Jogo de balanceamento de carga

Dados:

- n tarefas
- q máquinas
- w_i: peso da tarefa i
- s_j: velocidade da máquina j

Jogo de balanceamento de carga

Dados:

- n tarefas
- q máquinas
- w_i: peso da tarefa i
- s_j: velocidade da máquina j

Cada jogador controla uma tarefa.

Conjuntos de estratégias $S_i = [q]$:
o jogador escolhe a qual máquina atribuir sua tarefa.

Jogo de balanceamento de carga

Dados:

- n tarefas
- q máquinas
- w_i: peso da tarefa i
- s_j: velocidade da máquina j

Cada jogador controla uma tarefa.

Conjuntos de estratégias $S_i = [q]$:
o jogador escolhe a qual máquina atribuir sua tarefa.

Vetor de estratégias: atribuição $A : [n] \to [q]$.

Jogo de balanceamento de carga

Dados:

- n tarefas
- q máquinas
- w_i: peso da tarefa i
- s_j: velocidade da máquina j

Cada jogador controla uma tarefa.

Conjuntos de estratégias $S_i = [q]$:
o jogador escolhe a qual máquina atribuir sua tarefa.

Vetor de estratégias: atribuição $A : [n] \to [q]$.

Custo de A para i, onde $j = A(i)$: $\quad \mathrm{custo}_i(A) = \sum_{k:A(k)=j} \frac{w_k}{s_j}$.

Caso de máquinas relacionadas

Teorema: Para o jogo de balanceamento de carga em m máquinas relacionadas, $\mathrm{PoA}(m) = \Theta(\frac{\lg m}{\lg \lg m})$.

Primeira parte (aula passada):
Mostrar que para jogos $J = (n, m, w, s)$ e atribuições $A : [n] \to [m]$ em equilíbrio vale que

$$\mathrm{custo}(A) = \mathrm{O}\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right).$$

Caso de máquinas relacionadas

Teorema: Para o jogo de balanceamento de carga em m máquinas relacionadas, $\mathrm{PoA}(m) = \Theta(\frac{\lg m}{\lg\lg m})$.

Primeira parte (aula passada):
Mostrar que para jogos $J = (n, m, w, s)$ e atribuições $A : [n] \to [m]$ em equilíbrio vale que

$$\mathrm{custo}(A) = \mathrm{O}(\frac{\lg m}{\lg\lg m}).$$

Segunda parte:
Apresentar jogo $J = (n, m, w, s)$ e atribuição $A : [n] \to [m]$ em equilíbrio tal que

$$\mathrm{custo}(A) = \Omega(\frac{\lg m}{\lg\lg m}).$$

Da aula anterior

Instância do jogo: $J = (n, m, w, s)$

Velocidades das máquinas: $s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_m$,
e $L = [1, 2, \ldots, m]$ é a lista das máquinas em ordem de velocidade.

Da aula anterior

Instância do jogo: $J = (n, m, w, s)$

Velocidades das máquinas: $s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_m$,
e $L = [1, 2, \ldots, m]$ é a lista das máquinas em ordem de velocidade.

Para $k = 0, 1, \ldots$
L_k: maior prefixo de L de máquinas com carga $\geq k\mathrm{OPT}(J)$.

Da aula anterior

Instância do jogo: $J = (n, m, w, s)$

Velocidades das máquinas: $s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_m$,
e $L = [1, 2, \ldots, m]$ é a lista das máquinas em ordem de velocidade.

Para $k = 0, 1, \ldots$
L_k: maior prefixo de L de máquinas com carga $\geq k\mathrm{OPT}(J)$.

Seja A^* uma atribuição ótima (de makespan mínimo).

Ficamos devendo a prova do seguinte:

Lema: $A^*(i) \in L_k$ para toda tarefa i tq $A(i) \in L_{k+1}$.

Prova do lema

Lema: $A^*(i) \in L_k$ para toda tarefa i tq $A(i) \in L_{k+1}$.

Prova do lema

Lema: $A^*(i) \in L_k$ para toda tarefa i tq $A(i) \in L_{k+1}$.

Prova: Se $L_k = L$, nada a provar.

Prova do lema

Lema: $A^*(i) \in L_k$ para toda tarefa i tq $A(i) \in L_{k+1}$.

Prova: Se $L_k = L$, nada a provar.

Seja q máquina de menor índice em $L \setminus L_k$.

Prova do lema

Lema: $A^*(i) \in L_k$ para toda tarefa i tq $A(i) \in L_{k+1}$.

Prova: Se $L_k = L$, nada a provar.

Seja q máquina de menor índice em $L \setminus L_k$.

Temos que a carga $\ell_q < k\,\mathrm{OPT}(J)$.

Prova do lema

Lema: $A^*(i) \in L_k$ para toda tarefa i tq $A(i) \in L_{k+1}$.

Prova: Se $L_k = L$, nada a provar.

Seja q máquina de menor índice em $L \setminus L_k$.

Temos que a carga $\ell_q < k\,\mathrm{OPT}(J)$.

$\ell_{A(i)} \geq (k+1)\,\mathrm{OPT}(J)$ para toda tarefa i tq $A(i) \in L_{k+1}$.

Prova do lema

Lema: $A^*(i) \in L_k$ para toda tarefa i tq $A(i) \in L_{k+1}$.

Prova: Se $L_k = L$, nada a provar.

Seja q máquina de menor índice em $L \setminus L_k$.

Temos que a carga $\ell_q < k\,\mathrm{OPT}(J)$.

$\ell_{A(i)} \geq (k+1)\,\mathrm{OPT}(J)$ para toda tarefa i tq $A(i) \in L_{k+1}$.

Se $w_i \leq s_q\,\mathrm{OPT}(J)$, então i teria incentivo para ir para q:

$$\ell_q + \frac{w_i}{s_q} < k\,\mathrm{OPT}(J) + \mathrm{OPT}(J) = (k+1)\mathrm{OPT}(J) \leq \ell_{A(i)},$$

contradição.

Prova do lema

Lema: $A^*(i) \in L_k$ para toda tarefa i tq $A(i) \in L_{k+1}$.

Prova: Seja q máquina de menor índice em $L \setminus L_k$.

Temos que a carga $\ell_q < k\,\mathrm{OPT}(J)$.

Para toda tarefa i tq $A(i) \in L_{k+1}$,

$$\ell_{A(i)} \geq (k+1)\,\mathrm{OPT}(J) \quad \text{e} \quad w_i > s_q\,\mathrm{OPT}(J).$$

Prova do lema

Lema: $A^*(i) \in L_k$ para toda tarefa i tq $A(i) \in L_{k+1}$.

Prova: Seja q máquina de menor índice em $L \setminus L_k$.

Temos que a carga $\ell_q < k\,\mathrm{OPT}(J)$.

Para toda tarefa i tq $A(i) \in L_{k+1}$,

$$\ell_{A(i)} \geq (k+1)\,\mathrm{OPT}(J) \quad \text{e} \quad w_i > s_q\,\mathrm{OPT}(J).$$

Por contradição, suponha que $j = A^*(i) \notin L_k$.

Prova do lema

Lema: $A^*(i) \in L_k$ para toda tarefa i tq $A(i) \in L_{k+1}$.

Prova: Seja q máquina de menor índice em $L \setminus L_k$.

Temos que a carga $\ell_q < k\,\mathrm{OPT}(J)$.

Para toda tarefa i tq $A(i) \in L_{k+1}$,

$$\ell_{A(i)} \geq (k+1)\,\mathrm{OPT}(J) \quad \text{e} \quad w_i > s_q\,\mathrm{OPT}(J).$$

Por contradição, suponha que $j = A^*(i) \notin L_k$.

Então, como $s_j \leq s_q$, a carga de j em A^* seria

$$\geq \frac{w_i}{s_j} > \frac{s_q\,\mathrm{OPT}(J)}{s_j} \geq \mathrm{OPT}(J), \quad \text{contradição.} \quad \square$$

Segunda parte

Γ^{-1} denota a inversa da função gama, $\Gamma(k) = (k-1)!$.

Lema: Existe um jogo $J = (n, m, w, s)$ e atribuição $A : [n] \to [m]$ em equilíbrio tq

$$\text{custo}(A) \;\geq\; \frac{1}{2}\left(\Gamma^{-1}(m) - 2 - \text{o}(1)\right)\text{OPT}(J).$$

Segunda parte

Γ^{-1} denota a inversa da função gama, $\Gamma(k) = (k-1)!$.

Lema: Existe um jogo $J = (n, m, w, s)$ e atribuição $A : [n] \to [m]$ em equilíbrio tq

$$\mathrm{custo}(A) \;\geq\; \frac{1}{2}\left(\Gamma^{-1}(m) - 2 - \mathrm{o}(1)\right)\mathrm{OPT}(J).$$

Prova: Seja $q = \lfloor \Gamma^{-1}(m/3) - 1 \rfloor$ e sejam $G_0, \ldots, G_q$ grupos disjuntos de máquinas.

Segunda parte

Γ^{-1} denota a inversa da função gama, $\Gamma(k) = (k-1)!$.

Lema: Existe um jogo $J = (n, m, w, s)$ e atribuição $A : [n] \to [m]$ em equilíbrio tq

$$\mathrm{custo}(A) \;\geq\; \frac{1}{2}\left(\Gamma^{-1}(m) - 2 - \mathrm{o}(1)\right)\mathrm{OPT}(J).$$

Prova: Seja $q = \lfloor \Gamma^{-1}(m/3) - 1 \rfloor$ e
sejam $G_0, \ldots, G_q$ grupos disjuntos de máquinas.

Grupo G_k: $\frac{q!}{k!}$ máquinas com velocidade 2^k,
cada uma com k tarefas de peso 2^k atribuídas por A.

Segunda parte

Lema: Existe um jogo $J = (n, m, w, s)$ e atribuição A em equilíbrio tq $\mathrm{custo}(A) \;\geq\; \frac{1}{2}\left(\Gamma^{-1}(m) - 2 - \mathrm{o}(1)\right)\mathrm{OPT}(J)$.

Prova: Seja $q = \lfloor \Gamma^{-1}(m/3) - 1 \rfloor$ e
sejam $G_0, \ldots, G_q$ grupos disjuntos de máquinas.

Grupo G_k: $\frac{q!}{k!}$ máquinas com velocidade 2^k,
cada uma com k tarefas de peso 2^k atribuídas por A.

Segunda parte

Lema: Existe um jogo $J = (n, m, w, s)$ e atribuição A em equilíbrio tq $\mathrm{custo}(A) \;\geq\; \frac{1}{2}\left(\Gamma^{-1}(m) - 2 - \mathrm{o}(1)\right)\mathrm{OPT}(J)$.

Prova: Seja $q = \lfloor \Gamma^{-1}(m/3) - 1 \rfloor$ e sejam $G_0, \ldots, G_q$ grupos disjuntos de máquinas.

Grupo G_k: $\frac{q!}{k!}$ máquinas com velocidade 2^k, cada uma com k tarefas de peso 2^k atribuídas por A.

Total de máquinas:

$$\sum_{k=0}^{q} |G_k| = \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} = q! \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} \leq 3\,\Gamma(q+1) \leq m.$$

Segunda parte

Lema: Existe um jogo $J = (n, m, w, s)$ e atribuição A em equilíbrio tq $\mathrm{custo}(A) \;\geq\; \frac{1}{2}\left(\Gamma^{-1}(m) - 2 - \mathrm{o}(1)\right)\mathrm{OPT}(J)$.

Prova: Seja $q = \lfloor \Gamma^{-1}(m/3) - 1 \rfloor$ e
sejam $G_0, \ldots, G_q$ grupos disjuntos de máquinas.

Grupo G_k: $\frac{q!}{k!}$ máquinas com velocidade 2^k,
cada uma com k tarefas de peso 2^k atribuídas por A.

Total de máquinas:

$$\sum_{k=0}^{q} |G_k| = \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} = q! \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} \leq 3\,\Gamma(q+1) \leq m.$$

Complete m com máquinas sem grupo e vazias de velocidade 1 (como as de G_0).

A está em equilíbrio?

Seja $q = \lfloor \Gamma^{-1}(m/3) - 1 \rfloor$ e
sejam $G_0, \ldots, G_q$ grupos disjuntos de máquinas.

Grupo G_k: $\frac{q!}{k!}$ máquinas com velocidade 2^k,
cada uma com k tarefas de peso 2^k atribuídas por A.

A está em equilíbrio?

Seja $q = \lfloor \Gamma^{-1}(m/3) - 1 \rfloor$ e
sejam $G_0, \ldots, G_q$ grupos disjuntos de máquinas.

Grupo G_k: $\frac{q!}{k!}$ máquinas com velocidade 2^k,
cada uma com k tarefas de peso 2^k atribuídas por A.

Carga em A de máquina em G_k é k.

A está em equilíbrio?

Seja $q = \lfloor \Gamma^{-1}(m/3) - 1 \rfloor$ e
sejam $G_0, \ldots, G_q$ grupos disjuntos de máquinas.

Grupo G_k: $\frac{q!}{k!}$ máquinas com velocidade 2^k,
cada uma com k tarefas de peso 2^k atribuídas por A.

Carga em A de máquina em G_k é k.

Então tarefa em máquina de G_k não quer mudar
para máquina em G_j com $j \geq k$ (que tem carga $j \geq k$),

A está em equilíbrio?

Seja $q = \lfloor \Gamma^{-1}(m/3) - 1 \rfloor$ e
sejam $G_0, \ldots, G_q$ grupos disjuntos de máquinas.

Grupo G_k: $\frac{q!}{k!}$ máquinas com velocidade 2^k,
cada uma com k tarefas de peso 2^k atribuídas por A.

Carga em A de máquina em G_k é k.

Então tarefa em máquina de G_k não quer mudar
para máquina em G_j com $j \geq k$ (que tem carga $j \geq k$),

nem para máquina de G_j com $j < k$, pois

$$j + \frac{2^k}{2^j} = j + 2^{k-j} \geq j + (k - j + 1) = k + 1,$$

já que $2^t \geq t + 1$ pra todo $t \geq 1$. $\square$

Jogo e equilíbrio

Seja $q = \lfloor \Gamma^{-1}(m/3) - 1 \rfloor$ e
sejam $G_0, \ldots, G_q$ grupos disjuntos de máquinas.

Grupo G_k: $\frac{q!}{k!}$ máquinas com velocidade 2^k,
cada uma com k tarefas de peso 2^k atribuídas por A.

A é um equilíbrio de custo social q.

Jogo e equilíbrio

Seja $q = \lfloor \Gamma^{-1}(m/3) - 1 \rfloor$ e
sejam $G_0, \ldots, G_q$ grupos disjuntos de máquinas.

Grupo G_k: $\frac{q!}{k!}$ máquinas com velocidade 2^k,
cada uma com k tarefas de peso 2^k atribuídas por A.

A é um equilíbrio de custo social q.

Vamos mostrar que $\mathrm{OPT}(J) \leq 2$.

Jogo e equilíbrio

Seja $q = \lfloor \Gamma^{-1}(m/3) - 1 \rfloor$ e
sejam $G_0, \ldots, G_q$ grupos disjuntos de máquinas.

Grupo G_k: $\frac{q!}{k!}$ máquinas com velocidade 2^k,
cada uma com k tarefas de peso 2^k atribuídas por A.

A é um equilíbrio de custo social q.

Vamos mostrar que $\mathrm{OPT}(J) \leq 2$.

Considere atribuição A^* que atribui a máquinas de G_{k-1}
as tarefas que A atribuiu a máquinas de G_k.

Jogo e equilíbrio

Seja $q = \lfloor \Gamma^{-1}(m/3) - 1 \rfloor$ e
sejam $G_0, \ldots, G_q$ grupos disjuntos de máquinas.

Grupo G_k: $\frac{q!}{k!}$ máquinas com velocidade 2^k,
cada uma com k tarefas de peso 2^k atribuídas por A.

A é um equilíbrio de custo social q.

Vamos mostrar que $\mathrm{OPT}(J) \leq 2$.

Considere atribuição A^* que atribui a máquinas de G_{k-1}
as tarefas que A atribuiu a máquinas de G_k.

Tarefas que A atribuiu a G_k: $\quad k|G_k| = \frac{q!k}{k!} = \frac{q!}{(k-1)!} = |G_{k-1}|$.

Jogo e equilíbrio

Seja $q = \lfloor \Gamma^{-1}(m/3) - 1 \rfloor$ e
sejam $G_0, \ldots, G_q$ grupos disjuntos de máquinas.

Grupo G_k: $\frac{q!}{k!}$ máquinas com velocidade 2^k,
cada uma com k tarefas de peso 2^k atribuídas por A.

A é um equilíbrio de custo social q.

Vamos mostrar que $\mathrm{OPT}(J) \leq 2$.

Considere atribuição A^* que atribui a máquinas de G_{k-1}
as tarefas que A atribuiu a máquinas de G_k.

Tarefas que A atribuiu a G_k: $\quad k|G_k| = \frac{q!k}{k!} = \frac{q!}{(k-1)!} = |G_{k-1}|$.

Uma tarefa em cada máquina, com custo de $\frac{2^k}{2^{k-1}} = 2$.

Conclusão

$G_0, \ldots, G_q$ grupos de máquinas com $q = \lfloor \Gamma^{-1}(\frac{m}{3}) - 1 \rfloor$.

Grupo G_k: $\frac{q!}{k!}$ máquinas com velocidade 2^k,
cada uma com k tarefas de peso 2^k atribuídas por A.

A é um equilíbrio de custo social q e $\mathrm{OPT}(J) \leq 2$.

Conclusão

$G_0, \ldots, G_q$ grupos de máquinas com $q = \lfloor \Gamma^{-1}(\frac{m}{3}) - 1 \rfloor$.

Grupo G_k: $\frac{q!}{k!}$ máquinas com velocidade 2^k,
cada uma com k tarefas de peso 2^k atribuídas por A.

A é um equilíbrio de custo social q e $\mathrm{OPT}(J) \leq 2$.

Preço da anarquia deste jogo: $\geq \frac{q}{2} = \frac{\lfloor \Gamma^{-1}(m/3) - 1 \rfloor}{2}$

Conclusão

$G_0, \ldots, G_q$ grupos de máquinas com $q = \lfloor \Gamma^{-1}(\frac{m}{3}) - 1 \rfloor$.

Grupo G_k: $\frac{q!}{k!}$ máquinas com velocidade 2^k,
cada uma com k tarefas de peso 2^k atribuídas por A.

A é um equilíbrio de custo social q e $\mathrm{OPT}(J) \leq 2$.

Preço da anarquia deste jogo: $\geq \frac{q}{2} = \frac{\lfloor \Gamma^{-1}(m/3) - 1 \rfloor}{2}$

Como $\Gamma^{-1}(m) = \Theta\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right)$,
existem c e m_0 tq $\Gamma^{-1}(m) \geq c\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right)$, para $m \geq m_0$.

Conclusão

$G_0, \ldots, G_q$ grupos de máquinas com $q = \lfloor \Gamma^{-1}(\frac{m}{3}) - 1 \rfloor$.

Grupo G_k: $\frac{q!}{k!}$ máquinas com velocidade 2^k,
cada uma com k tarefas de peso 2^k atribuídas por A.

A é um equilíbrio de custo social q e $\mathrm{OPT}(J) \leq 2$.

Preço da anarquia deste jogo: $\geq \frac{q}{2} = \frac{\lfloor \Gamma^{-1}(m/3) - 1 \rfloor}{2}$

Como $\Gamma^{-1}(m) = \Theta\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right)$,
existem c e m_0 tq $\Gamma^{-1}(m) \geq c\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right)$, para $m \geq m_0$.

Então, para $m \geq 3m_0$, o preço da anarquia é

$$\geq \frac{\lfloor \Gamma^{-1}(m/3) - 1 \rfloor}{2} \geq \frac{\lfloor c\left(\frac{\lg m/3}{\lg \lg m/3}\right) - 1 \rfloor}{2} = \Omega\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right).$$

Tempo de convergência

No caso de máquinas relacionadas,
não se conhece resultado como o para máquinas idênticas.

Tempo de convergência

No caso de máquinas relacionadas,
não se conhece resultado como o para máquinas idênticas.

Mas podemos computar um equilíbrio eficientemente.

Tempo de convergência

No caso de máquinas relacionadas,
não se conhece resultado como o para máquinas idênticas.

Mas podemos computar um equilíbrio eficientemente.

Algoritmo LPT (*largest processing time*):

Tempo de convergência

No caso de máquinas relacionadas,
não se conhece resultado como o para máquinas idênticas.

Mas podemos computar um equilíbrio eficientemente.

Algoritmo LPT (*largest processing time*):

Atribua tarefas em ordem decrescente de peso,

Tempo de convergência

No caso de máquinas relacionadas,
não se conhece resultado como o para máquinas idênticas.

Mas podemos computar um equilíbrio eficientemente.

Algoritmo LPT (*largest processing time*):

Atribua tarefas em ordem decrescente de peso,

pondo-as em máquinas que minimizem o seu custo.

Tempo de convergência

No caso de máquinas relacionadas,
não se conhece resultado como o para máquinas idênticas.

Mas podemos computar um equilíbrio eficientemente.

Algoritmo LPT (*largest processing time*):

Atribua tarefas em ordem decrescente de peso,

pondo-as em máquinas que minimizem o seu custo.

Teorema: A atribuição calculada por LPT é um equilíbrio.

Tempo de convergência

No caso de máquinas relacionadas,
não se conhece resultado como o para máquinas idênticas.

Mas podemos computar um equilíbrio eficientemente.

Algoritmo LPT (*largest processing time*):

Atribua tarefas em ordem decrescente de peso,

pondo-as em máquinas que minimizem o seu custo.

Teorema: A atribuição calculada por LPT é um equilíbrio.

Prova: Por indução no número de tarefas (colocadas).

Tempo de convergência

No caso de máquinas relacionadas,
não se conhece resultado como o para máquinas idênticas.

Mas podemos computar um equilíbrio eficientemente.

Algoritmo LPT (*largest processing time*):

Atribua tarefas em ordem decrescente de peso,

pondo-as em máquinas que minimizem o seu custo.

Teorema: A atribuição calculada por LPT é um equilíbrio.

Prova: Por indução no número de tarefas (colocadas).

Após colocarmos a última tarefa, apenas outras tarefas
da mesma máquina podem ter se tornado insatisfeitas.

LPT devolve um equilíbrio

Algoritmo LPT (*largest processing time*):

Atribua tarefas em ordem decrescente de peso,

pondo-as em máquinas que minimizem o seu custo.

Teorema: A atribuição calculada por LPT é um equilíbrio.

Prova: Por indução no número de tarefas (colocadas).

Seja t a última tarefa, e j^* a máquina a que foi atribuída.

Apenas tarefas alocadas a j^* podem estar insatisfeitas.

LPT devolve um equilíbrio

Algoritmo LPT (*largest processing time*):

Atribua tarefas em ordem decrescente de peso,

pondo-as em máquinas que minimizem o seu custo.

Teorema: A atribuição calculada por LPT é um equilíbrio.

Prova: Por indução no número de tarefas (colocadas).

Seja t a última tarefa, e j^* a máquina a que foi atribuída.

Apenas tarefas alocadas a j^* podem estar insatisfeitas.

Seja $i < t$ uma tarefa alocada a j^*. Lembre-se que $w_i \geq w_t$.

LPT devolve um equilíbrio

Algoritmo LPT (*largest processing time*):

Atribua tarefas em ordem decrescente de peso,

pondo-as em máquinas que minimizem o seu custo.

Teorema: A atribuição calculada por LPT é um equilíbrio.

Prova: Por indução no número de tarefas (colocadas).

Seja t a última tarefa, e j^* a máquina a que foi atribuída.

Apenas tarefas alocadas a j^* podem estar insatisfeitas.

Seja $i < t$ uma tarefa alocada a j^*. Lembre-se que $w_i \geq w_t$.

Então $\frac{\ell(j^*)}{s_{j^*}} \leq \frac{\ell(j)+w_t}{s_j} \leq \frac{\ell(j)+w_i}{s_j}$, para todo j em $[m]$
(onde $\ell(j)$ é a soma dos pesos das tarefas atribuídas a j).

LPT devolve um equilíbrio

Algoritmo LPT (*largest processing time*):

Atribua tarefas em ordem decrescente de peso,

pondo-as em máquinas que minimizem o seu custo.

Teorema: A atribuição calculada por LPT é um equilíbrio.

Prova: Por indução no número de tarefas (colocadas).

Seja t a última tarefa, e j^* a máquina a que foi atribuída.

Apenas tarefas alocadas a j^* podem estar insatisfeitas.

Seja $i < t$ uma tarefa alocada a j^*. Lembre-se que $w_i \geq w_t$.

Então $\frac{\ell(j^*)}{s_{j^*}} \leq \frac{\ell(j)+w_t}{s_j} \leq \frac{\ell(j)+w_i}{s_j}$, para todo j em $[m]$

Logo i está satisfeita e a atribuição está em equilíbrio. $\square$

Jogo de balanceamento de carga

Dados:

- n tarefas
- q máquinas
- w_i: peso da tarefa i
- s_j: velocidade da máquina j

Jogo de balanceamento de carga

Dados:

- n tarefas
- q máquinas
- w_i: peso da tarefa i
- s_j: velocidade da máquina j

Jogo com estratégias mistas

Conjunto $S = [q]$ e cada jogador escolhe
uma distribuição de probabilidade σ_i em S.

Jogo de balanceamento de carga

Dados:

- n tarefas
- q máquinas
- w_i: peso da tarefa i
- s_j: velocidade da máquina j

Jogo com estratégias mistas

Conjunto $S = [q]$ e cada jogador escolhe
uma distribuição de probabilidade σ_i em S.

Vetor de estratégias mistas: $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$

Jogo de balanceamento de carga

Dados:

- n tarefas
- q máquinas
- w_i: peso da tarefa i
- s_j: velocidade da máquina j

Jogo com estratégias mistas

Conjunto $S = [q]$ e cada jogador escolhe uma distribuição de probabilidade σ_i em S.

Vetor de estratégias mistas: $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$

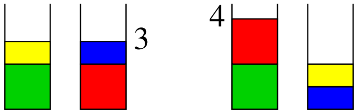
Custo de σ para i: $\mathrm{custo}_i(\sigma) = \sum_{A \in S^n} \mathrm{custo}_i(A)\,\mathsf{Pr}_\sigma[A]$.

Exemplo

Duas máquinas idênticas,
duas tarefas de peso 2, duas de peso 1.

Exemplo

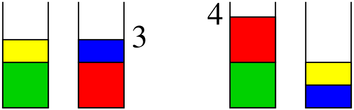
Duas máquinas idênticas,
duas tarefas de peso 2, duas de peso 1.



Pior equilíbrio de estratégias puras tem makespan 4.

Exemplo

Duas máquinas idênticas,
duas tarefas de peso 2, duas de peso 1.



Pior equilíbrio de estratégias puras tem makespan 4.

Vetor de estratégias mistas: cada tarefa escolhe a máquina uniforme e independentemente.

$$\mathrm{E}[\ell(j)] \;=\; 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \;=\; \frac{4}{2} + \frac{2}{2} \;=\; 3$$

Exemplo

Duas máquinas idênticas,
duas tarefas de peso 2, duas de peso 1.

Vetor de estratégias mistas: cada tarefa escolhe a máquina uniforme e independentemente.

$$\mathrm{E}[\ell(j)] \; = \; 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \; = \; \frac{4}{2} + \frac{2}{2} \; = \; 3$$

Exemplo

Duas máquinas idênticas,
duas tarefas de peso 2, duas de peso 1.

Vetor de estratégias mistas: cada tarefa escolhe a máquina uniforme e independentemente.

$$\mathrm{E}[\ell(j)] \;=\; 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \;=\; \frac{4}{2} + \frac{2}{2} \;=\; 3$$

Custo c_{ij} para tarefa i ficar numa máquina específica j:

$$\begin{aligned} c_i^j &= \mathrm{E}[\ell(j)] + \frac{1}{2} \cdot 2 \;=\; 4 & \text{se } w_i = 2 \\ &= \mathrm{E}[\ell(j)] + \frac{1}{2} \cdot 1 \;=\; 3{,}5 & \text{se } w_i = 1 \end{aligned}$$

Exemplo

Duas máquinas idênticas,
duas tarefas de peso 2, duas de peso 1.

Vetor de estratégias mistas: cada tarefa escolhe a máquina uniforme e independentemente.

$$\mathrm{E}[\ell(j)] \;=\; 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \;=\; \frac{4}{2} + \frac{2}{2} \;=\; 3$$

Custo c_{ij} para tarefa i ficar numa máquina específica j:

$$\begin{aligned} c_i^j &= \mathrm{E}[\ell(j)] + \frac{1}{2} \cdot 2 = 4 && \text{se } w_i = 2 \\ &= \mathrm{E}[\ell(j)] + \frac{1}{2} \cdot 1 = 3{,}5 && \text{se } w_i = 1 \end{aligned}$$

Independe do j, por isso é um equilíbrio.

Exemplo

Duas máquinas idênticas,
duas tarefas de peso 2, duas de peso 1.

Vetor de estratégias mistas: cada tarefa escolhe a máquina uniforme e independentemente.

Este é um equilíbrio.

Exemplo

Duas máquinas idênticas,
duas tarefas de peso 2, duas de peso 1.

Vetor de estratégias mistas: cada tarefa escolhe a máquina uniforme e independentemente.

Este é um equilíbrio.

Qual é o makespan esperado?

Exemplo

Duas máquinas idênticas,
duas tarefas de peso 2, duas de peso 1.

Vetor de estratégias mistas: cada tarefa escolhe a máquina uniforme e independentemente.

Este é um equilíbrio.

Qual é o makespan esperado?

$$\frac{1}{16}(2 \cdot 6 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 4 + 4 \cdot 3) \ = \ \frac{1}{16}(32 + 36) \ = \ 4{,}25$$

Exemplo

Duas máquinas idênticas,
duas tarefas de peso 2, duas de peso 1.

Vetor de estratégias mistas: cada tarefa escolhe a máquina uniforme e independentemente.

Este é um equilíbrio.

Qual é o makespan esperado?

$$\frac{1}{16}(2 \cdot 6 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 4 + 4 \cdot 3) \;=\; \frac{1}{16}(32 + 36) \;=\; 4{,}25$$

Isso é pior que o pior vetor de estratégias puras.

Quão pior pode ser?

m máquinas idênticas (velocidade 1) e n tarefas de peso 1

Quão pior pode ser?

m máquinas idênticas (velocidade 1) e n tarefas de peso 1

Cada tarefa escolhe uma máquina com probabilidade $1/m$.

Quão pior pode ser?

m máquinas idênticas (velocidade 1) e n tarefas de peso 1

Cada tarefa escolhe uma máquina com probabilidade $1/m$.

Novamente é um equilíbrio.

Quão pior pode ser?

m máquinas idênticas (velocidade 1) e n tarefas de peso 1

Cada tarefa escolhe uma máquina com probabilidade $1/m$.

Novamente é um equilíbrio.

O ótimo é $\lceil n/m \rceil$ e o makespan esperado?

Quão pior pode ser?

m máquinas idênticas (velocidade 1) e n tarefas de peso 1

Cada tarefa escolhe uma máquina com probabilidade $1/m$.

Novamente é um equilíbrio.

O ótimo é $\lceil n/m \rceil$ e o makespan esperado?

Balls and bins:
cada uma de n bolas independentemente é colocada
em um de m compartimentos escolhido uniformemente.

Quão pior pode ser?

m máquinas idênticas (velocidade 1) e n tarefas de peso 1

Cada tarefa escolhe uma máquina com probabilidade $1/m$.

Novamente é um equilíbrio.

O ótimo é $\lceil n/m \rceil$ e o makespan esperado?

Balls and bins:
cada uma de n bolas independentemente é colocada
em um de m compartimentos escolhido uniformemente.

Quantas bolas no compartimento mais cheio?

Quão pior pode ser?

m máquinas idênticas (velocidade 1) e n tarefas de peso 1

Cada tarefa escolhe uma máquina com probabilidade $1/m$.

Novamente é um equilíbrio.

O ótimo é $\lceil n/m \rceil$ e o makespan esperado?

Balls and bins:
cada uma de n bolas independentemente é colocada
em um de m compartimentos escolhido uniformemente.

Quantas bolas no compartimento mais cheio?

Isso é exatamente o makespan esperado!

Delimitação inferior no PoA

Balls and bins:
cada uma de n bolas independentemente é colocada em um de q compartimentos escolhido uniformemente.

Delimitação inferior no PoA

Balls and bins:
cada uma de n bolas independentemente é colocada em um de q compartimentos escolhido uniformemente.

Proposição:
O valor esperado da ocupação máxima é $\Theta\left(\frac{\ln q}{\ln\left(1+\frac{q}{n}\ln q\right)}\right)$.

Delimitação inferior no PoA

Balls and bins:
cada uma de n bolas independentemente é colocada em um de q compartimentos escolhido uniformemente.

Proposição:
O valor esperado da ocupação máxima é $\Theta\left(\frac{\ln q}{\ln\left(1+\frac{q}{n}\ln q\right)}\right)$.

Teorema: Para todo q, existe uma instância J do jogo de balanceamento de carga com q máquinas idênticas e $n = q$ tarefas que tem um equilíbrio de Nash misto P com

$$\text{custo}(P) = \Omega\left(\frac{\ln q}{\ln\ln q}\right)\text{OPT}(J).$$

Delimitação superior no PoA

Teorema: Considere uma instância J do jogo de balanceamento de carga com q máquinas idênticas e seja P um equilíbrio de Nash do jogo. Vale que

$$\text{custo}(P) = \mathrm{O}\left(\frac{\ln q}{\ln \ln q}\right)\mathrm{OPT}(J).$$

Delimitação superior no PoA

Teorema: Considere uma instância J do jogo de balanceamento de carga com q máquinas idênticas e seja P um equilíbrio de Nash do jogo. Vale que

$$\mathrm{custo}(P) = \mathrm{O}\left(\frac{\ln q}{\ln \ln q}\right)\mathrm{OPT}(J).$$

Prova: Lembre-se que $\mathrm{custo}(P) = \mathrm{E}[\max_{j \in [m]} \ell(j)]$.

Delimitação superior no PoA

Teorema: Considere uma instância J do jogo de balanceamento de carga com q máquinas idênticas e seja P um equilíbrio de Nash do jogo. Vale que

$$\mathrm{custo}(P) = \mathrm{O}\left(\frac{\ln q}{\ln \ln q}\right)\mathrm{OPT}(J).$$

Prova: Lembre-se que $\mathrm{custo}(P) = \mathrm{E}[\max_{j \in [m]} \ell(j)]$.

Primeiramente, $\mathrm{E}[\ell(j)] \leq \left(2 - \frac{2}{m+1}\right)\mathrm{OPT}(J)$.

Delimitação superior no PoA

Teorema: Considere uma instância J do jogo de balanceamento de carga com q máquinas idênticas e seja P um equilíbrio de Nash do jogo. Vale que

$$\text{custo}(P) = \mathrm{O}\left(\frac{\ln q}{\ln \ln q}\right)\mathrm{OPT}(J).$$

Prova: Lembre-se que $\text{custo}(P) = \mathrm{E}[\max_{j \in [m]} \ell(j)]$.

Primeiramente, $\mathrm{E}[\ell(j)] \leq \left(2 - \frac{2}{m+1}\right)\mathrm{OPT}(J)$.

Relembremos resultado para o jogo com estratégias puras:

Teorema: Para o jogo de balanceamento de carga em m máquinas idênticas com estratégias puras,

$$\text{PoA}(m) = \left(2 - \frac{2}{m+1}\right).$$

Relembrando...

Teorema: Para o jogo de balanceamento de carga em m máquinas idênticas com estratégias puras,

$$\text{PoA}(m) = \left(2 - \frac{2}{m+1}\right).$$

Prova: Jogo $J = (n, m, w)$ e atribuição $A : [n] \rightarrow [m]$.

j^*: máquina com carga máxima em A

i^*: tarefa mais leve em j^*

$\ell(j)$: carga da máquina j em A

Se só i^* em j^*, então $\mathrm{custo}(A) = \mathrm{OPT}(J)$ e nada a provar.
Senão $w_{i^*} \leq \frac{1}{2}\,\mathrm{custo}(A)$.

Não há máquina com carga menor que $\ell(j^*) - w_{i^*}$
(ou i^* teria incentivo para ir para tal máquina).

Relembrando...

Prova: Jogo $J = (n, m, w)$ e atribuição $A : [n] \to [m]$.

j^*: máquina com carga máxima em A
i^*: tarefa mais leve em j^*

$\ell(j)$: carga da máquina j em A
$w_{i^*} \leq \frac{1}{2}\,\mathrm{custo}(A)$.

Não há máquina com carga menor que $\ell(j^*) - w_{i^*}$.
Ou seja, para todo $j \in [m]$,

$$\ell(j) \;\geq\; \ell(j^*) - w_{i^*} \;\geq\; \mathrm{custo}(A) - \frac{1}{2}\,\mathrm{custo}(A) \;=\; \frac{1}{2}\,\mathrm{custo}(A)$$

e

$$\begin{aligned} \mathrm{OPT}(J) \;&\geq\; \frac{\sum_{i\in[n]} w_i}{m} \;=\; \frac{\sum_{j\in[m]} \ell(j)}{m} \\ &\geq\; \frac{\mathrm{custo}(A) + (m-1)\mathrm{custo}(A)/2}{m} \;=\; \frac{(m+1)\mathrm{custo}(A)}{2m} \end{aligned}$$

Relembrando...

Prova: Jogo $J = (n, m, w)$ e atribuição $A : [n] \to [m]$.

j^*: máquina com carga máxima em A
i^*: tarefa mais leve em j^*

$\ell(j)$: carga da máquina j em A
$w_{i^*} \leq \frac{1}{2}\,\mathrm{custo}(A)$.

Não há máquina com carga menor que $\ell(j^*) - w_{i^*}$.

Ou seja, $\ell(j) \;\geq\; \frac{1}{2}\,\mathrm{custo}(A)$ para todo $j \in [m]$ e

$$\mathrm{OPT}(J) \geq \frac{(m+1)\mathrm{custo}(A)}{2m},$$

donde se conclui que

$$\mathrm{custo}(A) \;\leq\; \left(2 - \frac{2}{m+1}\right)\mathrm{OPT}(J). \qquad \square$$

Adaptação de parte da prova

Jogo de balanceamento de carga com estratégias mistas

jogo $J = (n, m, w)$, vetor de estratégias mistas P

Adaptação de parte da prova

Jogo de balanceamento de carga com estratégias mistas

jogo $J = (n, m, w)$, vetor de estratégias mistas P

j^*: máquina com carga esperada máxima em P

Adaptação de parte da prova

Jogo de balanceamento de carga com estratégias mistas

jogo $J = (n, m, w)$, vetor de estratégias mistas P

j^*: máquina com carga esperada máxima em P

i^*: tarefa com prob. positiva em j^* e $p_{i^*j^*} w_{i^*}$ mínimo.

Adaptação de parte da prova

Jogo de balanceamento de carga com estratégias mistas

jogo $J = (n, m, w)$, vetor de estratégias mistas P

j^*: máquina com carga esperada máxima em P

i^*: tarefa com prob. positiva em j^* e $p_{i^* j^*} w_{i^*}$ mínimo.

$\ell(j)$: carga da máquina j em P (variável aleatória)

Adaptação de parte da prova

Jogo de balanceamento de carga com estratégias mistas

jogo $J = (n, m, w)$, vetor de estratégias mistas P

j^*: máquina com carga esperada máxima em P

i^*: tarefa com prob. positiva em j^* e $p_{i^* j^*} w_{i^*}$ mínimo.

$\ell(j)$: carga da máquina j em P (variável aleatória)

$\mathrm{custo}(P) = \mathrm{E}[\ell(j^*)]$ e $p_{i^* j^*} w_{i^*} \leq \frac{1}{2}\,\mathrm{custo}(P)$.

Adaptação de parte da prova

Jogo de balanceamento de carga com estratégias mistas

jogo $J = (n, m, w)$, vetor de estratégias mistas P

j^*: máquina com carga esperada máxima em P

i^*: tarefa com prob. positiva em j^* e $p_{i^*j^*} w_{i^*}$ mínimo.

$\ell(j)$: carga da máquina j em P (variável aleatória)

$\mathrm{custo}(P) = \mathrm{E}[\ell(j^*)]$ e $p_{i^*j^*} w_{i^*} \leq \frac{1}{2}\,\mathrm{custo}(P)$.

Não há máquina com
carga esperada menor que $\mathrm{E}[\ell(j^*)] - p_{i^*j^*} w_{i^*}$
(ou i^* teria incentivo para ir para tal máquina).

Adaptação de parte da prova

Jogo de balanceamento de carga com estratégias mistas

jogo $J = (n, m, w)$, vetor de estratégias mistas P

j^*: máquina com carga esperada máxima em P

i^*: tarefa com prob. positiva em j^* e $p_{i^*j^*} w_{i^*}$ mínimo.

$\ell(j)$: carga da máquina j em A (variável aleatória)

$\mathrm{custo}(P) = \mathrm{E}[\ell(j^*)]$ e $p_{i^*j^*} w_{i^*} \leq \frac{1}{2}\,\mathrm{custo}(P)$.

Adaptação de parte da prova

Jogo de balanceamento de carga com estratégias mistas

jogo $J = (n, m, w)$, vetor de estratégias mistas P

j^*: máquina com carga esperada máxima em P

i^*: tarefa com prob. positiva em j^* e $p_{i^*j^*} w_{i^*}$ mínimo.

$\ell(j)$: carga da máquina j em A (variável aleatória)

$\mathrm{custo}(P) = \mathrm{E}[\ell(j^*)]$ e $p_{i^*j^*} w_{i^*} \leq \frac{1}{2}\,\mathrm{custo}(P)$.

Para todo $j \in [m]$,

$$\mathrm{E}[\ell(j)] \;\geq\; \mathrm{E}[\ell(j^*)] - p_{i^*j^*} w_{i^*} \;\geq\; \mathrm{custo}(P) - \frac{1}{2}\,\mathrm{custo}(P) \;=\; \frac{1}{2}\,\mathrm{custo}(P).$$

Adaptação de parte da prova

Jogo de balanceamento de carga com estratégias mistas

jogo $J = (n, m, w)$, vetor de estratégias mistas P

j^*: máquina com carga esperada máxima em P

i^*: tarefa com prob. positiva em j^* e $p_{i^*j^*} w_{i^*}$ mínimo.

$\ell(j)$: carga da máquina j em A (variável aleatória)

$\mathrm{custo}(P) = \mathrm{E}[\ell(j^*)]$ e $p_{i^*j^*} w_{i^*} \leq \frac{1}{2}\,\mathrm{custo}(P)$.

Para todo $j \in [m]$, $\mathrm{E}[\ell(j)] \geq \frac{1}{2}\,\mathrm{custo}(P)$

Adaptação de parte da prova

Jogo de balanceamento de carga com estratégias mistas

jogo $J = (n, m, w)$, vetor de estratégias mistas P

j^*: máquina com carga esperada máxima em P

i^*: tarefa com prob. positiva em j^* e $p_{i^*j^*} w_{i^*}$ mínimo.

$\ell(j)$: carga da máquina j em A (variável aleatória)

$\mathrm{custo}(P) = \mathrm{E}[\ell(j^*)]$ e $p_{i^*j^*} w_{i^*} \leq \frac{1}{2}\,\mathrm{custo}(P)$.

Para todo $j \in [m]$, $\mathrm{E}[\ell(j)] \geq \frac{1}{2}\,\mathrm{custo}(P)$ e

$$\begin{aligned} \mathrm{OPT}(J) &\geq \frac{\sum_{i\in[n]} w_i}{m} = \frac{\sum_{j\in[m]} \mathrm{E}[\ell(j)]}{m} \\ &\geq \frac{\mathrm{custo}(P) + (m-1)\mathrm{custo}(P)/2}{m} = \frac{(m+1)\mathrm{custo}(P)}{2m}. \end{aligned}$$

Adaptação de parte da prova

Jogo de balanceamento de carga com estratégias mistas

jogo $J = (n, m, w)$, vetor de estratégias mistas P

j^*: máquina com carga esperada máxima em P

i^*: tarefa com prob. positiva em j^* e $p_{i^*j^*}w_{i^*}$ mínimo.

$\ell(j)$: carga da máquina j em A (variável aleatória)

$\mathrm{custo}(P) = \mathrm{E}[\ell(j^*)]$ e $p_{i^*j^*}w_{i^*} \leq \frac{1}{2}\,\mathrm{custo}(P)$.

Para todo $j \in [m]$, $\mathrm{E}[\ell(j)] \geq \frac{1}{2}\,\mathrm{custo}(P)$
e $\mathrm{OPT}(J) \geq \frac{(m+1)\mathrm{custo}(P)}{2m}$.

Adaptação de parte da prova

Jogo de balanceamento de carga com estratégias mistas

jogo $J = (n, m, w)$, vetor de estratégias mistas P

j^*: máquina com carga esperada máxima em P

i^*: tarefa com prob. positiva em j^* e $p_{i^*j^*} w_{i^*}$ mínimo.

$\ell(j)$: carga da máquina j em A (variável aleatória)

$\mathrm{custo}(P) = \mathrm{E}[\ell(j^*)]$ e $p_{i^*j^*} w_{i^*} \leq \frac{1}{2}\,\mathrm{custo}(P)$.

Para todo $j \in [m]$, $\mathrm{E}[\ell(j)] \geq \frac{1}{2}\,\mathrm{custo}(P)$
e $\mathrm{OPT}(J) \geq \frac{(m+1)\mathrm{custo}(P)}{2m}$.

Logo, para todo $j \in [m]$, $\mathrm{E}[\ell(j)] \leq (2 - \dfrac{2}{m+1})\mathrm{OPT}(J)$.

Delimitação superior no PoA

Teorema: Considere uma instância J do jogo de balanceamento de carga com m máquinas idênticas e seja P um equilíbrio de Nash do jogo. Vale que

$$\mathrm{custo}(P) = \mathrm{O}\big(\tfrac{\ln m}{\ln \ln m}\big)\mathrm{OPT}(J).$$

Prova: Lembre-se que $\mathrm{custo}(P) = \mathrm{E}[\max_{j \in [m]} \ell(j)]$.

Primeiramente, $\mathrm{E}[\ell(j)] \leq \big(2 - \frac{2}{m+1}\big)\mathrm{OPT}(J)$. Feito.

Delimitação superior no PoA

Teorema: Considere uma instância J do jogo de balanceamento de carga com m máquinas idênticas e seja P um equilíbrio de Nash do jogo. Vale que

$$\mathrm{custo}(P) = \mathrm{O}\left(\frac{\ln m}{\ln \ln m}\right)\mathrm{OPT}(J).$$

Prova: Lembre-se que $\mathrm{custo}(P) = \mathrm{E}[\max_{j \in [m]} \ell(j)]$.

Primeiramente, $\mathrm{E}[\ell(j)] \leq \left(2 - \frac{2}{m+1}\right)\mathrm{OPT}(J)$. Feito.

Logo $\max_{j \in [m]} \mathrm{E}[\ell(j)] \leq 2\,\mathrm{OPT}(J)$.

Delimitação superior no PoA

Teorema: Considere uma instância J do jogo de balanceamento de carga com m máquinas idênticas e seja P um equilíbrio de Nash do jogo. Vale que

$$\mathrm{custo}(P) = \mathrm{O}\left(\frac{\ln m}{\ln \ln m}\right)\mathrm{OPT}(J).$$

Prova: Lembre-se que $\mathrm{custo}(P) = \mathrm{E}[\max_{j \in [m]} \ell(j)]$.

Primeiramente, $\mathrm{E}[\ell(j)] \leq \left(2 - \frac{2}{m+1}\right)\mathrm{OPT}(J)$. Feito.

Logo $\max_{j \in [m]} \mathrm{E}[\ell(j)] \leq 2\,\mathrm{OPT}(J)$.

Vamos mostrar que o valor esperado da carga máxima desvia de um fator $\mathrm{O}\left(\frac{\ln m}{\ln \ln m}\right)$ do máximo dos valores esperados.

Delimitação superior no PoA

Teorema: Considere uma instância J do jogo de balanceamento de carga com m máquinas idênticas e seja P um equilíbrio de Nash do jogo. Vale que

$$\mathrm{custo}(P) = \mathrm{O}\left(\frac{\ln m}{\ln \ln m}\right)\mathrm{OPT}(J).$$

Prova: Lembre-se que $\mathrm{custo}(P) = \mathrm{E}[\max_{j \in [m]} \ell(j)]$.

Primeiramente, $\mathrm{E}[\ell(j)] \leq \left(2 - \frac{2}{m+1}\right)\mathrm{OPT}(J)$. Feito.

Logo $\max_{j \in [m]} \mathrm{E}[\ell(j)] \leq 2\,\mathrm{OPT}(J)$.

Vamos mostrar que o valor esperado da carga máxima desvia de um fator $\mathrm{O}\left(\frac{\ln m}{\ln \ln m}\right)$ do máximo dos valores esperados.

Valor esperado da carga máxima é o $\mathrm{custo}(P)$.

Delimitação superior no PoA

Teorema: Considere uma instância J do jogo de balanceamento de carga com m máquinas idênticas e seja P um equilíbrio de Nash do jogo. Vale que

$$\mathrm{custo}(P) = \mathrm{O}\left(\frac{\ln m}{\ln \ln m}\right)\mathrm{OPT}(J).$$

Prova: Lembre-se que $\mathrm{custo}(P) = \mathrm{E}[\max_{j\in[m]} \ell(j)]$.

Vimos que $\max_{j\in[m]} \mathrm{E}[\ell(j)] \leq 2\,\mathrm{OPT}(J)$.

Vamos mostrar que $\mathrm{custo}(P) \; = \; \mathrm{O}\left(\frac{\ln m}{\ln \ln m}\right)\max_{j\in[m]} \mathrm{E}[\ell(j)]$.

Delimitação superior no PoA

Teorema: Considere uma instância J do jogo de balanceamento de carga com m máquinas idênticas e seja P um equilíbrio de Nash do jogo. Vale que

$$\mathrm{custo}(P) = \mathrm{O}\left(\frac{\ln m}{\ln \ln m}\right) \mathrm{OPT}(J).$$

Prova: Lembre-se que $\mathrm{custo}(P) = \mathrm{E}[\max_{j \in [m]} \ell(j)]$.

Vimos que $\max_{j \in [m]} \mathrm{E}[\ell(j)] \leq 2\, \mathrm{OPT}(J)$.

Vamos mostrar que $\mathrm{custo}(P) \; = \; \mathrm{O}\left(\frac{\ln m}{\ln \ln m}\right) \max_{j \in [m]} \mathrm{E}[\ell(j)]$.

Ou melhor, mostraremos que $\mathrm{custo}(P) \; = \; \mathrm{O}\left(\frac{\ln m}{\ln \ln m}\right) \mathrm{OPT}(J)$. $\square$

Resta mostrar que...

Lembrando que $\text{custo}(P) = \mathrm{E}[\max_{j\in[m]} \ell(j)]$,
e que $\mathrm{E}[\ell(j)] < 2\,\mathrm{OPT}(J)$, resta mostrar que

$$\text{custo}(P) \;=\; \mathrm{O}\Big(\frac{\ln m}{\ln \ln m}\Big)\mathrm{OPT}(J).$$

Resta mostrar que...

Lembrando que $\text{custo}(P) = \mathrm{E}[\max_{j \in [m]} \ell(j)]$,
e que $\mathrm{E}[\ell(j)] < 2\,\mathrm{OPT}(J)$, resta mostrar que

$$\text{custo}(P) \;=\; \mathrm{O}\Big(\frac{\ln m}{\ln \ln m}\Big)\mathrm{OPT}(J).$$

Desigualdade ponderada de Chernoff: Sejam $X_1, \ldots, X_N$ v.a. independentes em $[0, z]$ para algum $z > 0$ e seja $X = \sum_{i=1}^{N} X_i$.
Para todo t, $\Pr[X \geq t] \leq (e \cdot \mathrm{E}[X]/t)^{t/z}$.

Resta mostrar que...

Lembrando que $\text{custo}(P) = \mathrm{E}[\max_{j\in[m]} \ell(j)]$,
e que $\mathrm{E}[\ell(j)] < 2\,\mathrm{OPT}(J)$, resta mostrar que

$$\text{custo}(P) \;=\; \mathrm{O}\Big(\frac{\ln m}{\ln\ln m}\Big)\mathrm{OPT}(J).$$

Desigualdade ponderada de Chernoff: Sejam $X_1, \ldots, X_N$ v.a. independentes em $[0, z]$ para algum $z > 0$ e seja $X = \sum_{i=1}^N X_i$.
Para todo t, $\Pr[X \geq t] \leq (e \cdot \mathrm{E}[X]/t)^{t/z}$.

Fixe $j \in [m]$ e seja w o maior peso de uma tarefa.
Aplicando Chernoff,

$$\Pr[\ell(j) \geq t] \;\leq\; \Big(\frac{e\,\mathrm{E}[\ell(j)]}{t}\Big)^{t/w} \;\leq\; \Big(\frac{2e\,\mathrm{OPT}(J)}{t}\Big)^{t/\mathrm{OPT}(J)}$$

Resta mostrar que...

Lembrando que $\mathrm{custo}(P) = \mathrm{E}[\max_{j\in[m]} \ell(j)]$,
e que $\mathrm{E}[\ell(j)] < 2\,\mathrm{OPT}(J)$, resta mostrar que

$$\mathrm{custo}(P) \;=\; \mathrm{O}\big(\frac{\ln m}{\ln\ln m}\big)\mathrm{OPT}(J).$$

Desigualdade ponderada de Chernoff: Sejam $X_1,\ldots,X_N$ v.a. independentes em $[0,z]$ para algum $z>0$ e seja $X=\sum_{i=1}^N X_i$.
Para todo t, $\Pr[X\geq t]\leq (e\cdot \mathrm{E}[X]/t)^{t/z}$.

Fixe $j\in[m]$ e seja w o maior peso de uma tarefa.
Aplicando Chernoff,

$$\Pr[\ell(j)\geq t] \;\leq\; \big(\frac{e\,\mathrm{E}[\ell(j)]}{t}\big)^{t/w} \;\leq\; \big(\frac{2e\,\mathrm{OPT}(J)}{t}\big)^{t/\mathrm{OPT}(J)}$$

se $t > 2e\,\mathrm{OPT}(J)$ pois $w\leq \mathrm{OPT}(J)$.

Resta mostrar que...

Lembrando que $\mathrm{custo}(P) = \mathrm{E}[\max_{j \in [m]} \ell(j)]$,

resta mostrar que $\mathrm{custo}(P) \; = \; \mathrm{O}\left(\frac{\ln m}{\ln \ln m}\right) \mathrm{OPT}(J)$.

Fixe $j \in [m]$ e seja w o maior peso de uma tarefa.
Então, se $t > 2e\,\mathrm{OPT}(J)$,

$$\Pr[\ell(j) \geq t] \; \leq \; \left(\frac{2e\,\mathrm{OPT}(J)}{t}\right)^{\frac{t}{\mathrm{OPT}(J)}}.$$

Resta mostrar que...

Lembrando que $\mathrm{custo}(P) = \mathrm{E}[\max_{j\in[m]} \ell(j)]$,

resta mostrar que $\mathrm{custo}(P) \;=\; \mathrm{O}(\frac{\ln m}{\ln\ln m})\mathrm{OPT}(J)$.

Fixe $j \in [m]$ e seja w o maior peso de uma tarefa.
Então, se $t > 2e\,\mathrm{OPT}(J)$,

$$\Pr[\ell(j) \geq t] \;\leq\; \Big(\frac{2e\,\mathrm{OPT}(J)}{t}\Big)^{\frac{t}{\mathrm{OPT}(J)}}.$$

Para $\tau = 2\,\mathrm{OPT}(J)\ln m/\ln\ln m$, e qualquer $x \geq 0$,

$$\begin{aligned}\Pr[\ell(j) \geq \tau + x] \;&\leq\; \Big(\frac{e\ln\ln m}{\ln m}\Big)^{\frac{2\ln m}{\ln\ln m}+\frac{x}{\mathrm{OPT}(J)}} \\ &\leq\; \Big(\frac{1}{\sqrt{\ln m}}\Big)^{\frac{2\ln m}{\ln\ln m}} \cdot e^{\frac{-x}{\mathrm{OPT}(J)}}\end{aligned}$$

para m suf. grande, pois $\frac{\ln m}{e\ln\ln m} \geq \sqrt{\ln m}$ e $\frac{\ln m}{e\ln\ln m} \geq e$.

Resta mostrar que...

Lembrando que $\mathrm{custo}(P) = \mathrm{E}[\max_{j\in[m]} \ell(j)]$,

resta mostrar que $\mathrm{custo}(P) \;=\; \mathrm{O}(\frac{\ln m}{\ln\ln m})\mathrm{OPT}(J)$.

Fixe $j \in [m]$ e seja w o maior peso de uma tarefa.
Então, se $t > 2e\,\mathrm{OPT}(J)$,

$$\Pr[\ell(j) \geq t] \;\leq\; \left(\frac{2e\,\mathrm{OPT}(J)}{t}\right)^{\frac{t}{\mathrm{OPT}(J)}}.$$

Para $\tau = 2\,\mathrm{OPT}(J)\ln m/\ln\ln m$, e qualquer $x \geq 0$,

$$\begin{aligned}\Pr[\ell(j) \geq \tau + x] \;&\leq\; \left(\frac{e\ln\ln m}{\ln m}\right)^{\frac{2\ln m}{\ln\ln m} + \frac{x}{\mathrm{OPT}(J)}} \\ &\leq\; \left(\frac{1}{\sqrt{\ln m}}\right)^{\frac{2\ln m}{\ln\ln m}} \cdot e^{\frac{-x}{\mathrm{OPT}(J)}} \;=\; \left(e^{-\frac{\ln\ln m}{2}}\right)^{\frac{2\ln m}{\ln\ln m}} \cdot e^{\frac{-x}{\mathrm{OPT}(J)}}\end{aligned}$$

para m suf. grande, pois $\frac{\ln m}{e\ln\ln m} \geq \sqrt{\ln m}$ e $\frac{\ln m}{e\ln\ln m} \geq e$.

Resta mostrar que...

Lembrando que $\text{custo}(P) = \mathrm{E}[\max_{j\in[m]} \ell(j)]$,

resta mostrar que $\text{custo}(P) \;=\; \mathrm{O}(\dfrac{\ln m}{\ln\ln m})\,\mathrm{OPT}(J)$.

Fixe $j \in [m]$ e seja w o maior peso de uma tarefa.
Então, se $t > 2e\,\mathrm{OPT}(J)$,

$$\Pr[\ell(j) \geq t] \;\leq\; \left(\frac{2e\,\mathrm{OPT}(J)}{t}\right)^{\frac{t}{\mathrm{OPT}(J)}}.$$

Para $\tau = 2\,\mathrm{OPT}(J)\ln m/\ln\ln m$, e qualquer $x \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\Pr[\ell(j) \geq \tau + x] \;&\leq\; \left(\frac{e\ln\ln m}{\ln m}\right)^{\frac{2\ln m}{\ln\ln m}+\frac{x}{\mathrm{OPT}(J)}} \\
&\leq\; \left(\frac{1}{\sqrt{\ln m}}\right)^{\frac{2\ln m}{\ln\ln m}} \cdot e^{\frac{-x}{\mathrm{OPT}(J)}} \;=\; \left(e^{-\frac{\ln\ln m}{2}}\right)^{\frac{2\ln m}{\ln\ln m}} \cdot e^{\frac{-x}{\mathrm{OPT}(J)}} \\
&\leq\; m^{-1} \cdot e^{-\frac{x}{\mathrm{OPT}(J)}}.
\end{aligned}$$

Resta mostrar que...

Lembrando que $\mathrm{custo}(P) = \mathrm{E}[\max_{j \in [m]} \ell(j)]$,

resta mostrar que $\mathrm{custo}(P) \;=\; \mathrm{O}(\dfrac{\ln m}{\ln \ln m})\mathrm{OPT}(J)$.

Para $\tau = 2\,\frac{\mathrm{OPT}(J) \ln m}{\ln \ln m}$, e qualquer $x \geq 0$,

$$\Pr[\ell(j) \geq \tau + x] \quad \leq \quad m^{-1} \cdot e^{-\frac{x}{\mathrm{OPT}(J)}}.$$

Resta mostrar que...

Lembrando que $\mathrm{custo}(P) = \mathrm{E}[\max_{j\in[m]} \ell(j)]$,

resta mostrar que $\mathrm{custo}(P) \;=\; \mathrm{O}(\frac{\ln m}{\ln\ln m})\mathrm{OPT}(J)$.

Para $\tau = 2\,\frac{\mathrm{OPT}(J)\ln m}{\ln\ln m}$, e qualquer $x \geq 0$,

$$\Pr[\ell(j) \geq \tau + x] \quad\leq\quad m^{-1}\cdot e^{-\frac{x}{\mathrm{OPT}(J)}}.$$

$\mathrm{E}[X] = \int_0^\infty \Pr[X \geq t]\,dt$ para toda v.a. não-negativa.

Resta mostrar que...

Lembrando que $\text{custo}(P) = \mathrm{E}[\max_{j \in [m]} \ell(j)]$,

resta mostrar que $\text{custo}(P) \;=\; \mathrm{O}(\dfrac{\ln m}{\ln \ln m})\mathrm{OPT}(J)$.

Para $\tau = 2\,\frac{\mathrm{OPT}(J) \ln m}{\ln \ln m}$, e qualquer $x \geq 0$,

$$\Pr[\ell(j) \geq \tau + x] \quad \leq \quad m^{-1} \cdot e^{-\frac{x}{\mathrm{OPT}(J)}}.$$

$\mathrm{E}[X] = \int_0^\infty \Pr[X \geq t]\, dt$ para toda v.a. não-negativa.

Logo $\text{custo}(P) = \int_0^\infty \Pr[\max_{j \in [m]} \ell(j) \geq t]\, dt$ e

Resta mostrar que...

Lembrando que $\mathrm{custo}(P) = \mathrm{E}[\max_{j\in[m]} \ell(j)]$,

resta mostrar que $\mathrm{custo}(P) \;=\; \mathrm{O}(\frac{\ln m}{\ln\ln m})\mathrm{OPT}(J)$.

Para $\tau = 2\,\frac{\mathrm{OPT}(J)\ln m}{\ln\ln m}$, e qualquer $x \geq 0$,

$$\Pr[\ell(j) \geq \tau + x] \quad\leq\quad m^{-1} \cdot e^{-\frac{x}{\mathrm{OPT}(J)}}.$$

$\mathrm{E}[X] = \int_0^\infty \Pr[X \geq t]\,dt$ para toda v.a. não-negativa.

Logo $\mathrm{custo}(P) = \int_0^\infty \Pr[\max_{j\in[m]} \ell(j) \geq t]\,dt$ e

$$\mathrm{custo}(P) \quad\leq\quad \tau + \int_0^\infty \Pr[\max_{j\in[m]} \ell(j) \geq \tau + t]\,dt$$

Resta mostrar que...

Lembrando que $\mathrm{custo}(P) = \mathrm{E}[\max_{j\in[m]} \ell(j)]$,

resta mostrar que $\mathrm{custo}(P) \;=\; \mathrm{O}(\frac{\ln m}{\ln\ln m})\mathrm{OPT}(J)$.

Para $\tau = 2\,\frac{\mathrm{OPT}(J)\ln m}{\ln\ln m}$, e qualquer $x \geq 0$,

$$\Pr[\ell(j) \geq \tau + x] \quad\leq\quad m^{-1} \cdot e^{-\frac{x}{\mathrm{OPT}(J)}}.$$

$\mathrm{E}[X] = \int_0^\infty \Pr[X \geq t]\,dt$ para toda v.a. não-negativa.

Logo $\mathrm{custo}(P) = \int_0^\infty \Pr[\max_{j\in[m]} \ell(j) \geq t]\,dt$ e

$$\begin{aligned}
\mathrm{custo}(P) &\leq \tau + \int_0^\infty \Pr[\max_{j\in[m]} \ell(j) \geq \tau + t]\,dt \\
&\leq \tau + \int_0^\infty \sum_{j\in[m]} \Pr[\ell(j) \geq \tau + t]\,dt
\end{aligned}$$

Resta mostrar que...

Lembrando que $\text{custo}(P) = \mathrm{E}[\max_{j\in[m]} \ell(j)]$,

resta mostrar que $\text{custo}(P) \;=\; \mathrm{O}(\frac{\ln m}{\ln\ln m})\mathrm{OPT}(J)$.

Para $\tau = 2\,\frac{\mathrm{OPT}(J)\ln m}{\ln\ln m}$, e qualquer $x \geq 0$,

$$\Pr[\ell(j) \geq \tau + x] \quad\leq\quad m^{-1}\cdot e^{-\frac{x}{\mathrm{OPT}(J)}} \text{ e}$$

$$\begin{aligned}\text{custo}(P) &\leq \tau + \int_0^\infty \Pr[\max_{j\in[m]} \ell(j) \geq \tau + t]\,dt \\ &\leq \tau + \int_0^\infty \sum_{j\in[m]} \Pr[\ell(j) \geq \tau + t]\,dt\end{aligned}$$

Resta mostrar que...

Lembrando que $\mathrm{custo}(P) = \mathrm{E}[\max_{j\in[m]} \ell(j)]$,

resta mostrar que $\mathrm{custo}(P) \;=\; \mathrm{O}(\frac{\ln m}{\ln\ln m})\mathrm{OPT}(J)$.

Para $\tau = 2\,\frac{\mathrm{OPT}(J)\ln m}{\ln\ln m}$, e qualquer $x \geq 0$,

$$\Pr[\ell(j) \geq \tau + x] \quad\leq\quad m^{-1}\cdot e^{-\frac{x}{\mathrm{OPT}(J)}} \text{ e}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{custo}(P) &\leq \tau + \int_0^\infty \Pr[\max_{j\in[m]} \ell(j) \geq \tau + t]\,dt \\
&\leq \tau + \int_0^\infty \sum_{j\in[m]} \Pr[\ell(j) \geq \tau + t]\,dt \\
&\leq \tau + \int_0^\infty e^{-\frac{x}{\mathrm{OPT}(J)}}\,dx
\end{aligned}$$

Resta mostrar que...

Lembrando que $\mathrm{custo}(P) = \mathrm{E}[\max_{j\in[m]} \ell(j)]$,

resta mostrar que $\mathrm{custo}(P) \;=\; \mathrm{O}(\frac{\ln m}{\ln\ln m})\mathrm{OPT}(J)$.

Para $\tau = 2\,\frac{\mathrm{OPT}(J)\ln m}{\ln\ln m}$, e qualquer $x \geq 0$,

$$\Pr[\ell(j) \geq \tau + x] \;\leq\; m^{-1} \cdot e^{-\frac{x}{\mathrm{OPT}(J)}} \text{ e}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{custo}(P) &\leq \tau + \int_0^\infty \Pr[\max_{j\in[m]} \ell(j) \geq \tau + t]\,dt \\
&\leq \tau + \int_0^\infty \sum_{j\in[m]} \Pr[\ell(j) \geq \tau + t]\,dt \\
&\leq \tau + \int_0^\infty e^{-\frac{x}{\mathrm{OPT}(J)}}\,dx \\
&= \tau + \mathrm{OPT}(J)
\end{aligned}$$

Resta mostrar que...

Lembrando que $\text{custo}(P) = \mathrm{E}[\max_{j\in[m]} \ell(j)]$,

resta mostrar que $\text{custo}(P) \;=\; \mathrm{O}(\frac{\ln m}{\ln\ln m})\mathrm{OPT}(J)$.

Para $\tau = 2\,\frac{\mathrm{OPT}(J)\ln m}{\ln\ln m}$, e qualquer $x \geq 0$,

$$\Pr[\ell(j) \geq \tau + x] \quad\leq\quad m^{-1}\cdot e^{-\frac{x}{\mathrm{OPT}(J)}} \text{ e}$$

$$\begin{aligned}
\text{custo}(P) &= \tau + \int_0^\infty \Pr[\max_{j\in[m]} \ell(j) \geq \tau + t]\,dt \\
&\leq \tau + \int_0^\infty e^{-\frac{x}{\mathrm{OPT}(J)}}\,dx \\
&= \tau + \mathrm{OPT}(J) \\
&= \mathrm{O}(\frac{\ln m}{\ln\ln m})\mathrm{OPT}(J). \qquad \square
\end{aligned}$$