Complexidade computacional

O Teorema de Nash garante a existência de um equilíbrio em qualquer jogo finito.

Mas como encontrar um tal equilíbrio?

Complexidade computacional

O Teorema de Nash garante a existência de um equilíbrio em qualquer jogo finito.

Mas como encontrar um tal equilíbrio?

Kamal Jain:
"If your laptop cannot find it, neither can the market."

Complexidade computacional

O Teorema de Nash garante a existência de
um equilíbrio em qualquer jogo finito.

Mas como encontrar um tal equilíbrio?

Kamal Jain:
"If your laptop cannot find it, neither can the market."

Problema NASH: Dado um jogo em forma padrão,
encontrar um equilíbrio de Nash.

Complexidade computacional

O Teorema de Nash garante a existência de
um equilíbrio em qualquer jogo finito.

Mas como encontrar um tal equilíbrio?

Kamal Jain:
"If your laptop cannot find it, neither can the market."

Problema NASH: Dado um jogo em forma padrão,
encontrar um equilíbrio de Nash.

Podemos resolver esse problema eficientemente?

Qual é a sua complexidade?

Complexidade computacional

O Teorema de Nash garante a existência de um equilíbrio em qualquer jogo finito.

Mas como encontrar um tal equilíbrio?

Kamal Jain:
"If your laptop cannot find it, neither can the market."

Problema NASH: Dado um jogo em forma padrão, encontrar um equilíbrio de Nash.

Podemos resolver esse problema eficientemente?

Qual é a sua complexidade?

A versão de decisão (existe equilíbrio de Nash?) é trivial...

Discussão

Nash descreveu um jogo de poker com três jogadores, com utilidades inteiras, e único equilíbrio envolvendo irracionais.

Discussão

Nash descreveu um jogo de poker com três jogadores, com utilidades inteiras, e único equilíbrio envolvendo irracionais.

Seja $\sigma \in \Sigma$. Estratégia s em S_i é resposta ótima para σ_{-i} se

$$U_i(s, \sigma_{-i}) = \max\{U_i(\rho, \sigma_{-i}) : \rho \in \Sigma_i\}.$$

Discussão

Nash descreveu um jogo de poker com três jogadores, com utilidades inteiras, e único equilíbrio envolvendo irracionais.

Seja $\sigma \in \Sigma$. Estratégia s em S_i é resposta ótima para σ_{-i} se

$$U_i(s, \sigma_{-i}) = \max\{U_i(\rho, \sigma_{-i}) : \rho \in \Sigma_i\}.$$

Teorema: $\sigma \in \Sigma$ é equilíbrio de Nash sse, para todo i, todas as estratégias puras no suporte dos σ_i são respostas ótimas.

Discussão

Nash descreveu um jogo de poker com três jogadores, com utilidades inteiras, e único equilíbrio envolvendo irracionais.

Seja $\sigma \in \Sigma$. Estratégia s em S_i é resposta ótima para σ_{-i} se

$$U_i(s, \sigma_{-i}) = \max\{U_i(\rho, \sigma_{-i}) : \rho \in \Sigma_i\}.$$

Teorema: $\sigma \in \Sigma$ é equilíbrio de Nash sse, para todo i, todas as estratégias puras no suporte dos σ_i são respostas ótimas.

Suporte de σ_i: subconjunto de S_i em que σ_i é positivo.

Discussão

Seja $\sigma \in \Sigma$. Estratégia s em S_i é resposta ótima para σ_{-i} se

$$U_i(s, \sigma_{-i}) = \max\{U_i(\rho, \sigma_{-i}) : \rho \in \Sigma_i\}.$$

Teorema: $\sigma \in \Sigma$ é equilíbrio de Nash sse todas as estratégias puras no suporte dos σ_i são respostas ótimas.

Suporte de σ_i: subconjunto de S_i em que σ_i é positivo.

Discussão

Seja $\sigma \in \Sigma$. Estratégia s em S_i é resposta ótima para σ_{-i} se

$$U_i(s, \sigma_{-i}) = \max\{U_i(\rho, \sigma_{-i}) : \rho \in \Sigma_i\}.$$

Teorema: $\sigma \in \Sigma$ é equilíbrio de Nash sse todas as estratégias puras no suporte dos σ_i são respostas ótimas.

Suporte de σ_i: subconjunto de S_i em que σ_i é positivo.

Exemplo: Jogo simétrico com dois jogadores dado por

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Discussão

Seja $\sigma \in \Sigma$. Estratégia s em S_i é resposta ótima para σ_{-i} se

$$U_i(s, \sigma_{-i}) = \max\{U_i(\rho, \sigma_{-i}) : \rho \in \Sigma_i\}.$$

Teorema: $\sigma \in \Sigma$ é equilíbrio de Nash sse todas as estratégias puras no suporte dos σ_i são respostas ótimas.

Suporte de σ_i: subconjunto de S_i em que σ_i é positivo.

Exemplo: Jogo simétrico com dois jogadores dado por

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Jogo simétrico de dois jogadores: $A_2 = A_1^t$.

Discussão

Seja $\sigma \in \Sigma$. Estratégia s em S_i é resposta ótima para σ_{-i} se

$$U_i(s, \sigma_{-i}) = \max\{U_i(\rho, \sigma_{-i}) : \rho \in \Sigma_i\}.$$

Teorema: $\sigma \in \Sigma$ é equilíbrio de Nash sse todas as estratégias puras no suporte dos σ_i são respostas ótimas.

Suporte de σ_i: subconjunto de S_i em que σ_i é positivo.

Exemplo: Jogo simétrico com dois jogadores dado por

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Equilíbrio simétrico de Nash: (0, 1/3, 2/3).

Consequência

Resolver NASH significa encontrar
o suporte certo das estratégias mistas de cada jogador.

Consequência

Resolver NASH significa encontrar
o suporte certo das estratégias mistas de cada jogador.

Dados os suportes,
um sistema de equações polinomiais identifica σ.

Consequência

Resolver NASH significa encontrar
o suporte certo das estratégias mistas de cada jogador.

Dados os suportes,
um sistema de equações polinomiais identifica σ.

Sejam $S_i' \subseteq S_i$ os suportes para cada i, e $k_i = |S_i'|$.

As k_i probabilidades correspondentes devem somar 1.

O valor de U_i deve ser igual para as k_i estratégias.

Consequência

Resolver NASH significa encontrar
o suporte certo das estratégias mistas de cada jogador.

Dados os suportes,
um sistema de equações polinomiais identifica σ.

Sejam $S'_i \subseteq S_i$ os suportes para cada i, e $k_i = |S'_i|$.

As k_i probabilidades correspondentes devem somar 1.

O valor de U_i deve ser igual para as k_i estratégias.

Tais restrições são descritas em k_i equações,
para um total de $\sum_i k_i$ equações, com $\sum_i k_i$ variáveis.

Consequência

Resolver NASH significa encontrar o suporte certo das estratégias mistas de cada jogador.

Sejam $S'_i \subseteq S_i$ os suportes para cada i, e $k_i = |S'_i|$.

Sistema de equações polinomiais:

As k_i probabilidades correspondentes devem somar 1.
O valor de U_i deve ser igual para as k_i estratégias.

Tais restrições são descritas em k_i's equações, para um total de $\sum_i k_i$ equações, com $\sum_i k_i$ variáveis.

Consequência

Resolver NASH significa encontrar o suporte certo
das estratégias mistas de cada jogador.

Sejam $S_i' \subseteq S_i$ os suportes para cada i, e $k_i = |S_i'|$.

Sistema de equações polinomiais:

As k_i probabilidades correspondentes devem somar 1.
O valor de U_i deve ser igual para as k_i estratégias.

Tais restrições são descritas em k_i's equações,
para um total de $\sum_i k_i$ equações, com $\sum_i k_i$ variáveis.

Resolva o sistema e verifique se a solução consiste
em números positivos que formam um equilíbrio.

Complexidade computacional

Os seguintes problemas são NP-completos:
dado um jogo com dois jogadores na forma matricial,
decidir se este jogo tem

- pelo menos dois equilíbrios de Nash;
- dado k, um equilíbrio de Nash para o jogador 1 com utilidade pelo menos k;
- dado k, um equilíbrio de Nash com valor social pelo menos k;
- dado k, um equilíbrio de Nash com pelo menos k estratégias no seu suporte;
- dado s, um equilíbrio de Nash com s no suporte;
- dado s, um equilíbrio de Nash sem s no suporte.

Complexidade computacional

Problema: Dado jogo com dois jogadores na forma padrão, decidir se existem pelo menos dois equilíbrios de Nash.

Complexidade computacional

Problema: Dado jogo com dois jogadores na forma padrão, decidir se existem pelo menos dois equilíbrios de Nash.

Vamos mostrar uma redução de SAT para este problema.

Complexidade computacional

Problema: Dado jogo com dois jogadores na forma padrão, decidir se existem pelo menos dois equilíbrios de Nash.

Vamos mostrar uma redução de SAT para este problema.

ϕ: fórmula booleana em FNC sobre as variáveis $x_1, \ldots, x_n$.

$J_\epsilon(\phi)$: jogo simétrico com dois jogadores para $\epsilon > 0$.

Complexidade computacional

Problema: Dado jogo com dois jogadores na forma padrão, decidir se existem pelo menos dois equilíbrios de Nash.

Vamos mostrar uma redução de SAT para este problema.

ϕ: fórmula booleana em FNC sobre as variáveis $x_1, \ldots, x_n$.

$J_\epsilon(\phi)$: jogo simétrico com dois jogadores para $\epsilon > 0$.

O conjunto S de estratégias de cada jogador é a união

- do conjunto das variáveis $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$,
- do conjunto dos literais $L = \{+x_1, -x_1, \ldots, +x_n, -x_n\}$,
- do conjunto das cláusulas C, e
- de uma estratégia especial f.

Complexidade computacional

Problema: Dado jogo com dois jogadores na forma padrão, decidir se existem pelo menos dois equilíbrios de Nash.

Vamos mostrar uma redução de SAT para este problema.

ϕ: fórmula booleana em FNC sobre as variáveis $x_1, \ldots, x_n$.

$J_\epsilon(\phi)$: jogo simétrico com dois jogadores para $\epsilon > 0$.

O conjunto S de estratégias de cada jogador é a união

- do conjunto das variáveis $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$,
- do conjunto dos literais $L = \{+x_1, -x_1, \ldots, +x_n, -x_n\}$,
- do conjunto das cláusulas C, e
- de uma estratégia especial f.

$v(\ell) = x$ se x é a variável correspondente a ℓ.

Funções utilidade

- $u_1(f, f) = u_2(f, f) = \epsilon$
- $u_1(y, f) = u_2(f, y) = 0$ para todo y em $S \setminus \{f\}$
- $u_1(f, y) = u_2(y, f) = n - 1$ para todo y em $S \setminus \{f\}$

Funções utilidade

- $u_1(f, f) = u_2(f, f) = \epsilon$
- $u_1(y, f) = u_2(f, y) = 0$ para todo y em $S \setminus \{f\}$
- $u_1(f, y) = u_2(y, f) = n - 1$ para todo y em $S \setminus \{f\}$

- $u_1(c, \ell) = u_2(\ell, c) = 0$ para todo c em C e ℓ in c
- $u_1(c, \ell) = u_2(\ell, c) = n$ para todo c em C e ℓ in $L \setminus c$
- $u_1(c, y) = u_2(y, c) = n - 4$ para todo c em C e y in $V \cup C$

Funções utilidade

- $u_1(f, f) = u_2(f, f) = \epsilon$
- $u_1(y, f) = u_2(f, y) = 0$ para todo y em $S \setminus \{f\}$
- $u_1(f, y) = u_2(y, f) = n - 1$ para todo y em $S \setminus \{f\}$

- $u_1(c, \ell) = u_2(\ell, c) = 0$ para todo c em C e ℓ in c
- $u_1(c, \ell) = u_2(\ell, c) = n$ para todo c em C e ℓ in $L \setminus c$
- $u_1(c, y) = u_2(y, c) = n - 4$ para todo c em C e y in $V \cup C$

- $u_1(x, \ell) = u_2(\ell, x) = 0$ para todo x em V e ℓ tq $v(\ell) = x$
- $u_1(x, \ell) = u_2(\ell, x) = n$ para todo x em V e ℓ tq $v(\ell) \neq x$
- $u_1(x, y) = u_2(y, x) = n - 4$ para todo x em V e y in $V \cup C$

Funções utilidade

- $u_1(f, f) = u_2(f, f) = \epsilon$
- $u_1(y, f) = u_2(f, y) = 0$ para todo y em $S \setminus \{f\}$
- $u_1(f, y) = u_2(y, f) = n - 1$ para todo y em $S \setminus \{f\}$

- $u_1(c, \ell) = u_2(\ell, c) = 0$ para todo c em C e ℓ in c
- $u_1(c, \ell) = u_2(\ell, c) = n$ para todo c em C e ℓ in $L \setminus c$
- $u_1(c, y) = u_2(y, c) = n - 4$ para todo c em C e y in $V \cup C$

- $u_1(x, \ell) = u_2(\ell, x) = 0$ para todo x em V e ℓ tq $v(\ell) = x$
- $u_1(x, \ell) = u_2(\ell, x) = n$ para todo x em V e ℓ tq $v(\ell) \neq x$
- $u_1(x, y) = u_2(y, x) = n - 4$ para todo x em V e y in $V \cup C$

- $u_1(\ell_1, \ell_2) = u_2(\ell_2, \ell_1) = n - 1$ para todo $\ell_1 \neq -\ell_2$
- $u_1(\ell_1, \ell_2) = u_2(\ell_2, \ell_1) = n - 4$ para todo $\ell_1 = -\ell_2$
- $u_1(\ell, y) = u_2(y, \ell) = n - 4$ para todo ℓ em L e y in $V \cup C$

Equilíbrios de Nash

Equilíbrio óbvio: (f, f) pois

- $u_1(f, f) = u_2(f, f) = \epsilon$
- $u_1(y, f) = u_2(f, y) = 0$ para todo x em $S \setminus \{f\}$

Equilíbrios de Nash

Equilíbrio óbvio: (f, f) pois

- $u_1(f, f) = u_2(f, f) = \epsilon$
- $u_1(y, f) = u_2(f, y) = 0$ para todo x em $S \setminus \{f\}$

Existe um outro equilíbrio de Nash (EN) sse ϕ é satisfatível.

Equilíbrios de Nash

Equilíbrio óbvio: (f, f) pois

- $u_1(f, f) = u_2(f, f) = \epsilon$
- $u_1(y, f) = u_2(f, y) = 0$ para todo x em $S \setminus \{f\}$

Existe um outro equilíbrio de Nash (EN) sse ϕ é satisfatível.

$A \subseteq L$: conjunto de literais de atribuição que satisfaz ϕ.

Estratégia mista que escolhe
cada elemento de A com probabilidade $1/n$ é EN.

Equilíbrios de Nash

Equilíbrio óbvio: (f, f) pois

- $u_1(f, f) = u_2(f, f) = \epsilon$
- $u_1(y, f) = u_2(f, y) = 0$ para todo x em $S \setminus \{f\}$

Existe um outro equilíbrio de Nash (EN) sse ϕ é satisfatível.

$A \subseteq L$: conjunto de literais de atribuição que satisfaz ϕ.

Estratégia mista que escolhe
cada elemento de A com probabilidade $1/n$ é EN.

EN distinto de (f, f) é uma estratégia mista do tipo acima.

Exemplo: $\phi = (x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2)$

A B	x_1	x_2	$+x_1$	$-x_1$	$+x_2$	$-x_2$	$x_1 \vee \bar{x}_2$	$\bar{x}_1 \vee x_2$	f
x_1	-2 -2	-2 -2	0 -2	0 -2	2 -2	2 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
x_2	-2 -2	-2 -2	2 -2	2 -2	0 -2	0 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
$+x_1$	-2 0	-2 2	1 1	-2 -2	1 1	1 1	-2 0	-2 2	0 1
$-x_1$	-2 0	-2 2	-2 -2	1 1	1 1	1 1	-2 2	-2 0	0 1
$+x_2$	-2 2	-2 0	1 1	1 1	1 1	-2 -2	-2 2	-2 0	0 1
$-x_2$	-2 2	-2 0	1 1	1 1	-2 -2	1 1	-2 0	-2 2	0 1
$x_1 \vee \bar{x}_2$	-2 -2	-2 -2	0 -2	2 -2	2 -2	0 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
$\bar{x}_1 \vee x_2$	-2 -2	-2 -2	2 -2	0 -2	0 -2	2 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
f	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	ϵ ϵ

$A \subseteq L$: conjunto de literais de atribuição que satisfaz ϕ.

Estratégia mista que escolhe
cada elemento de A com probabilidade $1/n$ é EN.

Exemplo: $\phi = (x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2)$

A B	x_1	x_2	$+x_1$	$-x_1$	$+x_2$	$-x_2$	$x_1 \vee \bar{x}_2$	$\bar{x}_1 \vee x_2$	f
x_1	-2 -2	-2 -2	0 -2	0 -2	2 -2	2 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
x_2	-2 -2	-2 -2	2 -2	2 -2	0 -2	0 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
$+x_1$	-2 0	-2 2	1 1	-2 -2	1 1	1 1	-2 0	-2 2	0 1
$-x_1$	-2 0	-2 2	-2 -2	1 1	1 1	1 1	-2 2	-2 0	0 1
$+x_2$	-2 2	-2 0	1 1	1 1	1 1	-2 -2	-2 2	-2 0	0 1
$-x_2$	-2 2	-2 0	1 1	1 1	-2 -2	1 1	-2 0	-2 2	0 1
$x_1 \vee \bar{x}_2$	-2 -2	-2 -2	0 -2	2 -2	2 -2	0 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
$\bar{x}_1 \vee x_2$	-2 -2	-2 -2	2 -2	0 -2	0 -2	2 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
f	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	ϵ ϵ

$A \subseteq L$: conjunto de literais de atribuição que satisfaz ϕ.

Estratégia mista que escolhe
cada elemento de A com probabilidade $1/n$ é EN.

$x_1 = x_2 = V$

$\sigma_i(+x_1) = \sigma_i(+x_2) = 1/2$ para $i = 1, 2$

$\mathrm{E}[u_1(\sigma)] = \mathrm{E}[u_2(\sigma)] = n - 1$

Exemplo: $\phi = (x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2)$

A B	x_1	x_2	$+x_1$	$-x_1$	$+x_2$	$-x_2$	$x_1 \vee \bar{x}_2$	$\bar{x}_1 \vee x_2$	f
x_1	-2 -2	-2 -2	0 -2	0 -2	2 -2	2 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
x_2	-2 -2	-2 -2	2 -2	2 -2	0 -2	0 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
$+x_1$	-2 0	-2 2	1 1	-2 -2	1 1	1 1	-2 0	-2 2	0 1
$-x_1$	-2 0	-2 2	-2 -2	1 1	1 1	1 1	-2 2	-2 0	0 1
$+x_2$	-2 2	-2 0	1 1	1 1	1 1	-2 -2	-2 2	-2 0	0 1
$-x_2$	-2 2	-2 0	1 1	1 1	-2 -2	1 1	-2 0	-2 2	0 1
$x_1 \vee \bar{x}_2$	-2 -2	-2 -2	0 -2	2 -2	2 -2	0 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
$\bar{x}_1 \vee x_2$	-2 -2	-2 -2	2 -2	0 -2	0 -2	2 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
f	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	ϵ ϵ

$A \subseteq L$: conjunto de literais de atribuição que satisfaz ϕ.

Estratégia mista que escolhe
cada elemento de A com probabilidade $1/n$ é EN.

$x_1 = x_2 = F$

$\sigma_i(-x_1) = \sigma_i(-x_2) = 1/2$ para $i = 1, 2$

$\mathrm{E}[u_1(\sigma)] = \mathrm{E}[u_2(\sigma)] = n - 1$

Exemplo: $\phi = (x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2)$

A B	x_1	x_2	$+x_1$	$-x_1$	$+x_2$	$-x_2$	$x_1 \vee \bar{x}_2$	$\bar{x}_1 \vee x_2$	f
x_1	−2 −2	−2 −2	0 −2	0 −2	2 −2	2 −2	−2 −2	−2 −2	0 1
x_2	−2 −2	−2 −2	2 −2	2 −2	0 −2	0 −2	−2 −2	−2 −2	0 1
$+x_1$	−2 0	−2 2	1 1	−2 −2	1 1	1 1	−2 0	−2 2	0 1
$-x_1$	−2 0	−2 2	−2 −2	1 1	1 1	1 1	−2 2	−2 0	0 1
$+x_2$	−2 2	−2 0	1 1	1 1	1 1	−2 −2	−2 2	−2 0	0 1
$-x_2$	−2 2	−2 0	1 1	1 1	−2 −2	1 1	−2 0	−2 2	0 1
$x_1 \vee \bar{x}_2$	−2 −2	−2 −2	0 −2	2 −2	2 −2	0 −2	−2 −2	−2 −2	0 1
$\bar{x}_1 \vee x_2$	−2 −2	−2 −2	2 −2	0 −2	0 −2	2 −2	−2 −2	−2 −2	0 1
f	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	ϵ ϵ

Se o jogador B não escolhe estratégia de L,
então a única resposta ótima para A é f.

Exemplo: $\phi = (x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2)$

A B	x_1	x_2	$+x_1$	$-x_1$	$+x_2$	$-x_2$	$x_1 \vee \bar{x}_2$	$\bar{x}_1 \vee x_2$	f
x_1	-2 -2	-2 -2	0 -2	0 -2	2 -2	2 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
x_2	-2 -2	-2 -2	2 -2	2 -2	0 -2	0 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
$+x_1$	-2 0	-2 2	1 1	-2 -2	1 1	1 1	-2 0	-2 2	0 1
$-x_1$	-2 0	-2 2	-2 -2	1 1	1 1	1 1	-2 2	-2 0	0 1
$+x_2$	-2 2	-2 0	1 1	1 1	1 1	-2 -2	-2 2	-2 0	0 1
$-x_2$	-2 2	-2 0	1 1	1 1	-2 -2	1 1	-2 0	-2 2	0 1
$x_1 \vee \bar{x}_2$	-2 -2	-2 -2	0 -2	2 -2	2 -2	0 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
$\bar{x}_1 \vee x_2$	-2 -2	-2 -2	2 -2	0 -2	0 -2	2 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
f	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	ϵ ϵ

Se o jogador B não escolhe estratégia de L,
então a única resposta ótima para A é f.

Suponha que $p^B(L) > 0$.

Exemplo: $\phi = (x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2)$

A \ B	x_1	x_2	$+x_1$	$-x_1$	$+x_2$	$-x_2$	$x_1 \vee \bar{x}_2$	$\bar{x}_1 \vee x_2$	f
x_1	-2 -2	-2 -2	0 -2	0 -2	2 -2	2 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
x_2	-2 -2	-2 -2	2 -2	2 -2	0 -2	0 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
$+x_1$	-2 0	-2 2	1 1	-2 -2	1 1	1 1	-2 0	-2 2	0 1
$-x_1$	-2 0	-2 2	-2 -2	1 1	1 1	1 1	-2 2	-2 0	0 1
$+x_2$	-2 2	-2 0	1 1	1 1	1 1	-2 -2	-2 2	-2 0	0 1
$-x_2$	-2 2	-2 0	1 1	1 1	-2 -2	1 1	-2 0	-2 2	0 1
$x_1 \vee \bar{x}_2$	-2 -2	-2 -2	0 -2	2 -2	2 -2	0 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
$\bar{x}_1 \vee x_2$	-2 -2	-2 -2	2 -2	0 -2	0 -2	2 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
f	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	ϵ ϵ

Se o jogador B não escolhe estratégia de L,
então a única resposta ótima para A é f.

Suponha que $p^B(L) > 0$.

Considere a esperança da utilidade de A
condicionada a B não escolher estratégia de L.

Exemplo: $\phi = (x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2)$

A B	x_1	x_2	$+x_1$	$-x_1$	$+x_2$	$-x_2$	$x_1 \vee \bar{x}_2$	$\bar{x}_1 \vee x_2$	f
x_1	-2 -2	-2 -2	0 -2	0 -2	2 -2	2 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
x_2	-2 -2	-2 -2	2 -2	2 -2	0 -2	0 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
$+x_1$	-2 0	-2 2	1 1	-2 -2	1 1	1 1	-2 0	-2 2	0 1
$-x_1$	-2 0	-2 2	-2 -2	1 1	1 1	1 1	-2 2	-2 0	0 1
$+x_2$	-2 2	-2 0	1 1	1 1	1 1	-2 -2	-2 2	-2 0	0 1
$-x_2$	-2 2	-2 0	1 1	1 1	-2 -2	1 1	-2 0	-2 2	0 1
$x_1 \vee \bar{x}_2$	-2 -2	-2 -2	0 -2	2 -2	2 -2	0 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
$\bar{x}_1 \vee x_2$	-2 -2	-2 -2	2 -2	0 -2	0 -2	2 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
f	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	ϵ ϵ

Se o jogador B não escolhe estratégia de L,
então a única resposta ótima para A é f.

Suponha que $p^B(L) > 0$.

Considere a esperança da utilidade de A
condicionada a B não escolher estratégia de L.

Se esta esperança de A for menor que $n-1$,
A estaria melhor jogando apenas f (que dá $n-1$ neste caso).

Exemplo: $\phi = (x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2)$

A B	x_1	x_2	$+x_1$	$-x_1$	$+x_2$	$-x_2$	$x_1 \vee \bar{x}_2$	$\bar{x}_1 \vee x_2$	f
x_1	-2 -2	-2 -2	0 -2	0 -2	2 -2	2 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
x_2	-2 -2	-2 -2	2 -2	2 -2	0 -2	0 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
$+x_1$	-2 0	-2 2	1 1	-2 -2	1 1	1 1	-2 0	-2 2	0 1
$-x_1$	-2 0	-2 2	-2 -2	1 1	1 1	1 1	-2 2	-2 0	0 1
$+x_2$	-2 2	-2 0	1 1	1 1	1 1	-2 -2	-2 2	-2 0	0 1
$-x_2$	-2 2	-2 0	1 1	1 1	-2 -2	1 1	-2 0	-2 2	0 1
$x_1 \vee \bar{x}_2$	-2 -2	-2 -2	0 -2	2 -2	2 -2	0 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
$\bar{x}_1 \vee x_2$	-2 -2	-2 -2	2 -2	0 -2	0 -2	2 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
f	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	ϵ ϵ

Se o jogador B não escolhe estratégia de L,
então a única resposta ótima para A é f.

Suponha que $p^B(L) > 0$.

Considere a esperança da utilidade de A
condicionada a B não escolher estratégia de L.

Se esta esperança de A for menor que $n-1$,
A estaria melhor jogando apenas f (que dá $n-1$ neste caso).

Assim esta esperança de A deve ser pelo menos $n-1$.

Exemplo: $\phi = (x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2)$

A B	x_1	x_2	$+x_1$	$-x_1$	$+x_2$	$-x_2$	$x_1 \vee \bar{x}_2$	$\bar{x}_1 \vee x_2$	f
x_1	-2 -2	-2 -2	0 -2	0 -2	2 -2	2 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
x_2	-2 -2	-2 -2	2 -2	2 -2	0 -2	0 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
$+x_1$	-2 0	-2 2	1 1	-2 -2	1 1	1 1	-2 0	-2 2	0 1
$-x_1$	-2 0	-2 2	-2 -2	1 1	1 1	1 1	-2 2	-2 0	0 1
$+x_2$	-2 2	-2 0	1 1	1 1	1 1	-2 -2	-2 2	-2 0	0 1
$-x_2$	-2 2	-2 0	1 1	1 1	-2 -2	1 1	-2 0	-2 2	0 1
$x_1 \vee \bar{x}_2$	-2 -2	-2 -2	0 -2	2 -2	2 -2	0 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
$\bar{x}_1 \vee x_2$	-2 -2	-2 -2	2 -2	0 -2	0 -2	2 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
f	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	ϵ ϵ

Se B põe menos peso nos literais da variável x_i que de outras, então a única resposta ótima para A é x_i, que dá mais que $n-1$.

Exemplo: $\phi = (x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2)$

A B	x_1	x_2	$+x_1$	$-x_1$	$+x_2$	$-x_2$	$x_1 \vee \bar{x}_2$	$\bar{x}_1 \vee x_2$	f
x_1	-2 -2	-2 -2	0 -2	0 -2	2 -2	2 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
x_2	-2 -2	-2 -2	2 -2	2 -2	0 -2	0 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
$+x_1$	-2 0	-2 2	1 1	-2 -2	1 1	1 1	-2 0	-2 2	0 1
$-x_1$	-2 0	-2 2	-2 -2	1 1	1 1	1 1	-2 2	-2 0	0 1
$+x_2$	-2 2	-2 0	1 1	1 1	1 1	-2 -2	-2 2	-2 0	0 1
$-x_2$	-2 2	-2 0	1 1	1 1	-2 -2	1 1	-2 0	-2 2	0 1
$x_1 \vee \bar{x}_2$	-2 -2	-2 -2	0 -2	2 -2	2 -2	0 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
$\bar{x}_1 \vee x_2$	-2 -2	-2 -2	2 -2	0 -2	0 -2	2 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
f	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	ϵ ϵ

Se B põe menos peso nos literais da variável x_i que de outras, então a única resposta ótima para A é x_i, que dá mais que $n - 1$.

Então B põe mesmo peso nos literais de cada variável.

Exemplo: $\phi = (x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2)$

A B	x_1	x_2	$+x_1$	$-x_1$	$+x_2$	$-x_2$	$x_1 \vee \bar{x}_2$	$\bar{x}_1 \vee x_2$	f
x_1	-2 -2	-2 -2	0 -2	0 -2	2 -2	2 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
x_2	-2 -2	-2 -2	2 -2	2 -2	0 -2	0 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
$+x_1$	-2 0	-2 2	1 1	-2 -2	1 1	1 1	-2 0	-2 2	0 1
$-x_1$	-2 0	-2 2	-2 -2	1 1	1 1	1 1	-2 2	-2 0	0 1
$+x_2$	-2 2	-2 0	1 1	1 1	1 1	-2 -2	-2 2	-2 0	0 1
$-x_2$	-2 2	-2 0	1 1	1 1	-2 -2	1 1	-2 0	-2 2	0 1
$x_1 \vee \bar{x}_2$	-2 -2	-2 -2	0 -2	2 -2	2 -2	0 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
$\bar{x}_1 \vee x_2$	-2 -2	-2 -2	2 -2	0 -2	0 -2	2 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
f	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	ϵ ϵ

Se B põe menos peso nos literais da variável x_i que de outras, então a única resposta ótima para A é x_i, que dá mais que $n-1$.

Então B põe mesmo peso nos literais de cada variável.

Se B põe peso em $+x_i$ e em $-x_i$, então
A não pode escolher $+x_i$ ou $-x_i$, ou fica com menos que $n-1$.

Exemplo: $\phi = (x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2)$

A B	x_1	x_2	$+x_1$	$-x_1$	$+x_2$	$-x_2$	$x_1 \vee \bar{x}_2$	$\bar{x}_1 \vee x_2$	f
x_1	-2 -2	-2 -2	0 -2	0 -2	2 -2	2 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
x_2	-2 -2	-2 -2	2 -2	2 -2	0 -2	0 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
$+x_1$	-2 0	-2 2	1 1	-2 -2	1 1	1 1	-2 0	-2 2	0 1
$-x_1$	-2 0	-2 2	-2 -2	1 1	1 1	1 1	-2 2	-2 0	0 1
$+x_2$	-2 2	-2 0	1 1	1 1	1 1	-2 -2	-2 2	-2 0	0 1
$-x_2$	-2 2	-2 0	1 1	1 1	-2 -2	1 1	-2 0	-2 2	0 1
$x_1 \vee \bar{x}_2$	-2 -2	-2 -2	0 -2	2 -2	2 -2	0 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
$\bar{x}_1 \vee x_2$	-2 -2	-2 -2	2 -2	0 -2	0 -2	2 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
f	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	ϵ ϵ

Se B põe menos peso nos literais da variável x_i que de outras, então a única resposta ótima para A é x_i, que dá mais que $n-1$.

Então B põe mesmo peso nos literais de cada variável.

Se B põe peso em $+x_i$ e em $-x_i$, então
A não pode escolher $+x_i$ ou $-x_i$, ou fica com menos que $n-1$.

Assim A e B escolhem uma atribuição para os x_i's.

Exemplo: $\phi = (x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2)$

A B	x_1	x_2	$+x_1$	$-x_1$	$+x_2$	$-x_2$	$x_1 \vee \bar{x}_2$	$\bar{x}_1 \vee x_2$	f
x_1	−2 −2	−2 −2	0 −2	0 −2	2 −2	2 −2	−2 −2	−2 −2	0 1
x_2	−2 −2	−2 −2	2 −2	2 −2	0 −2	0 −2	−2 −2	−2 −2	0 1
$+x_1$	−2 0	−2 2	1 1	−2 −2	1 1	1 1	−2 0	−2 2	0 1
$-x_1$	−2 0	−2 2	−2 −2	1 1	1 1	1 1	−2 2	−2 0	0 1
$+x_2$	−2 2	−2 0	1 1	1 1	1 1	−2 −2	−2 2	−2 0	0 1
$-x_2$	−2 2	−2 0	1 1	1 1	−2 −2	1 1	−2 0	−2 2	0 1
$x_1 \vee \bar{x}_2$	−2 −2	−2 −2	0 −2	2 −2	2 −2	0 −2	−2 −2	−2 −2	0 1
$\bar{x}_1 \vee x_2$	−2 −2	−2 −2	2 −2	0 −2	0 −2	2 −2	−2 −2	−2 −2	0 1
f	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	ϵ ϵ

A e B escolhem uma atribuição para os x_i's.

Exemplo: $\phi = (x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2)$

A B	x_1	x_2	$+x_1$	$-x_1$	$+x_2$	$-x_2$	$x_1 \vee \bar{x}_2$	$\bar{x}_1 \vee x_2$	f
x_1	-2 -2	-2 -2	0 -2	0 -2	2 -2	2 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
x_2	-2 -2	-2 -2	2 -2	2 -2	0 -2	0 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
$+x_1$	-2 0	-2 2	1 1	-2 -2	1 1	1 1	-2 0	-2 2	0 1
$-x_1$	-2 0	-2 2	-2 -2	1 1	1 1	1 1	-2 2	-2 0	0 1
$+x_2$	-2 2	-2 0	1 1	1 1	1 1	-2 -2	-2 2	-2 0	0 1
$-x_2$	-2 2	-2 0	1 1	1 1	-2 -2	1 1	-2 0	-2 2	0 1
$x_1 \vee \bar{x}_2$	-2 -2	-2 -2	0 -2	2 -2	2 -2	0 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
$\bar{x}_1 \vee x_2$	-2 -2	-2 -2	2 -2	0 -2	0 -2	2 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
f	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	ϵ ϵ

A e B escolhem uma atribuição para os x_i's.

Se essa atribuição não satisfaz ϕ,
então A escolhe uma cláusula não satisfeita, que dá utilidade n,
e não seria equilíbrio pois B iria mudar para f.

Exemplo: $\phi = (x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2)$

A B	x_1	x_2	$+x_1$	$-x_1$	$+x_2$	$-x_2$	$x_1 \vee \bar{x}_2$	$\bar{x}_1 \vee x_2$	f
x_1	-2 -2	-2 -2	0 -2	0 -2	2 -2	2 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
x_2	-2 -2	-2 -2	2 -2	2 -2	0 -2	0 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
$+x_1$	-2 0	-2 2	1 1	-2 -2	1 1	1 1	-2 0	-2 2	0 1
$-x_1$	-2 0	-2 2	-2 -2	1 1	1 1	1 1	-2 2	-2 0	0 1
$+x_2$	-2 2	-2 0	1 1	1 1	1 1	-2 -2	-2 2	-2 0	0 1
$-x_2$	-2 2	-2 0	1 1	1 1	-2 -2	1 1	-2 0	-2 2	0 1
$x_1 \vee \bar{x}_2$	-2 -2	-2 -2	0 -2	2 -2	2 -2	0 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
$\bar{x}_1 \vee x_2$	-2 -2	-2 -2	2 -2	0 -2	0 -2	2 -2	-2 -2	-2 -2	0 1
f	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	ϵ ϵ

A e B escolhem uma atribuição para os x_i's.

Se essa atribuição não satisfaz ϕ,
então A escolhe uma cláusula não satisfeita, que dá utilidade n,
e não seria equilíbrio pois B iria mudar para f.

Como é equilíbrio, essa atribuição satisfaz ϕ.