Definição de jogo

Um jogo consistem em

- um conjunto N de jogadores;
- para cada jogador i em N,
  um conjunto S_i das estratégias do jogador i;
  uma função utilidade u_i de S em $\mathbb{R}$, onde $S = \times_{i \in N} S_i$.

Definição de jogo

Um jogo consistem em

- um conjunto N de jogadores;
- para cada jogador i em N,
  um conjunto S_i das estratégias do jogador i;
  uma função utilidade u_i de S em $\mathbb{R}$, onde $S = \times_{i \in N} S_i$.

Alternativamente, pode-se dar funções custo c_i e não u_i.

Dilema dos Prisioneiros

- Dois prisioneiros A e B interrogados separadamente
- Duas possíveis respostas: confessar ou silenciar
- Duração da pena depende das respostas

Matriz de custo

B A	Confessa	Silencia
Confessa	4 4	5 1
Silencia	1 5	2 2

Dilema dos Prisioneiros

B / A	Confessa	Silencia
Confessa	4 (B), 4 (A)	5 (B), 1 (A)
Silencia	1 (B), 5 (A)	2 (B), 2 (A)

- conjunto de jogadores: $\{A, B\}$
- conjuntos de estratégias $S_A = S_B = \{\text{Confessa}, \text{Silencia}\}$
- $S = S_A \times S_B$
- funções custo c_A e c_B dadas pela matriz acima

Batalha dos Sexos

- Um casal (R e G) escolhendo uma atividade de lazer
- Duas possibilidades: ir ao cinema ou andar de bike
- Cada um prefere um pouco mais uma à outra atividade mas preferem fazer algo juntos

Matriz de utilidade

G R	Cinema	Pedalar
Cinema	4	2
	5	2
Pedalar	1	5
	1	4

Batalha dos Sexos

G R	Cinema	Pedalar
Cinema	4 5	2 2
Pedalar	1 1	5 4

- conjunto de jogadores: $\{R, G\}$
- conjuntos de estratégias $S_R = S_G = \{\text{Cinema}, \text{Pedalar}\}$
- $S = S_R \times S_G$
- funções utilidades u_R e u_G dadas pela matriz acima

Notação e conceitos básicos

Considere um jogo J dado por

- um conjunto $N = [n]$ de jogadores;
- para cada jogador i em N,
  um conjunto S_i das estratégias do jogador i;
  uma função utilidade u_i de S em $\mathbb{R}$, onde $S = \times_{i \in N} S_i$.

Notação e conceitos básicos

Considere um jogo J dado por

- um conjunto $N = [n]$ de jogadores;
- para cada jogador i em N,
  um conjunto S_i das estratégias do jogador i;
  uma função utilidade u_i de S em $\mathbb{R}$, onde $S = \times_{i \in N} S_i$.

Notação:

Para um vetor $s = (s_1, \ldots, s_n)$ em S, e um jogador i,
s_{-i} é o vetor $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$.

Notação e conceitos básicos

Considere um jogo J dado por

- um conjunto $N = [n]$ de jogadores;
- para cada jogador i em N,
  um conjunto S_i das estratégias do jogador i;
  uma função utilidade u_i de S em $\mathbb{R}$, onde $S = \times_{i \in N} S_i$.

Notação:

Para um vetor $s = (s_1, \ldots, s_n)$ em S, e um jogador i,
s_{-i} é o vetor $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$.

Para $r \in S_i$, (r, s_{-i}) é o vetor $(s_1, \ldots, s_{i-1}, r, s_{i+1}, \ldots, s_n) \in S$.

Notação e conceitos básicos

Considere um jogo J dado por

- um conjunto $N = [n]$ de jogadores;
- para cada jogador i em N,
  um conjunto S_i das estratégias do jogador i;
  uma função utilidade u_i de S em $\mathbb{R}$, onde $S = \times_{i \in N} S_i$.

Notação:

Para um vetor $s = (s_1, \ldots, s_n)$ em S, e um jogador i,
s_{-i} é o vetor $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$.

Para $r \in S_i$, (r, s_{-i}) é o vetor $(s_1, \ldots, s_{i-1}, r, s_{i+1}, \ldots, s_n) \in S$.

Vetor de estratégias obtido de s trocando-se s_i por r.

Estratégias dominantes

Estratégia r em S_i é dominante para o jogador i
se $u_i(s) \leq u_i(r, s_{-i})$ para todo vetor de estratégias s em S.

Estratégias dominantes

Estratégia r em S_i é dominante para o jogador i
se $u_i(s) \leq u_i(r, s_{-i})$ para todo vetor de estratégias s em S.

Dilema dos prisioneiros

A \ B	Confessa	Silencia
Confessa	4 (B), 4 (A)	5 (B), 1 (A)
Silencia	1 (B), 5 (A)	2 (B), 2 (A)

Confessa é estratégia dominante para os dois prisioneiros.

Estratégias dominantes

Estratégia r em S_i é dominante para o jogador i
se $u_i(s) \leq u_i(r, s_{-i})$ para todo vetor de estratégias s em S.

Batalha dos sexos

G / R	Cinema	Pedalar
Cinema	4 / 5	2 / 2
Pedalar	1 / 1	5 / 4

Não há estratégias dominantes neste jogo.

Estratégias dominantes

Estratégia r em S_i é dominante para o jogador i
se $u_i(s) \leq u_i(r, s_{-i})$ para todo vetor de estratégias s em S.

Um jogo em que todos os jogadores têm uma estratégia dominante é um jogo com estratégias dominantes.

Estratégias dominantes

Estratégia r em S_i é dominante para o jogador i
se $u_i(s) \leq u_i(r, s_{-i})$ para todo vetor de estratégias s em S.

Um jogo em que todos os jogadores têm uma estratégia dominante é um jogo com estratégias dominantes.

Exemplo: Dilema dos Prisioneiros.

Estratégias dominantes

Estratégia r em S_i é dominante para o jogador i
se $u_i(s) \leq u_i(r, s_{-i})$ para todo vetor de estratégias s em S.

Um jogo em que todos os jogadores têm uma estratégia dominante é um jogo com estratégias dominantes.

Exemplo: Dilema dos Prisioneiros.

Na maioria dos jogos, não há estratégias dominantes.

Estratégias dominantes

Estratégia r em S_i é dominante para o jogador i
se $u_i(s) \leq u_i(r, s_{-i})$ para todo vetor de estratégias s em S.

Um jogo em que todos os jogadores têm uma estratégia dominante é um jogo com estratégias dominantes.

Exemplo: Dilema dos Prisioneiros.

Na maioria dos jogos, não há estratégias dominantes.

É interessante projetar jogos com estratégias dominantes.

Estratégias dominantes

Estratégia r em S_i é dominante para o jogador i
se $u_i(s) \leq u_i(r, s_{-i})$ para todo vetor de estratégias s em S.

Um jogo em que todos os jogadores têm uma estratégia dominante é um jogo com estratégias dominantes.

Exemplo: Dilema dos Prisioneiros.

Na maioria dos jogos, não há estratégias dominantes.

É interessante projetar jogos com estratégias dominantes.

Outro exemplo: Leilões do segundo preço.

Estratégia dominante: valor do item para o jogador.

Noção de equilíbrio

Para um vetor $s = (s_1, \ldots, s_n)$ em S, e um jogador i,
s_{-i} é o vetor $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$.

Para $r \in S_i$, (r, s_{-i}) é o vetor $(s_1, \ldots, s_{i-1}, r, s_{i+1}, \ldots, s_n) \in S$.

Jogador i está satisfeito com s em S
se $u_i(s) \geq u_i(r, s_{-i})$ para toda estratégia r em S_i.

Noção de equilíbrio

Para um vetor $s = (s_1, \ldots, s_n)$ em S, e um jogador i,
s_{-i} é o vetor $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$.

Para $r \in S_i$, (r, s_{-i}) é o vetor $(s_1, \ldots, s_{i-1}, r, s_{i+1}, \ldots, s_n) \in S$.

Jogador i está satisfeito com s em S
se $u_i(s) \geq u_i(r, s_{-i})$ para toda estratégia r em S_i.

(Diz-se que i não tem incentivo para mudar de estratégia.)

Noção de equilíbrio

Para um vetor $s = (s_1, \ldots, s_n)$ em S, e um jogador i,
s_{-i} é o vetor $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$.

Para $r \in S_i$, (r, s_{-i}) é o vetor $(s_1, \ldots, s_{i-1}, r, s_{i+1}, \ldots, s_n) \in S$.

Jogador i está satisfeito com s em S
se $u_i(s) \geq u_i(r, s_{-i})$ para toda estratégia r em S_i.

(Diz-se que i não tem incentivo para mudar de estratégia.)

Um vetor s em S é um equilíbrio de Nash
se todo jogador está satisfeito com s.

Noção de equilíbrio

Para um vetor $s = (s_1, \ldots, s_n)$ em S, e um jogador i,
s_{-i} é o vetor $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$.

Para $r \in S_i$, (r, s_{-i}) é o vetor $(s_1, \ldots, s_{i-1}, r, s_{i+1}, \ldots, s_n) \in S$.

Jogador i está satisfeito com s em S
se $u_i(s) \geq u_i(r, s_{-i})$ para toda estratégia r em S_i.

(Diz-se que i não tem incentivo para mudar de estratégia.)

Um vetor s em S é um equilíbrio de Nash
se todo jogador está satisfeito com s.

Um jogo pode ter mais do que um equilíbrio de Nash,
ou pode não ter nenhum equilíbrio de Nash.

Equilíbrio de Nash

Jogador i está satisfeito com $s = (s_1, \dots, s_n)$ se $u_i(s) \geq u_i(r, s_{-i})$, para toda estratégia r em S_i.

Um vetor s em S é um equilíbrio de Nash
se todo jogador está satisfeito com s.

Equilíbrio de Nash

Jogador i está satisfeito com $s = (s_1, \ldots, s_n)$ se $u_i(s) \geq u_i(r, s_{-i})$, para toda estratégia r em S_i.

Um vetor s em S é um equilíbrio de Nash se todo jogador está satisfeito com s.

Dilema dos prisioneiros:

A \ B	Confessa	Silencia
Confessa	B: 4, A: 4	B: 5, A: 1
Silencia	B: 1, A: 5	B: 2, A: 2

Único equilíbrio de Nash: (Confessa,Confessa)

Equilíbrio de Nash

Jogador i está satisfeito com $s = (s_1, \ldots, s_n)$ se $u_i(s) \geq u_i(r, s_{-i})$, para toda estratégia r em S_i.

Um vetor s em S é um equilíbrio de Nash se todo jogador está satisfeito com s.

Batalha dos sexos:

G / R	Cinema	Pedalar
Cinema	4 / 5	2 / 2
Pedalar	1 / 1	5 / 4

Equilíbrios de Nash: (Cinema,Cinema) e (Pedalar, Pedalar)

Equilíbrio de Nash

Um vetor s em S é um equilíbrio de Nash
se todo jogador está satisfeito com s.

Equilíbrio de Nash

Um vetor s em S é um equilíbrio de Nash
se todo jogador está satisfeito com s.

A \ B	pedra	papel	tesoura
pedra	0 0	1 -1	-1 1
papel	-1 1	0 0	1 -1
tesoura	1 -1	-1 1	0 0

Não há equilíbrio de Nash!

Estratégias puras versus mistas

Até agora, jogador escolhe estratégia determinísticamente.

Mas o jogador pode adotar estratégia aleatorizada!

Estratégias puras versus mistas

Até agora, jogador escolhe estratégia determinísticamente.

Mas o jogador pode adotar estratégia aleatorizada!

Uma estratégia mista para o jogador i
é uma distribuição de probabilidades no conjunto S_i.

Estratégias puras versus mistas

Até agora, jogador escolhe estratégia deterministicamente.

Mas o jogador pode adotar estratégia aleatorizada!

Uma estratégia mista para o jogador i
é uma distribuição de probabilidades no conjunto S_i.

Particularmente interessante em jogos com repetição:
adversário tira proveito de estratégias determinísticas.

Estratégias puras versus mistas

Até agora, jogador escolhe estratégia deterministicamente.

Mas o jogador pode adotar estratégia aleatorizada!

Uma estratégia mista para o jogador i
é uma distribuição de probabilidades no conjunto S_i.

Particularmente interessante em jogos com repetição:
adversário tira proveito de estratégias determinísticas.

Exemplo: Repetição do jogo Pedra-Papel-Tesoura:

- jogar sempre pedra
- jogar circularmente pedra, papel e tesoura
- jogar sempre a jogada anterior do adversário

Estratégias puras versus mistas

Até agora, jogador escolhe estratégia deterministicamente.

Mas o jogador pode adotar estratégia aleatorizada!

Uma estratégia mista para o jogador i
é uma distribuição de probabilidades no conjunto S_i.

Particularmente interessante em jogos com repetição:
adversário tira proveito de estratégias determinísticas.

Exemplo: Repetição do jogo Pedra-Papel-Tesoura:

- jogar sempre pedra
- jogar circularmente pedra, papel e tesoura
- jogar sempre a jogada anterior do adversário

Ao detectar sua estratégia, adversário passa a vencer.

Estratégias puras versus mistas

Uma estratégia mista para o jogador i
é uma distribuição de probabilidades no conjunto S_i.

Estratégias em S_i são então chamadas de puras.

Estratégias puras versus mistas

Uma estratégia mista para o jogador i
é uma distribuição de probabilidades no conjunto S_i.

Estratégias em S_i são então chamadas de puras.

Discutimos equilíbrio de Nash com estratégias puras.

Estratégias puras versus mistas

Uma estratégia mista para o jogador i
é uma distribuição de probabilidades no conjunto S_i.

Estratégias em S_i são então chamadas de puras.

Discutimos equilíbrio de Nash com estratégias puras.

Para definição mais ampla, precisamos de mais notação.

Estratégias puras versus mistas

Uma estratégia mista para o jogador i
é uma distribuição de probabilidades no conjunto S_i.

Seja σ um vetor de estratégias mistas.

Ou seja, para cada jogador i,
σ_i é uma distribuição de probabilidades em S_i.

Estratégias puras versus mistas

Uma estratégia mista para o jogador i
é uma distribuição de probabilidades no conjunto S_i.

Seja σ um vetor de estratégias mistas.

Ou seja, para cada jogador i,
σ_i é uma distribuição de probabilidades em S_i.

Qual é a utilidade esperada do jogador i para σ?

Estratégias puras versus mistas

Uma estratégia mista para o jogador i
é uma distribuição de probabilidades no conjunto S_i.

Seja σ um vetor de estratégias mistas.

Ou seja, para cada jogador i,
σ_i é uma distribuição de probabilidades em S_i.

Qual é a utilidade esperada do jogador i para σ?

$$\mathrm{E}[u_i(\sigma)] \; = \; \sum_{s \in S} u_i(s) \mathrm{Pr}_\sigma[s],$$

Estratégias puras versus mistas

Uma estratégia mista para o jogador i
é uma distribuição de probabilidades no conjunto S_i.

Seja σ um vetor de estratégias mistas.

Ou seja, para cada jogador i,
σ_i é uma distribuição de probabilidades em S_i.

Qual é a utilidade esperada do jogador i para σ?

$$\mathrm{E}[u_i(\sigma)] \;=\; \sum_{s \in S} u_i(s) \mathrm{Pr}_\sigma[s],$$

onde $\mathrm{Pr}_\sigma[s] = \prod_j \sigma_j(s_j)$.
(Considera-se que os jogadores são independentes.)

Equilíbrio de Nash

Jogador i está satisfeito com σ se
$\mathrm{E}[u_i(\sigma)] \geq \mathrm{E}[u_i(\rho, \sigma_{-i})]$ para toda estratégia mista ρ sobre S_i.

Equilíbrio de Nash

Jogador i está satisfeito com σ se
$\mathrm{E}[u_i(\sigma)] \geq \mathrm{E}[u_i(\rho, \sigma_{-i})]$ para toda estratégia mista ρ sobre S_i.

σ é um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas) se
todo jogador está satisfeito com σ.

Equilíbrio de Nash

Jogador i está satisfeito com σ se
$\mathrm{E}[u_i(\sigma)] \geq \mathrm{E}[u_i(\rho, \sigma_{-i})]$ para toda estratégia mista ρ sobre S_i.

σ é um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas) se
todo jogador está satisfeito com σ.

Ou seja, em σ, nenhum jogador tem incentivo para mudar de estratégia (mista).

Equilíbrio de Nash

Jogador i está satisfeito com σ se
$\mathrm{E}[u_i(\sigma)] \geq \mathrm{E}[u_i(\rho, \sigma_{-i})]$ para toda estratégia mista ρ sobre S_i.

σ é um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas) se
todo jogador está satisfeito com σ.

Exemplo:
$\rho = (1/3, 1/3, 1/3)$ é uma estratégia mista para os jogadores de Pedra-Papel-Tesoura, e (ρ, ρ) é um equilíbrio de Nash.

Equilíbrio de Nash

Jogador i está satisfeito com σ se
$\mathrm{E}[u_i(\sigma)] \geq \mathrm{E}[u_i(\rho, \sigma_{-i})]$ para toda estratégia mista ρ sobre S_i.

σ é um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas) se
todo jogador está satisfeito com σ.

Exemplo:
$\rho = (1/3, 1/3, 1/3)$ é uma estratégia mista para os jogadores de Pedra-Papel-Tesoura, e (ρ, ρ) é um equilíbrio de Nash.

Teorema (Nash, 1951): Todo jogo com um número finito de jogadores e conjuntos finitos de estratégias tem um equilíbrio de Nash de estratégias mistas.

Teorema de Nash

Teorema (Nash, 1951): Todo jogo com um número finito de jogadores e conjuntos finitos de estratégias tem um equilíbrio de Nash de estratégias mistas.

Teorema de Nash

Teorema (Nash, 1951): Todo jogo com um número finito de jogadores e conjuntos finitos de estratégias tem um equilíbrio de Nash de estratégias mistas.

As hipóteses são necessárias:
existem jogos com número infinito de jogadores
e jogos com conjuntos de estratégias infinitos
sem equilíbrio de Nash.

Mais alguns conceitos básicos

- Custo ou valor social de um vetor de estratégias

  (soma dos custos ou utilidades dos jogadores)

Jogo de congestionamento

B A	P	Q
P	2 2	5 7
Q	6 4	1 1

Valores sociais 4, 12, 10 e 2.

Mais alguns conceitos básicos

- Custo ou valor social de um vetor de estratégias

  (soma dos custos ou utilidades dos jogadores)

- Valor social ótimo

  (soma máxima das utilidades dos jogadores)

Mais alguns conceitos básicos

- Custo ou valor social de um vetor de estratégias

  (soma dos custos ou utilidades dos jogadores)

- Valor social ótimo

  (soma máxima das utilidades dos jogadores)

- Jogos de soma zero

  (soma dos custos/utilidades zero p/ todo s em S)

Mais alguns conceitos básicos

- Custo ou valor social de um vetor de estratégias
- Valor social ótimo
- Jogos de soma zero
  (soma dos custos/utilidades zero p/ todo s em S)

Mais alguns conceitos básicos

- Custo ou valor social de um vetor de estratégias
- Valor social ótimo
- Jogos de soma zero
  (soma dos custos/utilidades zero p/ todo s em S)

Pedra-papel-tesoura

A \ B	pedra	papel	tesoura
pedra	0, 0	−1, 1	1, −1
papel	1, −1	0, 0	−1, 1
tesoura	−1, 1	1, −1	0, 0

Complexidade computacional

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$,
encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

m: número de estratégias do jogador 1
n: número de estratégias do jogador 2

Complexidade computacional

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$,
encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

m: número de estratégias do jogador 1
n: número de estratégias do jogador 2

Basta dar uma matriz, pois o jogo é de soma zero.
O custo do jogador 1 é o ganho do jogador 2 e vice-versa.

Complexidade computacional

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$,
encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

m: número de estratégias do jogador 1
n: número de estratégias do jogador 2

Basta dar uma matriz, pois o jogo é de soma zero.
O custo do jogador 1 é o ganho do jogador 2 e vice-versa.

Pelo Teorema de Nash, sempre existe um equilíbrio.

Complexidade computacional

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$,
encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

m: número de estratégias do jogador 1
n: número de estratégias do jogador 2

Basta dar uma matriz, pois o jogo é de soma zero.
O custo do jogador 1 é o ganho do jogador 2 e vice-versa.

Pelo Teorema de Nash, sempre existe um equilíbrio.

Como podemos resolver esse problema?

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$,
encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$,
encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

O que é um equilíbrio?

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$,
encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

O que é um equilíbrio?

São duas distribuições de probabilidade, ou seja,
vetores p, com m entradas, e q, com n entradas,

- $\sum_i p_i = 1$ e $p_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, m$
- $\sum_j q_j = 1$ e $q_j \geq 0$ para $j = 1, \ldots, n$

tais que...

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$,
encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

O que é um equilíbrio?

São duas distribuições de probabilidade, ou seja,
vetores p, com m entradas, e q, com n entradas,

- $\sum_i p_i = 1$ e $p_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, m$
- $\sum_j q_j = 1$ e $q_j \geq 0$ para $j = 1, \ldots, n$

tais que...

Antes de responder...
Se o jogador 1 usa a estratégia (mista) p e o 2 usa a q,
qual é o valor esperado que o jogador 1 ganha?

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m\times n}$,
encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

Vetores p, com m entradas, e q, com n entradas,

- $\sum_i p_i = 1$ e $p_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, m$,
- $\sum_j q_j = 1$ e $q_j \geq 0$ para $j = 1, \ldots, n$.

Considere que A é a matriz custo do jogador 1.

Se o jogador 1 usa a estratégia (mista) p e o 2 usa a q,
qual é o valor esperado que o jogador 1 ganha?

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m\times n}$,
encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

Vetores p, com m entradas, e q, com n entradas,

- $\sum_i p_i = 1$ e $p_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, m$,
- $\sum_j q_j = 1$ e $q_j \geq 0$ para $j = 1, \ldots, n$.

Considere que A é a matriz custo do jogador 1.

Se o jogador 1 usa a estratégia (mista) p e o 2 usa a q,
qual é o valor esperado que o jogador 1 ganha?

$$\sum_{ij} a_{ij} p_i q_j \;=\; \sum_i p_i \sum_j a_{ij} q_j \;=\; pAq$$

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$,
encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

A: matriz utilidade do jogador 1

Vetores p, com m entradas, e q, com n entradas,

- $\sum_i p_i = 1$ e $p_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, m$,
- $\sum_j q_j = 1$ e $q_j \geq 0$ para $j = 1, \ldots, n$.

Valor esperado que o jogador 1 ganha é pAq.

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$,
encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

A: matriz utilidade do jogador 1

Vetores p, com m entradas, e q, com n entradas,

- $\sum_i p_i = 1$ e $p_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, m$,
- $\sum_j q_j = 1$ e $q_j \geq 0$ para $j = 1, \ldots, n$.

Valor esperado que o jogador 1 ganha é pAq.

Uma vez que o jogador 1 escolhe p,
o jogador 2 escolhe q que minimiza a utilidade de 1.

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$,
encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

A: matriz utilidade do jogador 1

Vetores p, com m entradas, e q, com n entradas,

- $\sum_i p_i = 1$ e $p_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, m$,
- $\sum_j q_j = 1$ e $q_j \geq 0$ para $j = 1, \ldots, n$.

Valor esperado que o jogador 1 ganha é pAq.

Uma vez que o jogador 1 escolhe p,
o jogador 2 escolhe q que minimiza a utilidade de 1.

Ou seja, olhando o vetor pA, o jogador 2 gosta
das estratégias que correspondem a entradas mínimas de pA.

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$,
encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

A: matriz utilidade do jogador 1

Vetores p, com m entradas, e q, com n entradas,

- $\sum_i p_i = 1$ e $p_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, m$,
- $\sum_j q_j = 1$ e $q_j \geq 0$ para $j = 1, \ldots, n$.

Valor esperado que o jogador 1 ganha é pAq.

Uma vez que o jogador 1 escolhe p,
o jogador 2 escolhe q que minimiza a utilidade de 1.

Ou seja, olhando o vetor pA, o jogador 2 gosta
das estratégias que correspondem a entradas mínimas de pA.

Assim jogador 1 escolhe p que maximize esse mínimo.

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$,
encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

A: matriz utilidade do jogador 1

Vetores p, com m entradas, e q, com n entradas,

- $\sum_i p_i = 1$ e $p_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, m$,
- $\sum_j q_j = 1$ e $q_j \geq 0$ para $j = 1, \ldots, n$.

Jogador 2 gosta de estratégias que correspondem
a entradas mínimas de pA, assim 1 quer encontrar p que

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$,
encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

A: matriz utilidade do jogador 1

Vetores p, com m entradas, e q, com n entradas,

- $\sum_i p_i = 1$ e $p_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, m$,
- $\sum_j q_j = 1$ e $q_j \geq 0$ para $j = 1, \ldots, n$.

Jogador 2 gosta de estratégias que correspondem
a entradas mínimas de pA, assim 1 quer encontrar p que

$$\begin{aligned}
&\text{maximize } v \\
&\text{sujeito a } \textstyle\sum_i p_i = 1 \\
&\qquad\qquad (pA)_j \geq v \text{ para } j = 1, \ldots, n \\
&\qquad\qquad p_i \geq 0 \text{ para } i = 1, \ldots, m.
\end{aligned}$$

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$,
encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

A: matriz utilidade do jogador 1

Jogador 1 quer encontrar p que

$$
\begin{aligned}
&\text{maximize } v \\
&\text{sujeito a } \textstyle\sum_i p_i = 1 \\
&\qquad\qquad (pA)_j \geq v \text{ para } j = 1, \ldots, n \\
&\qquad\qquad p_i \geq 0 \text{ para } i = 1, \ldots, m.
\end{aligned}
$$

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$,
encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

A: matriz utilidade do jogador 1

Jogador 1 quer encontrar p que

$$
\begin{aligned}
&\text{maximize } v \\
&\text{sujeito a } \textstyle\sum_i p_i = 1 \\
&\qquad\qquad (pA)_j \geq v \text{ para } j = 1, \ldots, n \\
&\qquad\qquad p_i \geq 0 \text{ para } i = 1, \ldots, m.
\end{aligned}
$$

Jogador 2 quer encontrar q que

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize } v \\
&\text{sujeito a } \textstyle\sum_i q_i = 1 \\
&\qquad\qquad (Aq)_i \leq v \text{ para } i = 1, \ldots, m \\
&\qquad\qquad q_j \geq 0 \text{ para } j = 1, \ldots, n.
\end{aligned}
$$

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m\times n}$,
encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

Jogador 1 quer encontrar p que

maximize v

sujeito a $\sum_i p_i = 1$

$(pA)_j \geq v$ para $j = 1, \ldots, n$

$p_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, m$.

Jogador 2 quer encontrar q que

minimize v

sujeito a $\sum_j q_j = 1$

$(Aq)_i \leq v$ para $i = 1, \ldots, m$

$q_j \geq 0$ para $j = 1, \ldots, n$.

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$,
encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

Jogador 1 quer encontrar p que

maximize v

sujeito a $\sum_i p_i = 1$

$(pA)_j \geq v$ para $j = 1, \ldots, n$

$p_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, m$.

Jogador 2 quer encontrar q que

minimize v

sujeito a $\sum_i q_i = 1$

$(Aq)_i \leq v$ para $i = 1, \ldots, m$

$q_j \geq 0$ para $j = 1, \ldots, n$.

Estes são programas lineares, e um é o dual do outro!

Jogos com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$
(representando um jogo de dois jogadores de soma zero),
encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

Jogos com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$
(representando um jogo de dois jogadores de soma zero),
encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

Conclusão:

Este problema pode ser resolvido em tempo polinomial
(usando programação linear).

Jogos com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$
(representando um jogo de dois jogadores de soma zero),
encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

Conclusão:

Este problema pode ser resolvido em tempo polinomial
(usando programação linear).

E para jogos que não sejam de soma zero?

Complexidade computacional

Os seguintes problemas são NP-completos:
dado um jogo de duas pessoas na forma matricial,
decidir se este jogo tem

- pelo menos dois equilíbrios de Nash;
- dado k, um equilíbrio de Nash em que o jogador 1 tem utilidade pelo menos k;
- dado k, um equilíbrio de Nash com valor social pelo menos k;
- dado k, um equilíbrio de Nash com pelo menos k estratégias no seu suporte;
- dado s, um equilíbrio de Nash com s no suporte;
- dado s, um equilíbrio de Nash sem s no suporte.