de u em C .

Arestas não de corte

Seja C um circuito de comprimento mínimo contendo e .

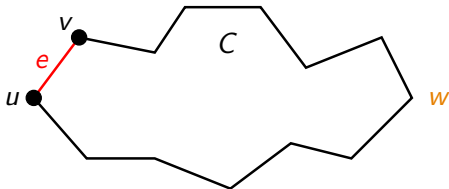


Seja w o vértice mais distante de u em C .

Note que o trecho C_{uw} é um caminho mínimo em G , logo tem comprimento no máximo d .

Arestas não de corte

Seja C um circuito de comprimento mínimo contendo e .



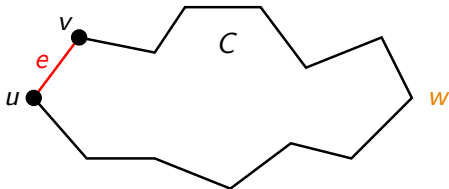
Seja w o vértice mais distante de u em C .

Note que o trecho C_{uw} é um caminho mínimo em G , logo tem comprimento no máximo d .

Analogamente, o trecho C_{vw} é um caminho mínimo em G , logo tem comprimento no máximo d .

Arestas não de corte

Seja C um circuito de comprimento mínimo contendo e .



Seja w o vértice mais distante de u em C .

Note que o trecho C_{uw} é um caminho mínimo em G , logo tem comprimento no máximo d .

Analogamente, o trecho C_{vw} é um caminho mínimo em G , logo tem comprimento no máximo d .

Assim sendo $d(u, v)$ após a remoção de e é no máximo $2d$.

Arestas não de corte

Falta: cada vértice paga por $O(nd/\alpha)$ arestas não de corte.

Para cada vértice u e cada aresta $e = uv$ paga por u ,

V_e : conjunto dos w tq **todo** caminho mínimo de u a w usa e .

Ao remover e , a distância de u aos vértices de V_e
(e só a eles) aumenta. **Aumenta de quanto?**

Distância de u a v sobe para no máximo $2d$.

Arestas não de corte

Falta: cada vértice paga por $O(nd/\alpha)$ arestas não de corte.

Para cada vértice u e cada aresta $e = uv$ paga por u ,

V_e : conjunto dos w tq **todo** caminho mínimo de u a w usa e .

Ao remover e , a distância de u aos vértices de V_e
(e só a eles) aumenta. **Aumenta de quanto?**

Distância de u a v sobe para no máximo $2d$.

Então custo de u desce de α , e sobe de no máximo $2d|V_e|$.

Ou seja, $2d|V_e| \geq \alpha$ e $|V_e| \geq \alpha/2d$.

Arestas não de corte

Falta: cada vértice paga por $O(nd/\alpha)$ arestas não de corte.

Para cada vértice u e cada aresta $e = uv$ paga por u ,

V_e : conjunto dos w tq **todo** caminho mínimo de u a w usa e .

Ao remover e , a distância de u aos vértices de V_e
(e só a eles) aumenta. **Aumenta de quanto?**

Distância de u a v sobe para no máximo $2d$.

Então custo de u desce de α , e sobe de no máximo $2d|V_e|$.

Ou seja, $2d|V_e| \geq \alpha$ e $|V_e| \geq \alpha/2d$.

V_e 's são disjuntos, logo $\leq n/(\alpha/2d) = 2dn/\alpha = O(dn/\alpha)$ V_e 's.

Arestas não de corte

Falta: cada vértice paga por $O(nd/\alpha)$ arestas não de corte.

Para cada vértice u e cada aresta $e = uv$ paga por u ,

V_e : conjunto dos w tq **todo** caminho mínimo de u a w usa e .

Ao remover e , a distância de u aos vértices de V_e
(e só a eles) aumenta. **Aumenta de quanto?**

Distância de u a v sobe para no máximo $2d$.

Então custo de u desce de α , e sobe de no máximo $2d|V_e|$.

Ou seja, $2d|V_e| \geq \alpha$ e $|V_e| \geq \alpha/2d$.

V_e 's são disjuntos, logo $\leq n/(\alpha/2d) = 2dn/\alpha = O(dn/\alpha)$ V_e 's.

Então cada vértice paga por $O(nd/\alpha)$ arestas não de corte.



Mais sobre preço da anarquia

Para $\alpha < 1$, o grafo completo é o único equilíbrio,
e é solução ótima: o preço da anarquia é 1 para $\alpha < 1$.

Fabrikant, Luthra, Maneva, e Papadimitriou (2003)

Teorema: O diâmetro de um equilíbrio é no máximo $2\sqrt{\alpha}$,
e portanto o preço da anarquia é $O(\sqrt{\alpha})$.

Mais sobre preço da anarquia

Para $\alpha < 1$, o grafo completo é o único equilíbrio,
e é solução ótima: o preço da anarquia é 1 para $\alpha < 1$.

Fabrikant, Luthra, Maneva, e Papadimitriou (2003)

Teorema: O diâmetro de um equilíbrio é no máximo $2\sqrt{\alpha}$,
e portanto o preço da anarquia é $O(\sqrt{\alpha})$.

Lin (2003) e independentemente

Albers, Eilts, Even-Dar, Mansour e Roditty (2006)

Teorema: O preço da anarquia é $O(1)$ se $\alpha = O(\sqrt{n})$.
Em geral, o preço da anarquia é $O(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Segundo resultado

Teorema: O preço da anarquia é $O(1)$ se $\alpha = O(\sqrt{n})$.
Em geral, o preço da anarquia é $O(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Segundo resultado

Teorema: O preço da anarquia é $O(1)$ se $\alpha = O(\sqrt{n})$.

Em geral, o preço da anarquia é $O(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Ideia da prova: Vamos usar o lema do começo da aula, ou seja, vamos mostrar que o diâmetro de um equilíbrio é $O(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Delimitação do diâmetro

Teorema: O preço da anarquia é $O(1)$ se $\alpha = O(\sqrt{n})$.

Em geral, o preço da anarquia é $O(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

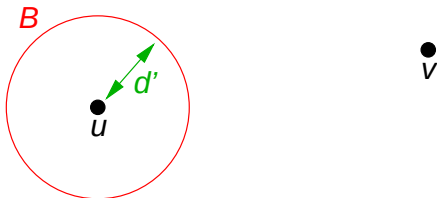
Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.

Delimitação do diâmetro

Teorema: O preço da anarquia é $O(1)$ se $\alpha = O(\sqrt{n})$.
Em geral, o preço da anarquia é $O(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.

B : conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u .

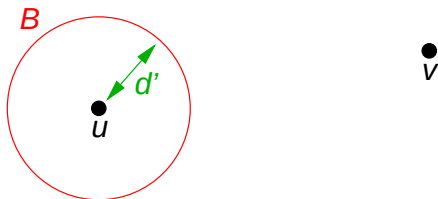


Delimitação do diâmetro

Teorema: O preço da anarquia é $O(1)$ se $\alpha = O(\sqrt{n})$.
Em geral, o preço da anarquia é $O(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.

B : conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u .



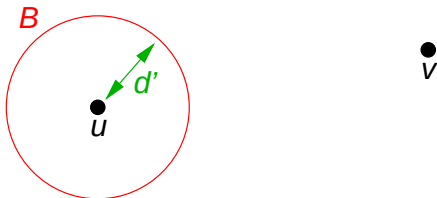
Queremos dar uma delimitação superior para d .

Delimitação do diâmetro

Teorema: O preço da anarquia é $O(1)$ se $\alpha = O(\sqrt{n})$.
Em geral, o preço da anarquia é $O(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.

B : conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u .



Queremos dar uma delimitação superior para d .

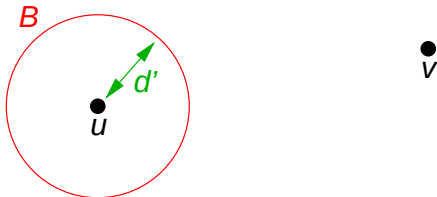
Para isso mostraremos uma delimitação superior e inferior para $|B|$.

Delimitação superior

Teorema: O preço da anarquia é $O(1)$ se $\alpha = O(\sqrt{n})$.
Em geral, o preço da anarquia é $O(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.

B : conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u .



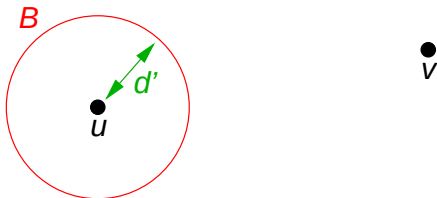
Delimitação superior

Teorema: O preço da anarquia é $O(1)$ se $\alpha = O(\sqrt{n})$.

Em geral, o preço da anarquia é $O(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.

B : conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u .



Se v pagar por uv , a distância de v a cada vértice de B , que era pelo menos $d - d'$, cai para no máximo $d' + 1$.

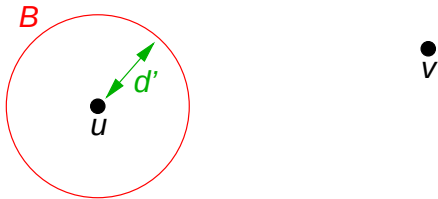
Delimitação superior

Teorema: O preço da anarquia é $O(1)$ se $\alpha = O(\sqrt{n})$.

Em geral, o preço da anarquia é $O(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.

B: conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u .



Se v pagar por uv , a distância de v a cada vértice de B , que era pelo menos $d - d'$, cai para no máximo $d' + 1$.

Se G é um equilíbrio, $\alpha \geq |B|(d - 2d' - 1) \geq (d - 1)|B|/2$.

Delimitação inferior

Teorema: O preço da anarquia é $O(1)$ se $\alpha = O(\sqrt{n})$.

Em geral, o preço da anarquia é $O(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.

B : conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u .

Se G é um equilíbrio, $\alpha \geq (d-1)|B|/2$. (delimitação superior)

Delimitação inferior

Teorema: O preço da anarquia é $O(1)$ se $\alpha = O(\sqrt{n})$.

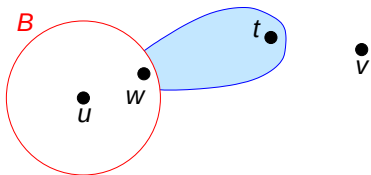
Em geral, o preço da anarquia é $O(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.

B : conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u .

Se G é um equilíbrio, $\alpha \geq (d-1)|B|/2$. (delimitação superior)

A_w : conjunto dos vértices $t \notin B$ tq
há caminho mínimo de u a t que deixa B por w .



Delimitação inferior

Teorema: O preço da anarquia é $O(1)$ se $\alpha = O(\sqrt{n})$.

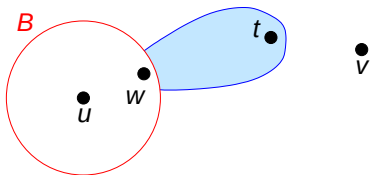
Em geral, o preço da anarquia é $O(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.

B : conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u .

Se G é um equilíbrio, $\alpha \geq (d-1)|B|/2$. (delimitação superior)

A_w : conjunto dos vértices $t \notin B$ tq
há caminho mínimo de u a t que deixa B por w .



Se $A_w \neq \emptyset$, então $d(u, w) = d'$.

Delimitação inferior

Teorema: O preço da anarquia é $O(1)$ se $\alpha = O(\sqrt{n})$.

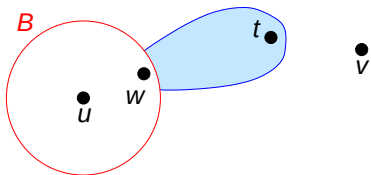
Em geral, o preço da anarquia é $O(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.

B : conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u .

Se G é um equilíbrio, $\alpha \geq (d-1)|B|/2$. (delimitação superior)

A_w : conjunto dos vértices $t \notin B$ tq
há caminho mínimo de u a t que deixa B por w .



Se $A_w \neq \emptyset$, então $d(u, w) = d'$.

Se u pagar por uw , economiza $|A_w|(d' - 1)$.

Delimitação inferior

Teorema: O preço da anarquia é $O(1)$ se $\alpha = O(\sqrt{n})$.

Em geral, o preço da anarquia é $O(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.

B : conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u .

Se G é um equilíbrio, $\alpha \geq (d-1)|B|/2$. (delimitação superior)

A_w : conjunto dos vértices t tq

há caminho mínimo de u a t que deixa B por w .

Se u pagar por uw , economiza $|A_w|(d' - 1)$.

Delimitação inferior

Teorema: O preço da anarquia é $O(1)$ se $\alpha = O(\sqrt{n})$.

Em geral, o preço da anarquia é $O(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.

B : conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u .

Se G é um equilíbrio, $\alpha \geq (d-1)|B|/2$. (delimitação superior)

A_w : conjunto dos vértices t tq

há caminho mínimo de u a t que deixa B por w .

Se u pagar por uw , economiza $|A_w|(d' - 1)$.

Logo $\alpha \geq |A_w|(d' - 1)$.

Delimitação inferior

Teorema: O preço da anarquia é $O(1)$ se $\alpha = O(\sqrt{n})$.

Em geral, o preço da anarquia é $O(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.

B : conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u .

Se G é um equilíbrio, $\alpha \geq (d-1)|B|/2$. (delimitação superior)

A_w : conjunto dos vértices t tq

há caminho mínimo de u a t que deixa B por w .

Se u pagar por uw , economiza $|A_w|(d'-1)$.

Logo $\alpha \geq |A_w|(d'-1)$.

Note que existe w tq $|A_w| \geq (n - |B|)/|B|$.

Delimitação inferior

Teorema: O preço da anarquia é $O(1)$ se $\alpha = O(\sqrt{n})$.

Em geral, o preço da anarquia é $O(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.

B : conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u .

Se G é um equilíbrio, $\alpha \geq (d-1)|B|/2$. (delimitação superior)

A_w : conjunto dos vértices t tq

há caminho mínimo de u a t que deixa B por w .

Se u pagar por uw , economiza $|A_w|(d'-1)$.

Logo $\alpha \geq |A_w|(d'-1)$.

Note que existe w tq $|A_w| \geq (n - |B|)/|B|$.

Combinando, concluímos que $\alpha \geq (d'-1)(n - |B|)/|B|$.

Delimitação inferior

Teorema: O preço da anarquia é $O(1)$ se $\alpha = O(\sqrt{n})$.

Em geral, o preço da anarquia é $O(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.

B : conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u .

Se G é um equilíbrio, $\alpha \geq (d-1)|B|/2$. (delimitação superior)

Concluimos também que $\alpha \geq (d' - 1)(n - |B|)/|B|$.

Delimitação inferior

Teorema: O preço da anarquia é $O(1)$ se $\alpha = O(\sqrt{n})$.

Em geral, o preço da anarquia é $O(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.

B : conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u .

Se G é um equilíbrio, $\alpha \geq (d-1)|B|/2$. (delimitação superior)

Concluimos também que $\alpha \geq (d' - 1)(n - |B|)/|B|$.

Portanto $|B|(1 + \alpha/(d' - 1)) \geq n$.

Delimitação inferior

Teorema: O preço da anarquia é $O(1)$ se $\alpha = O(\sqrt{n})$.

Em geral, o preço da anarquia é $O(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.

B : conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u .

Se G é um equilíbrio, $\alpha \geq (d-1)|B|/2$. (delimitação superior)

Concluimos também que $\alpha \geq (d' - 1)(n - |B|)/|B|$.

Portanto $|B|(1 + \alpha/(d' - 1)) \geq n$.

Ou seja, $|B|(d' - 1 + \alpha) \geq (d' - 1)n$.

Delimitação inferior

Teorema: O preço da anarquia é $O(1)$ se $\alpha = O(\sqrt{n})$.

Em geral, o preço da anarquia é $O(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.

B : conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u .

Se G é um equilíbrio, $\alpha \geq (d-1)|B|/2$. (delimitação superior)

Concluimos também que $\alpha \geq (d' - 1)(n - |B|)/|B|$.

Portanto $|B|(1 + \alpha/(d' - 1)) \geq n$.

Ou seja, $|B|(d' - 1 + \alpha) \geq (d' - 1)n$.

E, como $\alpha \geq (d-1)|B|/2 > d'$, vale que $|B| \geq n(d' - 1)/2\alpha$.

Conclusão da prova

Teorema: O preço da anarquia é $O(1)$ se $\alpha = O(\sqrt{n})$.

Em geral, o preço da anarquia é $O(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.

B : conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u .

Se G é um equilíbrio, $\alpha \geq (d-1)|B|/2$. (delimitação superior)

E vale que $|B| \geq n(d'-1)/2\alpha$. (delimitação inferior)

Conclusão da prova

Teorema: O preço da anarquia é $O(1)$ se $\alpha = O(\sqrt{n})$.

Em geral, o preço da anarquia é $O(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.

B : conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u .

Se G é um equilíbrio, $\alpha \geq (d-1)|B|/2$. (delimitação superior)

E vale que $|B| \geq n(d'-1)/2\alpha$. (delimitação inferior)

Então $\alpha \geq (d-1)|B|/2 \geq (d-1)n(d'-1)/4\alpha \geq n(d'-1)^2/\alpha$.

Conclusão da prova

Teorema: O preço da anarquia é $O(1)$ se $\alpha = O(\sqrt{n})$.

Em geral, o preço da anarquia é $O(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.

B : conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u .

Se G é um equilíbrio, $\alpha \geq (d-1)|B|/2$. (delimitação superior)

E vale que $|B| \geq n(d'-1)/2\alpha$. (delimitação inferior)

Então $\alpha \geq (d-1)|B|/2 \geq (d-1)n(d'-1)/4\alpha \geq n(d'-1)^2/\alpha$.

Ou seja, $\alpha^2 \geq n(d'-1)^2$, e

Conclusão da prova

Teorema: O preço da anarquia é $O(1)$ se $\alpha = O(\sqrt{n})$.

Em geral, o preço da anarquia é $O(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.

B : conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u .

Se G é um equilíbrio, $\alpha \geq (d-1)|B|/2$. (delimitação superior)

E vale que $|B| \geq n(d'-1)/2\alpha$. (delimitação inferior)

Então $\alpha \geq (d-1)|B|/2 \geq (d-1)n(d'-1)/4\alpha \geq n(d'-1)^2/\alpha$.

Ou seja, $\alpha^2 \geq n(d'-1)^2$, e

$$d \leq 4(d' + 1) \leq 4d' + 4 = 4(d' - 1) + 8 \leq 4\alpha/\sqrt{n} + 8.$$

Conclusão da prova

Teorema: O preço da anarquia é $O(1)$ se $\alpha = O(\sqrt{n})$.

Em geral, o preço da anarquia é $O(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.

B: conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u .

Se G é um equilíbrio, $\alpha \geq (d-1)|B|/2$. (delimitação superior)

E vale que $|B| \geq n(d'-1)/2\alpha$. (delimitação inferior)

Então $\alpha \geq (d-1)|B|/2 \geq (d-1)n(d'-1)/4\alpha \geq n(d'-1)^2/\alpha$.

Ou seja, $\alpha^2 \geq n(d'-1)^2$, e

$$d \leq 4(d' + 1) \leq 4d' + 4 = 4(d' - 1) + 8 \leq 4\alpha/\sqrt{n} + 8.$$

Então o diâmetro é $O(1 + \alpha/\sqrt{n})$ e,

do lema do começo da aula, $\text{PoA} = O(1 + \alpha/\sqrt{n})$. □

Jogo de conexão global

Seja $G = (V, E)$ um digrafo com custo c_e para cada e em E .

Jogo de conexão global

Seja $G = (V, E)$ um digrafo com custo c_e para cada e em E .

k jogadores, cada um com um par de vértices (s_i, t_i) .

Jogo de conexão global

Seja $G = (V, E)$ um digrafo com custo c_e para cada e em E .

k jogadores, cada um com um par de vértices (s_i, t_i) .

Estratégia do jogador i : caminho de s_i a t_i em G .

Jogo de conexão global

Seja $G = (V, E)$ um digrafo com custo c_e para cada e em E .

k jogadores, cada um com um par de vértices (s_i, t_i) .

Estratégia do jogador i : caminho de s_i a t_i em G .

custo para i do vetor de estratégias $S = (P_1, \dots, P_k)$:

$$\text{custo}_i(S) = \sum_{e \in P_i} \frac{c_e}{k_e},$$

onde k_e é o número de caminhos em S que usam e .

Jogo de conexão global

Seja $G = (V, E)$ um digrafo com custo c_e para cada e em E .

k jogadores, cada um com um par de vértices (s_i, t_i) .

Estratégia do jogador i : caminho de s_i a t_i em G .

custo para i do vetor de estratégias $S = (P_1, \dots, P_k)$:

$$\text{custo}_i(S) = \sum_{e \in P_i} \frac{c_e}{k_e},$$

onde k_e é o número de caminhos em S que usam e .

Custo social $cs(S)$: soma do custo das arestas em $\cup_i P_i$.

Problema de Steiner Generalizado

Seja $G = (V, E)$ um digrafo com custo c_e para cada e em E , e pares de vértices (s_i, t_i) , para $i = 1, \dots, k$.

Problema de Steiner Generalizado

Seja $G = (V, E)$ um digrafo com custo c_e para cada e em E , e pares de vértices (s_i, t_i) , para $i = 1, \dots, k$.

Problema: Encontrar um subgrafo de G de custo mínimo que contenha um caminho de s_i a t_i , para $i = 1, \dots, k$.

Problema de Steiner Generalizado

Seja $G = (V, E)$ um digrafo com custo c_e para cada e em E , e pares de vértices (s_i, t_i) , para $i = 1, \dots, k$.

Problema: Encontrar um subgrafo de G de custo mínimo que contenha um caminho de s_i a t_i , para $i = 1, \dots, k$.

Esse problema é NP-difícil, mas é com ele que vamos comparar o custo dos equilíbrios.

Problema de Steiner Generalizado

Seja $G = (V, E)$ um digrafo com custo c_e para cada e em E , e pares de vértices (s_i, t_i) , para $i = 1, \dots, k$.

Problema: Encontrar um subgrafo de G de custo mínimo que contenha um caminho de s_i a t_i , para $i = 1, \dots, k$.

Esse problema é NP-difícil, mas
é com ele que vamos comparar o custo dos equilíbrios.

Ou seja, o **custo social ótimo** do jogo é o custo da solução do correspondente problema de Steiner generalizado.