Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m\times n}$,
encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

Jogador 1 quer encontrar p que

$$\begin{aligned}
&\text{maximize } v\\
&\text{sujeito a } \textstyle\sum_i p_i = 1\\
&\qquad\qquad (pA)_j \geq v \text{ para } j = 1,\ldots,n\\
&\qquad\qquad p_i \geq 0 \text{ para } i = 1,\ldots,m.
\end{aligned}$$

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$,
encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

Jogador 1 quer encontrar p que

maximize v
sujeito a $\sum_i p_i = 1$
$(pA)_j \geq v$ para $j = 1, \ldots, n$
$p_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, m$.

Jogador 2 quer encontrar q que

minimize w
sujeito a $\sum_i q_i = 1$
$(Aq)_i \leq w$ para $i = 1, \ldots, m$
$q_j \geq 0$ para $j = 1, \ldots, n$.

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$,
encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

Jogador 1 quer encontrar p que

$$\begin{aligned} &\text{maximize } v \\ &\text{sujeito a } \textstyle\sum_i p_i = 1 \\ &\qquad\qquad (pA)_j \geq v \text{ para } j = 1, \ldots, n \\ &\qquad\qquad p_i \geq 0 \text{ para } i = 1, \ldots, m. \end{aligned}$$

Jogador 2 quer encontrar q que

$$\begin{aligned} &\text{minimize } w \\ &\text{sujeito a } \textstyle\sum_i q_i = 1 \\ &\qquad\qquad (Aq)_i \leq w \text{ para } i = 1, \ldots, m \\ &\qquad\qquad q_j \geq 0 \text{ para } j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Estes são programas lineares, e um é o dual do outro!

Forma padrão dos LPs

Programa primal:

$$\begin{aligned} \text{minimize } & cx \\ \text{sujeito a } & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Forma padrão dos LPs

Programa primal:

$$\begin{aligned} \text{minimize } & cx \\ \text{sujeito a } & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Programa dual:

$$\begin{aligned} \text{maximize } & by \\ \text{sujeito a } & A^T y \leq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Primeiro LP em forma padrão

Jogador 1 quer encontrar p que

$$\begin{aligned} &\text{maximize } v \\ &\text{sujeito a } \textstyle\sum_i p_i = 1 \\ &\qquad\qquad (pA)_j \geq v \text{ para } j = 1, \ldots, n \\ &\qquad\qquad p_i \geq 0 \text{ para } i = 1, \ldots, m. \end{aligned}$$

Forma padrão:

$$\begin{aligned} \text{minimize } & -v^+ + v^- \\ \text{sujeito a } & -\textstyle\sum_i p_i \geq -1 \\ & \textstyle\sum_i p_i \geq 1 \\ -v^+ + v^- + & \textstyle\sum_i a_{ij} p_i \geq 0 \quad \text{para } j = 1, \ldots, n \\ & v^+, v^-, p_i \geq 0 \quad \text{para } i = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

Segundo LP em forma padrão

Jogador 2 quer encontrar q que

minimize w
sujeito a $\sum_i q_i = 1$
$(Aq)_i \leq w$ para $i = 1, \ldots, m$
$q_j \geq 0$ para $j = 1, \ldots, n$.

Forma padrão:

$$
\begin{aligned}
\text{maximize } & -w^+ + w^- \\
\text{sujeito a } & -\sum_i q_i \leq -1 \\
& \sum_i q_i \leq 1 \\
-w^+ + w^- + & \sum_j a_{ij} q_j \leq 0 \quad \text{para } i = 1, \ldots, m \\
& w^+, w^-, q_j \geq 0 \quad \text{para } j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

LPs em forma padrão

$$
\begin{aligned}
\text{minimize } & -v^+ + v^- \\
\text{sujeito a } & -\sum_i p_i \geq -1 \\
& \sum_i p_i \geq 1 \\
-v^+ + v^- + & \sum_i a_{ij} p_i \geq 0 \quad \text{para } j = 1, \ldots, n \\
v^+, v^-, & p_i \geq 0 \quad \text{para } i = 1, \ldots, m
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{maximize } & -w^+ + w^- \\
\text{sujeito a } & -\sum_i q_i \leq -1 \\
& \sum_i q_i \leq 1 \\
-w^+ + w^- + & \sum_j a_{ij} q_j \leq 0 \quad \text{para } i = 1, \ldots, m \\
w^+, w^-, & q_j \geq 0 \quad \text{para } j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

Programa primal

$$
\begin{aligned}
\text{minimize } & -v^+ + v^- \\
\text{sujeito a } & -\textstyle\sum_i p_i \geq -1 \\
& \textstyle\sum_i p_i \geq 1 \\
-v^+ + v^- + & \textstyle\sum_i a_{ij} p_i \geq 0 \quad \text{para } j = 1, \ldots, n \\
v^+, v^-, & \, p_i \geq 0 \quad \text{para } i = 1, \ldots, m
\end{aligned}
$$

$$c = (-1, 1, 0, \ldots, 0) \quad \text{e} \quad b = (-1, 1, 0, \ldots, 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -1 & 1 & a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Relação entre os valores dos LPs

$$
\begin{aligned}
v &= \Big(\sum_j q_j\Big) v = \sum_j (v q_j) \\
&\leq \sum_j \Big(\sum_i a_{ij} p_i\Big) q_j = \sum_i \Big(\sum_j a_{ij} q_j\Big) p_i \\
&\leq \sum_i w p_i = \Big(\sum_i p_i\Big) w = w
\end{aligned}
$$

Relação entre os valores dos LPs

$$
\begin{aligned}
v &= \Big(\sum_j q_j\Big) v = \sum_j (v q_j) \\
&\leq \sum_j \Big(\sum_i a_{ij} p_i\Big) q_j = \sum_i \Big(\sum_j a_{ij} q_j\Big) p_i \\
&\leq \sum_i w p_i = \Big(\sum_i p_i\Big) w = w
\end{aligned}
$$

Para soluções ótimas, os valores v^* e w^* são iguais e

- se $q_j^* > 0$ então $\sum_i a_{ij} p_i^* = v^*$
- se $p_i^* > 0$ então $\sum_j a_{ij} q_j^* = w^*$

Relação entre os valores dos LPs

$$\begin{aligned} v &= \Big(\sum_j q_j\Big) v = \sum_j (v q_j) \\ &\leq \sum_j \Big(\sum_i a_{ij} p_i\Big) q_j = \sum_i \Big(\sum_j a_{ij} q_j\Big) p_i \\ &\leq \sum_i w p_i = \Big(\sum_i p_i\Big) w = w \end{aligned}$$

Para soluções ótimas, os valores v^* e w^* são iguais e

- se $q_j^* > 0$ então $\sum_i a_{ij} p_i^* = v^*$
- se $p_i^* > 0$ então $\sum_j a_{ij} q_j^* = w^*$

Toda estratégia no suporte de uma estrategia mista ótima tem o mesmo valor esperado (o valor ótimo).

Jogos com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$
representando um jogo de dois jogadores de soma zero,
encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

Jogos com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$
representando um jogo de dois jogadores de soma zero,
encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

Conclusão:

Este problema pode ser resolvido em tempo polinomial
(usando programação linear).

Jogos com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$
representando um jogo de dois jogadores de soma zero,
encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

Conclusão:

Este problema pode ser resolvido em tempo polinomial
(usando programação linear).

E para jogos que não sejam de soma zero?

Jogos com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$
representando um jogo de dois jogadores de soma zero,
encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

Conclusão:

Este problema pode ser resolvido em tempo polinomial
(usando programação linear).

E para jogos que não sejam de soma zero?

Veremos mais adiante.

Estratégias mistas

Uma estratégia mista para o jogador i
é uma distribuição de probabilidades no conjunto S_i.

Seja σ um vetor de estratégias mistas.

Ou seja, para cada jogador i,
σ_i é uma distribuição de probabilidades em S_i.

Estratégias mistas

Uma estratégia mista para o jogador i
é uma distribuição de probabilidades no conjunto S_i.

Seja σ um vetor de estratégias mistas.

Ou seja, para cada jogador i,
σ_i é uma distribuição de probabilidades em S_i.

Qual é a utilidade esperada do jogador i para σ?

Estratégias mistas

Uma estratégia mista para o jogador i
é uma distribuição de probabilidades no conjunto S_i.

Seja σ um vetor de estratégias mistas.

Ou seja, para cada jogador i,
σ_i é uma distribuição de probabilidades em S_i.

Qual é a utilidade esperada do jogador i para σ?

$$U_i(\sigma) = \mathrm{E}[u_i(\sigma)] \; = \; \sum_{s \in S} u_i(s) \mathrm{Pr}_\sigma[s],$$

onde $\mathrm{Pr}_\sigma[s] = \prod_j \sigma_j(s_j)$.
(Considera-se que os jogadores são independentes.)

Equilíbrio de Nash

Jogador i está satisfeito com σ se
$\mathrm{E}[u_i(\sigma)] \geq \mathrm{E}[u_i(\rho, \sigma_{-i})]$ para toda estratégia mista ρ sobre S_i.

Equilíbrio de Nash

Jogador i está satisfeito com σ se
$U_i(\sigma) \geq U_i(\rho, \sigma_{-i})$ para toda estratégia mista ρ sobre S_i.

Equilíbrio de Nash

Jogador i está satisfeito com σ se
$U_i(\sigma) \geq U_i(\rho, \sigma_{-i})$ para toda estratégia mista ρ sobre S_i.

σ é um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas)
se todo jogador está satisfeito com σ.

Ou seja, em σ,
nenhum jogador tem incentivo para mudar de estratégia (mista).

Equilíbrio de Nash

Jogador i está satisfeito com σ se
$U_i(\sigma) \geq U_i(\rho, \sigma_{-i})$ para toda estratégia mista ρ sobre S_i.

σ é um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas)
se todo jogador está satisfeito com σ.

Ou seja, em σ,
nenhum jogador tem incentivo para mudar de estratégia (mista).

Teorema (Nash, 1951): Todo jogo com um número finito de jogadores e conjuntos finitos de estratégias tem um equilíbrio de Nash de estratégias mistas.

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer (1909):

Toda função contínua $f : D \to D$, onde D é um subconjunto compacto e convexo do $\mathbb{R}^m$, tem um ponto fixo.

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer (1909):

Toda função contínua $f : D \to D$, onde D é um subconjunto compacto e convexo do $\mathbb{R}^m$, tem um ponto fixo.

Ponto fixo: x em D tal que $f(x) = x$.

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer (1909):

Toda função contínua $f : D \to D$, onde D é um subconjunto compacto e convexo do $\mathbb{R}^m$, tem um ponto fixo.

Ponto fixo: x em D tal que $f(x) = x$.

Conjunto compacto: fechado e limitado.

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer (1909):

Toda função contínua $f : D \to D$, onde D é um subconjunto compacto e convexo do $\mathbb{R}^m$, tem um ponto fixo.

Ponto fixo: x em D tal que $f(x) = x$.

Conjunto compacto: fechado e limitado.

Conjunto convexo: se x e $y \in D$, então o segmento $xy \subseteq D$.

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer (1909):

Toda função contínua $f : D \to D$, onde D é um subconjunto compacto e convexo do $\mathbb{R}^m$, tem um ponto fixo.

Ponto fixo: x em D tal que $f(x) = x$.

Conjunto compacto: fechado e limitado.

Conjunto convexo: se x e $y \in D$, então o segmento $xy \subseteq D$.

Comentários na aula:

- Teorema do Ponto Fixo de Brouwer para $m = 1$ e $m = 2$.

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer (1909):

Toda função contínua $f : D \to D$, onde D é um subconjunto compacto e convexo do $\mathbb{R}^m$, tem um ponto fixo.

Ponto fixo: x em D tal que $f(x) = x$.

Conjunto compacto: fechado e limitado.

Conjunto convexo: se x e $y \in D$, então o segmento $xy \subseteq D$.

Comentários na aula:

- Teorema do Ponto Fixo de Brouwer para $m = 1$ e $m = 2$.
- Lema de Sperner e Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer (1909):

Toda função contínua $f : D \to D$, onde D é um subconjunto compacto e convexo do $\mathbb{R}^m$, tem um ponto fixo.

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer (1909):

Toda função contínua $f : D \to D$, onde D é um subconjunto compacto e convexo do $\mathbb{R}^m$, tem um ponto fixo.

Ponto fixo: x em D tal que $f(x) = x$.

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer (1909):

Toda função contínua $f : D \to D$, onde D é um subconjunto compacto e convexo do $\mathbb{R}^m$, tem um ponto fixo.

Ponto fixo: x em D tal que $f(x) = x$.

Para $m = 1$:

$f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ contínua

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer (1909):

Toda função contínua $f : D \to D$, onde D é um subconjunto compacto e convexo do $\mathbb{R}^m$, tem um ponto fixo.

Ponto fixo: x em D tal que $f(x) = x$.

Para $m = 1$:

$f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ contínua

Defina $g(x) = f(x) - x$, que é também contínua.

Note que $g(-1) = f(-1) + 1 \geq -1 + 1 = 0$ e
$g(1) = f(1) - 1 \leq 1 - 1 = 0$.

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer (1909):

Toda função contínua $f : D \to D$, onde D é um subconjunto compacto e convexo do $\mathbb{R}^m$, tem um ponto fixo.

Ponto fixo: x em D tal que $f(x) = x$.

Para $m = 1$:

$f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ contínua

Defina $g(x) = f(x) - x$, que é também contínua.

Note que $g(-1) = f(-1) + 1 \geq -1 + 1 = 0$ e
$g(1) = f(1) - 1 \leq 1 - 1 = 0$.

Pelo Teorema do Valor Intermediário,
existe $x \in [-1, 1]$ tal que $g(x) = 0$, logo $f(x) = x$.

Lema de Sperner

Seja $\Delta = ABC$ um triângulo no $\mathbb{R}^2$.

Seja T uma triangulação de Δ e
considere uma 3-coloração dos vértices de T.

Lema de Sperner

Seja $\Delta = ABC$ um triângulo no $\mathbb{R}^2$.

Seja T uma triangulação de Δ e
considere uma 3-coloração dos vértices de T.

Essa é uma coloração de Sperner se

- as cores de A, B e C são duas a duas distintas;
- cada vértice de T que está em uma aresta de Δ tem a cor de um dos extremos da aresta.

Lema de Sperner

Seja $\Delta = ABC$ um triângulo no $\mathbb{R}^2$.

Seja T uma triangulação de Δ e
considere uma 3-coloração dos vértices de T.

Essa é uma coloração de Sperner se

- as cores de A, B e C são duas a duas distintas;
- cada vértice de T que está em uma aresta de Δ tem a cor de um dos extremos da aresta.

Lema: Para toda coloração de Sperner de T, existe
um triângulo cujos vértices estão coloridos com cores distintas.

Prova: feita em aula.

Lema de Sperner

Seja $\Delta = ABC$ um triângulo no $\mathbb{R}^2$.

Seja T uma triangulação de Δ e
considere uma 3-coloração dos vértices de T.

Essa é uma coloração de Sperner se

- as cores de A, B e C são duas a duas distintas;
- cada vértice de T que está em uma aresta de Δ tem a cor de um dos extremos da aresta.

Lema: Para toda coloração de Sperner de T, existe
um triângulo cujos vértices estão coloridos com cores distintas.

Prova: feita em aula.

Vale também para o $\mathbb{R}^n$.

Lema de Sperner implica Brouwer

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer (1909):

Toda função contínua $f : D \to D$, onde D é um subconjunto compacto e convexo do $\mathbb{R}^m$, tem um ponto fixo.

Lema de Sperner implica Brouwer

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer (1909):

Toda função contínua $f : D \to D$, onde D é um subconjunto compacto e convexo do $\mathbb{R}^m$, tem um ponto fixo.

Para $m = 2$,
tome $D = \{p \in \mathbb{R}^3 : p_1 + p_2 + p_3 = 1 \text{ e } p_i \geq 0 \text{ para cada } i\}$.

Note que D é um triângulo no $\mathbb{R}^3$.

Lema de Sperner implica Brouwer

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer (1909):

Toda função contínua $f : D \to D$, onde D é um subconjunto compacto e convexo do $\mathbb{R}^m$, tem um ponto fixo.

Para $m = 2$,
tome $D = \{p \in \mathbb{R}^3 : p_1 + p_2 + p_3 = 1 \text{ e } p_i \geq 0 \text{ para cada } i\}$.

Note que D é um triângulo no $\mathbb{R}^3$.

Para cada $p \in D$, defina a cor de p da seguinte maneira.

Como $p_1 + p_2 + p_3 = 1 = f(p)_1 + f(p)_2 + f(p)_3$,
existe $i \in \{1, 2, 3\}$ tal que $p_i > 0$ e $f(p)_i \leq p_i$.

Pinte p com um tal i.

Lema de Sperner implica Brouwer

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer (1909):

Toda função contínua $f : D \to D$, onde D é um subconjunto compacto e convexo do $\mathbb{R}^m$, tem um ponto fixo.

Para $m = 2$,
tome $D = \{p \in \mathbb{R}^3 : p_1 + p_2 + p_3 = 1 \text{ e } p_i \geq 0 \text{ para cada } i\}$.

Note que D é um triângulo no $\mathbb{R}^3$.

Para cada $p \in D$, defina a cor de p da seguinte maneira.

Como $p_1 + p_2 + p_3 = 1 = f(p)_1 + f(p)_2 + f(p)_3$,
existe $i \in \{1, 2, 3\}$ tal que $p_i > 0$ e $f(p)_i \leq p_i$.

Pinte p com um tal i.

Para qualquer triangulação de D, essa coloração é de Sperner.

Lema de Sperner implica Brouwer

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer (1909):
Toda função contínua $f : D \to D$, onde D é um subconjunto compacto e convexo do $\mathbb{R}^m$, tem um ponto fixo.

Seja $D = \{p \in \mathbb{R}^3 : p_1 + p_2 + p_3 = 1 \text{ e } p_i \geq 0 \text{ para cada } i\}$.
Pinte cada $p \in D$ com um i tal que $p_i > 0$ e $f(p)_i \leq p_i$.
Isso é numa coloração de Sperner para toda triangulação de D.

Lema de Sperner implica Brouwer

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer (1909):
Toda função contínua $f : D \to D$, onde D é um subconjunto compacto e convexo do $\mathbb{R}^m$, tem um ponto fixo.

Seja $D = \{p \in \mathbb{R}^3 : p_1 + p_2 + p_3 = 1 \text{ e } p_i \geq 0 \text{ para cada } i\}$.
Pinte cada $p \in D$ com um i tal que $p_i > 0$ e $f(p)_i \leq p_i$.
Isso é numa coloração de Sperner para toda triangulação de D.

Comece com a triangulação T trivial de D (só D).

Repetidamente aplique Sperner, determinando Δ com três cores, e refine T inserindo novo ponto em Δ ligado aos três vértices de Δ.

Lema de Sperner implica Brouwer

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer (1909):
Toda função contínua $f : D \to D$, onde D é um subconjunto compacto e convexo do $\mathbb{R}^m$, tem um ponto fixo.

Seja $D = \{p \in \mathbb{R}^3 : p_1 + p_2 + p_3 = 1 \text{ e } p_i \geq 0 \text{ para cada } i\}$.
Pinte cada $p \in D$ com um i tal que $p_i > 0$ e $f(p)_i \leq p_i$.
Isso é numa coloração de Sperner para toda triangulação de D.

Comece com a triangulação T trivial de D (só D).

Repetidamente aplique Sperner, determinando Δ com três cores, e refine T inserindo novo ponto em Δ ligado aos três vértices de Δ.

Os vértices desses triângulos determinam
três sequências que convergem para um mesmo ponto $p \in D$.

Para cada uma destas sequências, $f(p)_i \leq p_i$ para um i.
Como $p_1 + p_2 + p_3 = f(p)_1 + f(p)_2 + f(p)_3$,
temos que $p_i = f(p)_i$ para cada i, ou seja, $p = f(p)$.

Prova do Teorema de Nash

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer (1909):

Toda função contínua $f : D \to D$, onde D é um subconjunto compacto e convexo do $\mathbb{R}^m$, tem um ponto fixo.

Ponto fixo: x em D tal que $f(x) = x$.

Conjunto compacto: fechado e limitado.

Conjunto convexo: se x e $y \in D$, então o segmento $xy \subseteq D$.

Prova do Teorema de Nash

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer (1909):

Toda função contínua $f : D \to D$, onde D é um subconjunto compacto e convexo do $\mathbb{R}^m$, tem um ponto fixo.

Ponto fixo: x em D tal que $f(x) = x$.

Conjunto compacto: fechado e limitado.

Conjunto convexo: se x e $y \in D$, então o segmento $xy \subseteq D$.

Seja $m_i = |S_i|$ e $m = \sum_i m_i$.
Σ_i: conjunto das estratégias mistas para i
($\Sigma_i = \{p \in \mathbb{R}^{m_i} : p(s) \geq 0 \; \forall s \in S_i$ e $\sum_{s \in S_i} p(s) = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{m_i}$)

Prova do Teorema de Nash

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer (1909):

Toda função contínua $f : D \to D$, onde D é um subconjunto compacto e convexo do $\mathbb{R}^m$, tem um ponto fixo.

Ponto fixo: x em D tal que $f(x) = x$.

Conjunto compacto: fechado e limitado.

Conjunto convexo: se x e $y \in D$, então o segmento $xy \subseteq D$.

Seja $m_i = |S_i|$ e $m = \sum_i m_i$.
Σ_i: conjunto das estratégias mistas para i
$(\Sigma_i = \{p \in \mathbb{R}^{m_i} : p(s) \geq 0 \ \forall s \in S_i \text{ e } \sum_{s \in S_i} p(s) = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{m_i})$

O conjunto $\Sigma = \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_n \subseteq \mathbb{R}^m$ é compacto e convexo.

Prova do Teorema de Nash

Teorema (Nash, 1951): Todo jogo com um número finito de jogadores e conjuntos finitos de estratégias tem um equilíbrio de Nash de estratégias mistas.

Prova do Teorema de Nash

Teorema (Nash, 1951): Todo jogo com um número finito de jogadores e conjuntos finitos de estratégias tem um equilíbrio de Nash de estratégias mistas.

Prova: Considere a função $f : \Sigma \to \Sigma$ definida por $f(\sigma) = \rho$, onde $\rho_i = \arg\max_{\rho'_i \in \Sigma_i} \{U_i(\rho'_i, \sigma_{-i}) - ||\rho'_i - \sigma_i||^2\}$.

Prova do Teorema de Nash

Teorema (Nash, 1951): Todo jogo com um número finito de jogadores e conjuntos finitos de estratégias tem um equilíbrio de Nash de estratégias mistas.

Prova: Considere a função $f : \Sigma \to \Sigma$ definida por $f(\sigma) = \rho$, onde $\rho_i = \arg\max_{\rho'_i \in \Sigma_i} \{U_i(\rho'_i, \sigma_{-i}) - ||\rho'_i - \sigma_i||^2\}$.

A função $g_i(\rho'_i) = U_i(\rho'_i, \sigma_{-i}) - ||\rho'_i - \sigma_i||^2$ é côncava, logo tem um único máximo, e assim f está bem-definida.

Prova do Teorema de Nash

Teorema (Nash, 1951): Todo jogo com um número finito de jogadores e conjuntos finitos de estratégias tem um equilíbrio de Nash de estratégias mistas.

Prova: Considere a função $f : \Sigma \to \Sigma$ definida por $f(\sigma) = \rho$, onde $\rho_i = \arg\max_{\rho'_i \in \Sigma_i} \{U_i(\rho'_i, \sigma_{-i}) - ||\rho'_i - \sigma_i||^2\}$.

A função $g_i(\rho'_i) = U_i(\rho'_i, \sigma_{-i}) - ||\rho'_i - \sigma_i||^2$ é côncava, logo tem um único máximo, e assim f está bem-definida.

De fato, $g_i : \Sigma_i \to \mathbb{R}$ é uma função quadrática e côncava:

$$g_i(\rho'_i) = \sum_{s \in S} u_i(s) \prod_{j \neq i} \sigma_j(s_j)\, \rho'_i(s_i) - \sum_{s_i \in S_i} (\rho'_i(s_i) - \sigma_i(s_i))^2.$$

Prova do Teorema de Nash

Teorema (Nash, 1951): Todo jogo com um número finito de jogadores e conjuntos finitos de estratégias tem um equilíbrio de Nash de estratégias mistas.

Prova: Considere a função $f : \Sigma \to \Sigma$ definida por $f(\sigma) = \rho$, onde $\rho_i = \arg\max_{\rho_i' \in \Sigma_i} \{U_i(\rho_i', \sigma_{-i}) - ||\rho_i' - \sigma_i||^2\}$.

Prova do Teorema de Nash

Teorema (Nash, 1951): Todo jogo com um número finito de jogadores e conjuntos finitos de estratégias tem um equilíbrio de Nash de estratégias mistas.

Prova: Considere a função $f : \Sigma \to \Sigma$ definida por $f(\sigma) = \rho$, onde $\rho_i = \arg\max_{\rho'_i \in \Sigma_i} \{U_i(\rho'_i, \sigma_{-i}) - ||\rho'_i - \sigma_i||^2\}$.

Note ainda que a função ρ_i é contínua em σ.

Prova do Teorema de Nash

Teorema (Nash, 1951): Todo jogo com um número finito de jogadores e conjuntos finitos de estratégias tem um equilíbrio de Nash de estratégias mistas.

Prova: Considere a função $f : \Sigma \to \Sigma$ definida por $f(\sigma) = \rho$, onde $\rho_i = \arg\max_{\rho'_i \in \Sigma_i} \{U_i(\rho'_i, \sigma_{-i}) - ||\rho'_i - \sigma_i||^2\}$.

Note ainda que a função ρ_i é contínua em σ.

Então, pelo Teorema de Brouwer, f tem um ponto fixo $\hat{\sigma}$.

Prova do Teorema de Nash

Teorema (Nash, 1951): Todo jogo com um número finito de jogadores e conjuntos finitos de estratégias tem um equilíbrio de Nash de estratégias mistas.

Prova: Considere a função $f : \Sigma \to \Sigma$ definida por $f(\sigma) = \rho$, onde $\rho_i = \arg\max_{\rho'_i \in \Sigma_i} \{U_i(\rho'_i, \sigma_{-i}) - ||\rho'_i - \sigma_i||^2\}$.

Note ainda que a função ρ_i é contínua em σ.

Então, pelo Teorema de Brouwer, f tem um ponto fixo $\hat{\sigma}$.

Vamos mostrar que $\hat{\sigma}$ é um equilíbrio de Nash!

Prova do Teorema de Nash

Teorema (Nash, 1951): Todo jogo com um número finito de jogadores e conjuntos finitos de estratégias tem um equilíbrio de Nash de estratégias mistas.

Prova: Considere a função $f : \Sigma \to \Sigma$ definida por $f(\sigma) = \rho$, onde $\rho_i = \arg\max_{\rho'_i \in \Sigma_i} \{U_i(\rho'_i, \sigma_{-i}) - ||\rho'_i - \sigma_i||^2\}$.

Pelo Teorema de Brouwer, f tem um ponto fixo $\hat{\sigma}$.

Suponha, por contradição, que $\hat{\sigma}$ não é equilíbrio de Nash.

Prova do Teorema de Nash

Teorema (Nash, 1951): Todo jogo com um número finito de jogadores e conjuntos finitos de estratégias tem um equilíbrio de Nash de estratégias mistas.

Prova: Considere a função $f : \Sigma \to \Sigma$ definida por $f(\sigma) = \rho$, onde $\rho_i = \arg\max_{\rho'_i \in \Sigma_i} \{U_i(\rho'_i, \sigma_{-i}) - ||\rho'_i - \sigma_i||^2\}$.

Pelo Teorema de Brouwer, f tem um ponto fixo $\hat{\sigma}$.

Suponha, por contradição, que $\hat{\sigma}$ não é equilíbrio de Nash.

Existe i e ρ'_i em Σ_i tq $U_i(\rho'_i, \hat{\sigma}_{-i}) = U_i(\hat{\sigma}) + \delta$, para $\delta > 0$.

Prova do Teorema de Nash

Teorema (Nash, 1951): Todo jogo com um número finito de jogadores e conjuntos finitos de estratégias tem um equilíbrio de Nash de estratégias mistas.

Prova: Considere a função $f : \Sigma \to \Sigma$ definida por $f(\sigma) = \rho$, onde $\rho_i = \arg\max_{\rho'_i \in \Sigma_i} \{U_i(\rho'_i, \sigma_{-i}) - ||\rho'_i - \sigma_i||^2\}$.

Pelo Teorema de Brouwer, f tem um ponto fixo $\hat{\sigma}$.

Suponha, por contradição, que $\hat{\sigma}$ não é equilíbrio de Nash.

Existe i e ρ'_i em Σ_i tq $U_i(\rho'_i, \hat{\sigma}_{-i}) = U_i(\hat{\sigma}) + \delta$, para $\delta > 0$.

Vamos escolher $\alpha \in (0, 1]$ tq $\hat{\rho}_i = \hat{\sigma}_i + \alpha(\rho'_i - \hat{\sigma}_i)$ contraria o fato de $f(\hat{\sigma}) = \hat{\sigma}$.

Prova do Teorema de Nash

Teorema (Nash, 1951): Todo jogo com um número finito de jogadores e conjuntos finitos de estratégias tem um equilíbrio de Nash de estratégias mistas.

Prova: Considere a função $f : \Sigma \to \Sigma$ definida por $f(\sigma) = \rho$, onde $\rho_i = \arg\max_{\rho'_i \in \Sigma_i} \{U_i(\rho'_i, \sigma_{-i}) - ||\rho'_i - \sigma_i||^2\}$.

Pelo Teorema de Brouwer, f tem um ponto fixo $\hat{\sigma}$.

Suponha, por contradição, que $\hat{\sigma}$ não é equilíbrio de Nash.

Existe i e ρ'_i em Σ_i tq $U_i(\rho'_i, \hat{\sigma}_{-i}) = U_i(\hat{\sigma}) + \delta$, para $\delta > 0$.

Vamos escolher $\alpha \in (0, 1]$ tq $\hat{\rho}_i = \hat{\sigma}_i + \alpha(\rho'_i - \hat{\sigma}_i)$ contraria o fato de $f(\hat{\sigma}) = \hat{\sigma}$.

Note que tal $\hat{\rho}_i \in \Sigma_i$ pois é combinação convexa de $\hat{\sigma}_i$ e ρ'_i.

Prova do Teorema de Nash

Considere $f : \Sigma \to \Sigma$ definida por $f(\sigma) = \rho$,
onde $\rho_i = \arg\max_{\rho'_i \in \Sigma_i}\{U_i(\rho'_i, \sigma_{-i}) - ||\rho'_i - \sigma_i||^2\}$.

Pelo Teorema de Brouwer, f tem um ponto fixo $\hat{\sigma}$.

Suponha, por contradição, que $\hat{\sigma}$ não é equilíbrio de Nash.

Existe i e ρ'_i em Σ_i tq $U_i(\rho'_i, \hat{\sigma}_{-i}) = U_i(\hat{\sigma}) + \delta$, para $\delta > 0$.

Vamos escolher α tal que $\hat{\rho}_i = \hat{\sigma}_i + \alpha(\rho'_i - \hat{\sigma}_i)$
contraria o fato de $f(\hat{\sigma}) = \hat{\sigma}$.

Prova do Teorema de Nash

Considere $f : \Sigma \to \Sigma$ definida por $f(\sigma) = \rho$,
onde $\rho_i = \arg\max_{\rho'_i \in \Sigma_i} \{U_i(\rho'_i, \sigma_{-i}) - ||\rho'_i - \sigma_i||^2\}$.

Pelo Teorema de Brouwer, f tem um ponto fixo $\hat{\sigma}$.

Suponha, por contradição, que $\hat{\sigma}$ não é equilíbrio de Nash.

Existe i e ρ'_i em Σ_i tq $U_i(\rho'_i, \hat{\sigma}_{-i}) = U_i(\hat{\sigma}) + \delta$, para $\delta > 0$.

Vamos escolher α tal que $\hat{\rho}_i = \hat{\sigma}_i + \alpha(\rho'_i - \hat{\sigma}_i)$
contraria o fato de $f(\hat{\sigma}) = \hat{\sigma}$.

Para σ fixo, $U_i(\rho_i, \sigma_{-i})$ é linear em ρ_i, logo
$U_i(\rho_i - \hat{\sigma}_i, \hat{\sigma_{-i}}) = U_i(\rho_i, \hat{\sigma}_{-i}) - U_i(\hat{\sigma}) = \delta$ e

Prova do Teorema de Nash

Considere $f : \Sigma \to \Sigma$ definida por $f(\sigma) = \rho$,
onde $\rho_i = \arg\max_{\rho'_i \in \Sigma_i} \{U_i(\rho'_i, \sigma_{-i}) - ||\rho'_i - \sigma_i||^2\}$.

Pelo Teorema de Brouwer, f tem um ponto fixo $\hat{\sigma}$.

Suponha, por contradição, que $\hat{\sigma}$ não é equilíbrio de Nash.

Existe i e ρ'_i em Σ_i tq $U_i(\rho'_i, \hat{\sigma}_{-i}) = U_i(\hat{\sigma}) + \delta$, para $\delta > 0$.

Vamos escolher α tal que $\hat{\rho}_i = \hat{\sigma}_i + \alpha(\rho'_i - \hat{\sigma}_i)$
contraria o fato de $f(\hat{\sigma}) = \hat{\sigma}$.

Para σ fixo, $U_i(\rho_i, \sigma_{-i})$ é linear em ρ_i, logo
$U_i(\rho_i - \hat{\sigma}_i, \hat{\sigma_{-i}}) = U_i(\rho_i, \hat{\sigma}_{-i}) - U_i(\hat{\sigma}) = \delta$ e

$$\begin{aligned} U_i(\hat{\rho}_i, \hat{\sigma_{-i}}) &= U_i(\hat{\sigma}_i + \alpha(\rho'_i - \hat{\sigma}_i), \hat{\sigma}_{-i}) \\ &= U_i(\hat{\sigma}) + \alpha\, U_i(\rho'_i - \hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_{-i}) \;=\; U_i(\hat{\sigma}) + \alpha\, \delta. \end{aligned}$$

Prova do Teorema de Nash

Considere a função $f : \Sigma \to \Sigma$ definida por $f(\sigma) = \rho$, onde $\rho_i = \arg\max_{\rho'_i \in \Sigma_i} \{U_i(\rho'_i, \sigma_{-i}) - ||\rho'_i - \sigma_i||^2\}$.

Se o ponto fixo $\hat{\sigma}$ de f não é equilíbrio de Nash, então existe i e ρ'_i em Σ_i tq $U_i(\rho'_i, \hat{\sigma}_{-i}) = U_i(\hat{\sigma}) + \delta$, para $\delta > 0$.

Seja $\hat{\rho}_i = \hat{\sigma}_i + \alpha(\rho'_i - \hat{\sigma}_i)$ para algum $\alpha > 0$.

Prova do Teorema de Nash

Considere a função $f : \Sigma \to \Sigma$ definida por $f(\sigma) = \rho$, onde $\rho_i = \arg\max_{\rho'_i \in \Sigma_i} \{U_i(\rho'_i, \sigma_{-i}) - ||\rho'_i - \sigma_i||^2\}$.

Se o ponto fixo $\hat{\sigma}$ de f não é equilíbrio de Nash, então existe i e ρ'_i em Σ_i tq $U_i(\rho'_i, \hat{\sigma}_{-i}) = U_i(\hat{\sigma}) + \delta$, para $\delta > 0$.

Seja $\hat{\rho}_i = \hat{\sigma}_i + \alpha(\rho'_i - \hat{\sigma}_i)$ para algum $\alpha > 0$.

Conforme calculamos, $U_i(\hat{\rho}_i, \hat{\sigma}_{-i}) \; = \; U_i(\hat{\sigma}) + \alpha\,\delta$.

Prova do Teorema de Nash

Considere a função $f : \Sigma \to \Sigma$ definida por $f(\sigma) = \rho$, onde $\rho_i = \arg\max_{\rho'_i \in \Sigma_i} \{U_i(\rho'_i, \sigma_{-i}) - ||\rho'_i - \sigma_i||^2\}$.

Se o ponto fixo $\hat{\sigma}$ de f não é equilíbrio de Nash, então existe i e ρ'_i em Σ_i tq $U_i(\rho'_i, \hat{\sigma}_{-i}) = U_i(\hat{\sigma}) + \delta$, para $\delta > 0$.

Seja $\hat{\rho}_i = \hat{\sigma}_i + \alpha(\rho'_i - \hat{\sigma}_i)$ para algum $\alpha > 0$.

Conforme calculamos, $U_i(\hat{\rho}_i, \hat{\sigma}_{-i}) \;=\; U_i(\hat{\sigma}) + \alpha\,\delta$.

Se $\alpha < \delta / ||\rho'_i - \hat{\sigma}_i||^2$, então

$$\begin{aligned} U_i(\hat{\rho}_i, \hat{\sigma}_{-i}) - ||\hat{\rho}_i - \hat{\sigma}_i||^2 &= U_i(\hat{\sigma}) + \alpha\,\delta - ||\hat{\rho}_i - \hat{\sigma}_i||^2 \\ &= U_i(\hat{\sigma}) + \alpha\,\delta - \alpha^2 ||\rho'_i - \hat{\sigma}_i||^2 \\ &> U_i(\hat{\sigma}), \end{aligned}$$

Prova do Teorema de Nash

Considere a função $f : \Sigma \to \Sigma$ definida por $f(\sigma) = \rho$, onde $\rho_i = \arg\max_{\rho'_i \in \Sigma_i} \{U_i(\rho'_i, \sigma_{-i}) - ||\rho'_i - \sigma_i||^2\}$.

Se o ponto fixo $\hat{\sigma}$ de f não é equilíbrio de Nash, então existe i e ρ'_i em Σ_i tq $U_i(\rho'_i, \hat{\sigma}_{-i}) = U_i(\hat{\sigma}) + \delta$, para $\delta > 0$.

Seja $\hat{\rho}_i = \hat{\sigma}_i + \alpha(\rho'_i - \hat{\sigma}_i)$ para algum $\alpha > 0$.

Conforme calculamos, $U_i(\hat{\rho}_i, \hat{\sigma}_{-i}) \;=\; U_i(\hat{\sigma}) + \alpha\,\delta$.

Se $\alpha < \delta / ||\rho'_i - \hat{\sigma}_i||^2$, então

$$\begin{aligned} U_i(\hat{\rho}_i, \hat{\sigma}_{-i}) - ||\hat{\rho}_i - \hat{\sigma}_i||^2 &= U_i(\hat{\sigma}) + \alpha\,\delta - ||\hat{\rho}_i - \hat{\sigma}_i||^2 \\ &= U_i(\hat{\sigma}) + \alpha\,\delta - \alpha^2 ||\rho'_i - \hat{\sigma}_i||^2 \\ &> U_i(\hat{\sigma}), \end{aligned}$$

contradição pois $U_i(\hat{\sigma}) = \max_{\rho'_i \in \Sigma_i} \{U_i(\rho'_i, \hat{\sigma}_{-i}) - ||\rho'_i - \hat{\sigma}_{-i}||^2\}$, já que $\hat{\sigma}_i = \arg\max_{\rho'_i \in \Sigma_i} \{U_i(\rho'_i, \hat{\sigma}_{-i}) - ||\rho'_i - \hat{\sigma}_{-i}||^2\}$.