Jogos de formação de redes

Jogo de conexão local:

n jogadores vão formar um grafo com n vértices

estratégia de cada jogador: vértices com quem se liga

Jogos de formação de redes

Jogo de conexão local:

n jogadores vão formar um grafo com n vértices

estratégia de cada jogador: vértices com quem se liga

Dadas as escolhas dos jogadores, temos um grafo G.

Qual é o custo de G para cada jogador?

Jogos de formação de redes

Jogo de conexão local:

n jogadores vão formar um grafo com n vértices

estratégia de cada jogador: vértices com quem se liga

Dadas as escolhas dos jogadores, temos um grafo G.

Qual é o custo de G para cada jogador?

Custo por ligação: $\alpha > 0$
Custo por distâncias:
soma da distância em G a cada outro vértice

Jogos de formação de redes

Jogo de conexão local:

n jogadores vão formar um grafo com n vértices

estratégia de cada jogador: vértices com quem se liga

Dadas as escolhas dos jogadores, temos um grafo G.

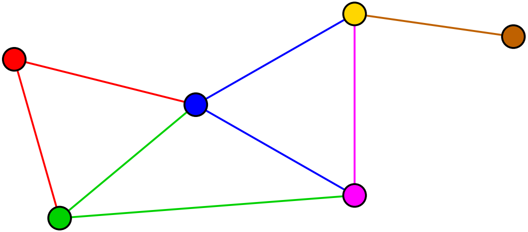
Qual é o custo de G para cada jogador?

Custo por ligação: $\alpha > 0$
Custo por distâncias:
soma da distância em G a cada outro vértice

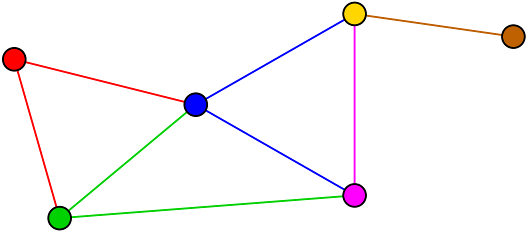
$$c_v(G) \;=\; \alpha\,|N_v| + \sum_{u \in [n]} d_G(u,v),$$

onde N_v é o conjunto de vértices a quem v se ligou.

Exemplo



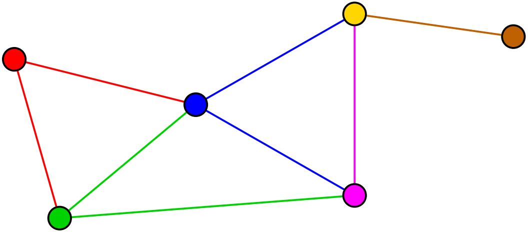
Exemplo



Para $\alpha = 2$, temos os seguintes custos:

- vértice verde: $4 + (1 + 1 + 1 + 2 + 3) = 4 + 8 = 12$
- vértice azul: $4 + (1 + 1 + 1 + 1 + 2) = 4 + 6 = 10$
- vértice marrom: $2 + (1 + 2 + 2 + 3 + 3) = 2 + 11 = 13$

Exemplo

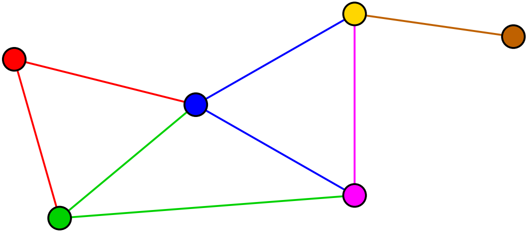


Para $\alpha = 2$, temos os seguintes custos:

- vértice verde: $4 + (1 + 1 + 1 + 2 + 3) = 4 + 8 = 12$
- vértice azul: $4 + (1 + 1 + 1 + 1 + 2) = 4 + 6 = 10$
- vértice marrom: $2 + (1 + 2 + 2 + 3 + 3) = 2 + 11 = 13$

É um equilíbrio?

Exemplo



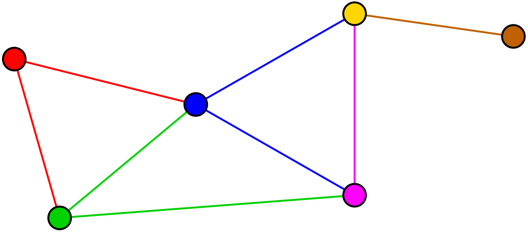
Para $\alpha = 2$, temos os seguintes custos:

- vértice verde: $4 + (1 + 1 + 1 + 2 + 3) = 4 + 8 = 12$
- vértice azul: $4 + (1 + 1 + 1 + 1 + 2) = 4 + 6 = 10$
- vértice marrom: $2 + (1 + 2 + 2 + 3 + 3) = 2 + 11 = 13$

É um equilíbrio?

Não... o verde por exemplo pode melhorar...

Exemplo

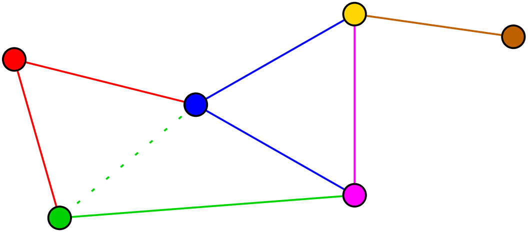


Para $\alpha = 2$, temos os seguintes custos:

- vértice verde: $4 + (1 + 1 + 1 + 2 + 3) = 4 + 7 = 11$
- vértice azul: $4 + (1 + 1 + 1 + 1 + 2) = 4 + 6 = 10$

O verde pode melhorar:

Exemplo



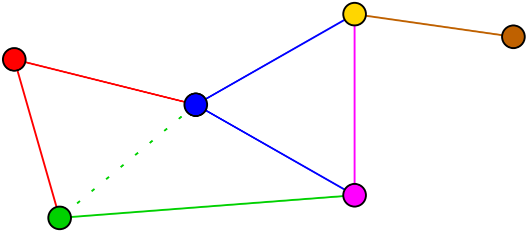
Para $\alpha = 2$, temos os seguintes custos:

- vértice verde: $4 + (1 + 1 + 1 + 2 + 3) = 4 + 7 = 11$
- vértice azul: $4 + (1 + 1 + 1 + 1 + 2) = 4 + 6 = 10$

Se o verde se desligar do azul seu custo cai para

$$2 + (1 + 2 + 1 + 2 + 3) = 2 + 8 = 10 < 11$$

Exemplo



Para $\alpha = 2$, temos os seguintes custos:

- vértice verde: $4 + (1 + 1 + 1 + 2 + 3) = 4 + 7 = 11$
- vértice azul: $4 + (1 + 1 + 1 + 1 + 2) = 4 + 6 = 10$

Se o verde se desligar do azul seu custo cai para

$$2 + (1 + 2 + 1 + 2 + 3) = 2 + 8 = 10 < 11$$

Note que o custo do azul piora de 1 neste caso.

Comentários

- o valor de α afeta as escolhas dos jogadores

Comentários

- o valor de α afeta as escolhas dos jogadores
- vamos considerar estratégias puras apenas de novo

Comentários

- o valor de α afeta as escolhas dos jogadores
- vamos considerar estratégias puras apenas de novo
- um equilíbrio G é conexo e
  cada aresta é paga por um único jogador

Comentários

- o valor de α afeta as escolhas dos jogadores
- vamos considerar estratégias puras apenas de novo
- um equilíbrio G é conexo e
  cada aresta é paga por um único jogador

Sempre existe equilíbrio de estratégias puras?

Comentários

- o valor de α afeta as escolhas dos jogadores
- vamos considerar estratégias puras apenas de novo
- um equilíbrio G é conexo e
  cada aresta é paga por um único jogador

Sempre existe equilíbrio de estratégias puras?

Sim...

Lema:
Se $\alpha \geq 1$ então qualquer estrela completa é um equilíbrio.
Se $\alpha \leq 1$ então o grafo completo é um equilíbrio.

Sempre existe equilíbrio

Lema:

Se $\alpha \geq 1$ então qualquer estrela completa é um equilíbrio.

Se $\alpha \leq 1$ então o grafo completo é um equilíbrio.

Sempre existe equilíbrio

Lema:

Se $\alpha \geq 1$ então qualquer estrela completa é um equilíbrio.
Se $\alpha \leq 1$ então o grafo completo é um equilíbrio.

Prova:

Se $\alpha \geq 1$ e G é uma estrela completa,
qualquer atribuição das arestas de G aos vértices
resulta em um equilíbrio:

Sempre existe equilíbrio

Lema:

Se $\alpha \geq 1$ então qualquer estrela completa é um equilíbrio.
Se $\alpha \leq 1$ então o grafo completo é um equilíbrio.

Prova:

Se $\alpha \geq 1$ e G é uma estrela completa,
qualquer atribuição das arestas de G aos vértices
resulta em um equilíbrio:

- nenhum vértice pode deixar de pagar uma aresta sem aumentar o seu custo para infinito (grafo desconexo).

Sempre existe equilíbrio

Lema:
Se $\alpha \geq 1$ então qualquer estrela completa é um equilíbrio.
Se $\alpha \leq 1$ então o grafo completo é um equilíbrio.

Prova:

Se $\alpha \geq 1$ e G é uma estrela completa,
qualquer atribuição das arestas de G aos vértices
resulta em um equilíbrio:

- nenhum vértice pode deixar de pagar uma aresta sem aumentar o seu custo para infinito (grafo desconexo).

- nenhum vértice tem interesse em pagar por uma aresta a mais, pois aumenta seu custo de pelo menos $\alpha \geq 1$ e diminui seu custo de apenas 1.

Sempre existe equilíbrio

Lema:

Se $\alpha \geq 1$ então qualquer estrela completa é um equilíbrio.

Se $\alpha \leq 1$ então o grafo completo é um equilíbrio.

Sempre existe equilíbrio

Lema:

Se $\alpha \geq 1$ então qualquer estrela completa é um equilíbrio.
Se $\alpha \leq 1$ então o grafo completo é um equilíbrio.

Prova:

Se $\alpha \leq 1$ e G é o grafo completo,
qualquer atribuição das arestas de G aos vértices
resulta em um equilíbrio:

Sempre existe equilíbrio

Lema:

Se $\alpha \geq 1$ então qualquer estrela completa é um equilíbrio.
Se $\alpha \leq 1$ então o grafo completo é um equilíbrio.

Prova:

Se $\alpha \leq 1$ e G é o grafo completo,
qualquer atribuição das arestas de G aos vértices
resulta em um equilíbrio:

- nenhum vértice pode deixar de pagar uma aresta sem aumentar o seu custo pois uma distância aumenta de 1 para 2, e só economiza $\alpha \leq 1$.

Custo e ótimo social

O custo social de um grafo G é

$$\mathrm{cs}(G) \; = \; \alpha\,|E_G| + \sum_{u \in [n]} \sum_{v \in [n]} d_G(u,v)$$

Custo e ótimo social

O custo social de um grafo G é

$$\mathrm{cs}(G) \;=\; \alpha\,|E_G| + \sum_{u\in[n]} \sum_{v\in[n]} d_G(u,v)$$

Qual o valor do custo social ótimo?

Custo e ótimo social

O custo social de um grafo G é

$$\mathrm{cs}(G) \;=\; \alpha\,|E_G| + \sum_{u\in[n]} \sum_{v\in[n]} d_G(u,v)$$

Qual o valor do custo social ótimo?

Teorema:
Se $\alpha \geq 2$ então qualquer estrela completa é solução ótima.
Se $\alpha \leq 2$ então o grafo completo é solução ótima.

Custo e ótimo social

O custo social de um grafo G é

$$\mathrm{cs}(G) \;=\; \alpha\,|E_G| + \sum_{u\in[n]} \sum_{v\in[n]} d_G(u,v)$$

Qual o valor do custo social ótimo?

Teorema:
Se $\alpha \geq 2$ então qualquer estrela completa é solução ótima.
Se $\alpha \leq 2$ então o grafo completo é solução ótima.

Prova: Solução com m aresta tem custo pelo menos

$$2(n(n-1)-2m)+2m+\alpha\, m \;=\; 2n(n-1)-(2-\alpha)m.$$

Custo e ótimo social

O custo social de um grafo G é

$$\mathrm{cs}(G) \;=\; \alpha\,|E_G| + \sum_{u\in[n]} \sum_{v\in[n]} d_G(u,v)$$

Qual o valor do custo social ótimo?

Teorema:
Se $\alpha \geq 2$ então qualquer estrela completa é solução ótima.
Se $\alpha \leq 2$ então o grafo completo é solução ótima.

Prova: Solução com m aresta tem custo pelo menos

$$2(n(n-1)-2m)+2m+\alpha\, m \;=\; 2n(n-1)-(2-\alpha)m.$$

Se $\alpha < 2$, só há uma solução ótima: o grafo completo.

Custo e ótimo social

O custo social de um grafo G é

$$\mathrm{cs}(G) \;=\; \alpha\,|E_G| + \sum_{u\in[n]} \sum_{v\in[n]} d_G(u,v)$$

Teorema:
Se $\alpha \geq 2$ então qualquer estrela completa é solução ótima.
Se $\alpha \leq 2$ então o grafo completo é solução ótima.

Prova: Solução com m aresta tem custo pelo menos

$$2(n(n-1)-2m)+2m+\alpha\, m \;=\; 2n(n-1)-(2-\alpha)m.$$

Se $\alpha < 2$, só há uma solução ótima: o grafo completo.

Custo e ótimo social

O custo social de um grafo G é

$$\mathrm{cs}(G) \;=\; \alpha\,|E_G| + \sum_{u\in[n]} \sum_{v\in[n]} d_G(u,v)$$

Teorema:
Se $\alpha \geq 2$ então qualquer estrela completa é solução ótima.
Se $\alpha \leq 2$ então o grafo completo é solução ótima.

Prova: Solução com m aresta tem custo pelo menos

$$2(n(n-1)-2m)+2m+\alpha\,m \;=\; 2n(n-1)-(2-\alpha)m.$$

Se $\alpha < 2$, só há uma solução ótima: o grafo completo.

Se $\alpha > 2$, qualquer estrela completa é ótima
(tem m mínimo possível e minimiza a soma das distâncias).

Custo e ótimo social

O custo social de um grafo G é

$$\mathrm{cs}(G) \;=\; \alpha\,|E_G| + \sum_{u\in[n]} \sum_{v\in[n]} d_G(u,v)$$

Teorema:
Se $\alpha \geq 2$ então qualquer estrela completa é solução ótima.
Se $\alpha \leq 2$ então o grafo completo é solução ótima.

Prova: Solução com m aresta tem custo pelo menos

$$2(n(n-1)-2m) + 2m + \alpha\, m \;=\; 2n(n-1) - (2-\alpha)m.$$

Se $\alpha < 2$, só há uma solução ótima: o grafo completo.

Se $\alpha > 2$, qualquer estrela completa é ótima.

Se $\alpha = 2$, qualquer grafo com estrela completa é ótimo.

Preço da estabilidade

Lema:

Se $\alpha \geq 1$ então qualquer estrela completa é um equilíbrio.

Se $\alpha \leq 1$ então o grafo completo é um equilíbrio.

Teorema:

Se $\alpha \geq 2$ então qualquer estrela completa é solução ótima.

Se $\alpha \leq 2$ então o grafo completo é solução ótima.

Preço da estabilidade

Lema:

Se $\alpha \geq 1$ então qualquer estrela completa é um equilíbrio.
Se $\alpha \leq 1$ então o grafo completo é um equilíbrio.

Teorema:

Se $\alpha \geq 2$ então qualquer estrela completa é solução ótima.
Se $\alpha \leq 2$ então o grafo completo é solução ótima.

Juntando os dois, é fácil ver que
o preço da estabilidade é 1 para $\alpha \leq 1$ e $\alpha \geq 2$:
existe um equilíbrio que é solução ótima.

Preço da estabilidade

Lema:

Se $\alpha \geq 1$ então qualquer estrela completa é um equilíbrio.
Se $\alpha \leq 1$ então o grafo completo é um equilíbrio.

Teorema:

Se $\alpha \geq 2$ então qualquer estrela completa é solução ótima.
Se $\alpha \leq 2$ então o grafo completo é solução ótima.

Juntando os dois, é fácil ver que
o preço da estabilidade é 1 para $\alpha \leq 1$ e $\alpha \geq 2$:
existe um equilíbrio que é solução ótima.

Teorema:

Para $1 < \alpha < 2$, o preço da estabilidade é no máximo $\frac{4}{3}$.

Preço da estabilidade

Teorema:

Para $1 < \alpha < 2$, o preço da estabilidade é no máximo $\frac{4}{3}$.

Preço da estabilidade

Teorema:
Para $1 < \alpha < 2$, o preço da estabilidade é no máximo $\frac{4}{3}$.

Prova: O grafo completo é única solução ótima, e tem custo

$$\begin{aligned} 2n(n-1) - (2-\alpha)m &= 2n(n-1) - (2-\alpha)\frac{n(n-1)}{2} \\ &= n(n-1) + \alpha\frac{n(n-1)}{2} \;>\; \frac{3n(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

Preço da estabilidade

Teorema:
Para $1 < \alpha < 2$, o preço da estabilidade é no máximo $\frac{4}{3}$.

Prova: O grafo completo é única solução ótima, e tem custo

$$\begin{aligned} 2n(n-1) - (2-\alpha)m &= 2n(n-1) - (2-\alpha)\frac{n(n-1)}{2} \\ &= n(n-1) + \alpha\frac{n(n-1)}{2} > \frac{3n(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

Por outro lado, estrelas completas são equilíbrios de custo

$$2n(n-1) - (2-\alpha)m = 2n(n-1) - (2-\alpha)(n-1) < 2n(n-1).$$

Preço da estabilidade

Teorema:
Para $1 < \alpha < 2$, o preço da estabilidade é no máximo $\frac{4}{3}$.

Prova: O grafo completo é única solução ótima, e tem custo

$$
\begin{aligned}
2n(n-1) - (2-\alpha)m &= 2n(n-1) - (2-\alpha)\frac{n(n-1)}{2} \\
&= n(n-1) + \alpha\frac{n(n-1)}{2} > \frac{3n(n-1)}{2}.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, estrelas completas são equilíbrios de custo

$$2n(n-1) - (2-\alpha)m = 2n(n-1) - (2-\alpha)(n-1) < 2n(n-1).$$

Logo $\mathrm{PoA} < \frac{2 \cdot 2n(n-1)}{3n(n-1)} = \frac{4}{3}$.

Preço da anarquia

Para $\alpha < 1$, o grafo completo é o único equilíbrio,
e é solução ótima: o preço da anarquia é 1 para $\alpha < 1$.

Suponha então que $\alpha \geq 1$.

Fabrikant, Luthra, Maneva, e Papadimitriou (2003)

Lema: Se um grafo é um equilíbro com diâmetro d,
então seu custo social é $\mathrm{O}(d)$ vezes o custo social ótimo.

Preço da anarquia

Para $\alpha < 1$, o grafo completo é o único equilíbrio,
e é solução ótima: o preço da anarquia é 1 para $\alpha < 1$.

Suponha então que $\alpha \geq 1$.

Fabrikant, Luthra, Maneva, e Papadimitriou (2003)

Lema: Se um grafo é um equilíbro com diâmetro d,
então seu custo social é $\mathrm{O}(d)$ vezes o custo social ótimo.

Diâmetro: distância máxima entre dois vértices do grafo.

Preço da anarquia

Para $\alpha < 1$, o grafo completo é o único equilíbrio,
e é solução ótima: o preço da anarquia é 1 para $\alpha < 1$.

Suponha então que $\alpha \geq 1$.

Fabrikant, Luthra, Maneva, e Papadimitriou (2003)

Lema: Se um grafo é um equilíbro com diâmetro d,
então seu custo social é $\mathrm{O}(d)$ vezes o custo social ótimo.

Diâmetro: distância máxima entre dois vértices do grafo.

Teorema: O diâmetro de um equilíbrio é no máximo $2\sqrt{\alpha}$,
e portanto o preço da anarquia é $\mathrm{O}(\sqrt{\alpha})$.

(Prova na próxima aula.)