Teoria dos Jogos Algorítmica

Objetivos:

Apresentar a área de teoria dos jogos algorítmica, introduzindo os conceitos necessários de teoria dos jogos, e discorrendo sobre problemas e resultados da área.

Teoria dos Jogos Algorítmica

Objetivos:

Apresentar a área de teoria dos jogos algorítmica, introduzindo os conceitos necessários de teoria dos jogos, e discorrendo sobre problemas e resultados da área.

Conteúdo:

Jogos, estratégias, funções custo e utilidade; Equilíbrio de Nash; Custo social, preço da estabilidade e da anarquia; Complexidade de encontrar um equilíbrio de Nash; Projeto algorítmico de mecanismos; Leilões combinatórios; Jogos de roteamento; Jogos de formação de redes.

Teoria dos Jogos Algorítmica

Objetivos:

Apresentar a área de teoria dos jogos algorítmica, introduzindo os conceitos necessários de teoria dos jogos, e discorrendo sobre problemas e resultados da área.

Conteúdo:

Jogos, estratégias, funções custo e utilidade; Equilíbrio de Nash; Custo social, preço da estabilidade e da anarquia; Complexidade de encontrar um equilíbrio de Nash; Projeto algorítmico de mecanismos; Leilões combinatórios; Jogos de roteamento; Jogos de formação de redes.

Observação:

É fortemente recomendado que o aluno já tenha cursado alguma disciplina de análise de algoritmos.

Calendário e avaliação

Início: 8 de agosto (junto com a pós)

Término: 8 de dezembro

Seguiremos as semanas de break da graduação.

Calendário e avaliação

Início: 8 de agosto (junto com a pós)

Término: 8 de dezembro

Seguiremos as semanas de break da graduação.

Avaliação:

Em princípio, duas provas e listas de exercícios.

Para alunos de pós, adicionalmente, um seminário.
(A ser assistindo também pelos alunos da graduação.)

Calendário e avaliação

Início: 8 de agosto (junto com a pós)

Término: 8 de dezembro

Seguiremos as semanas de break da graduação.

Avaliação:

Em princípio, duas provas e listas de exercícios.

Para alunos de pós, adicionalmente, um seminário.
(A ser assistindo também pelos alunos da graduação.)

Sem sub; datas das provas a serem fixadas mais adiante.

Introdução

O que são jogos?

Introdução

O que são jogos?

O que é Teoria dos Jogos?

Introdução

O que são jogos?

O que é Teoria dos Jogos?

Vagamente, é o estudo formal da interação entre agentes que têm um objetivo, e das possíveis estratégias que possam aparecer em consequência dessa interação.

Introdução

O que são jogos?

O que é Teoria dos Jogos?

Vagamente, é o estudo formal da interação entre agentes que têm um objetivo, e das possíveis estratégias que possam aparecer em consequência dessa interação.

O que é Teoria dos Jogos Algorítmica?

Introdução

O que são jogos?

O que é Teoria dos Jogos?

Vagamente, é o estudo formal da interação entre agentes que têm um objetivo, e das possíveis estratégias que possam aparecer em consequência dessa interação.

O que é Teoria dos Jogos Algorítmica?

Estuda questões computacionais que aparecem em muitos dos problemas de teoria dos jogos.

Exemplos em computação

TCP – Transmission Control Protocol

Exemplos em computação

TCP – Transmission Control Protocol

- breve descrição
- política de backoff

Exemplos em computação

TCP – Transmission Control Protocol

- breve descrição
- política de backoff

Google AdWords e leilões do gênero

Exemplos em computação

TCP – Transmission Control Protocol

- breve descrição
- política de backoff

Google AdWords e leilões do gênero

- breve descrição
- leilões de segundo preço

Exemplos em computação

TCP – Transmission Control Protocol

- breve descrição
- política de backoff

Google AdWords e leilões do gênero

- breve descrição
- leilões de segundo preço

Transferências em sistemas peer-to-peer (torrents)

Exemplos em computação

TCP – Transmission Control Protocol

- breve descrição
- política de backoff

Google AdWords e leilões do gênero

- breve descrição
- leilões de segundo preço

Transferências em sistemas peer-to-peer (torrents)

- breve descrição
- reputação dos usuários e sua utilização

Exemplos da teoria dos jogos

Dilema dos Prisioneiros

Exemplos da teoria dos jogos

Dilema dos Prisioneiros

- Dois prisioneiros A e B interrogados separadamente
- Duas possíveis respostas: confessar ou silenciar
- Duração da pena depende das respostas

Exemplos da teoria dos jogos

Dilema dos Prisioneiros

- Dois prisioneiros A e B interrogados separadamente
- Duas possíveis respostas: confessar ou silenciar
- Duração da pena depende das respostas

Matriz de custo

B		
A	Confessa	Silencia
Confessa	4	5
	4	1
Silencia	1	2
	5	2

Exemplos da teoria dos jogos

Batalha dos Sexos

Exemplos da teoria dos jogos

Batalha dos Sexos

- Um casal (R e G) escolhendo uma atividade de lazer
- Duas possibilidades: ir ao cinema ou andar de bike
- Cada um prefere um pouco mais uma à outra atividade mas preferem fazer algo juntos

Exemplos da teoria dos jogos

Batalha dos Sexos

- Um casal (R e G) escolhendo uma atividade de lazer
- Duas possibilidades: ir ao cinema ou andar de bike
- Cada um prefere um pouco mais uma à outra atividade mas preferem fazer algo juntos

Matriz de satisfação

G R	Cinema	Pedalar
Cinema	4 5	2 2
Pedalar	1 1	5 4

Jogo de Congestionamento

- Dois jogadores A e B
- Dois pontos de transmissão P ou Q
- P tem taxa de transmissão um pouco melhor
- A com mais urgência que B

Jogo de Congestionamento

- Dois jogadores A e B
- Dois pontos de transmissão P ou Q
- P tem taxa de transmissão um pouco melhor
- A com mais urgência que B

Matriz de satisfação

B A	P	Q
P	2 2	5 7
Q	6 4	1 1

Pedra-Papel-Tesoura

- Dois jogadores A e B
- Três possíveis escolhas: pedra, papel, ou tesoura
- pedra quebra tesoura que corta papel que embrulha pedra

Pedra-Papel-Tesoura

- Dois jogadores A e B
- Três possíveis escolhas: pedra, papel, ou tesoura
- pedra quebra tesoura que corta papel que embrulha pedra

B / A	pedra	papel	tesoura
pedra	0 0	1 -1	-1 1
papel	-1 1	0 0	1 -1
tesoura	1 -1	-1 1	0 0

Compartilhamento de largura de banda

- conjunto N de jogadores
- cada jogador i escolhe sua largura de banda $x_i \in [0, 1]$
- se $\sum_i x_i > 1$, nada é transmitido, senão há transmissão
- satisfação do jogador i dada por $x_i(1 - \sum_j x_j)$

Compartilhamento de largura de banda

- conjunto N de jogadores
- cada jogador i escolhe sua largura de banda $x_i \in [0, 1]$
- se $\sum_i x_i > 1$, nada é transmitido, senão há transmissão
- satisfação do jogador i dada por $x_i(1 - \sum_j x_j)$

Se t é a soma das bandas dos demais jogadores,
escolha que maximiza $x(1 - t - x)$ é $x = (1 - t)/2$.

Compartilhamento de largura de banda

- conjunto N de jogadores
- cada jogador i escolhe sua largura de banda $x_i \in [0, 1]$
- se $\sum_i x_i > 1$, nada é transmitido, senão há transmissão
- satisfação do jogador i dada por $x_i(1 - \sum_j x_j)$

Se t é a soma das bandas dos demais jogadores,
escolha que maximiza $x(1 - t - x)$ é $x = (1 - t)/2$.

Se todos escolhem assim, converge para $x_i = \frac{1}{n+1}$.

Satisfação de cada jogador: $\frac{1}{n+1}(1 - \frac{n}{n+1}) = \frac{1}{(n+1)^2}$.
Valor social de $\frac{n}{(n+1)^2} \approx \frac{1}{n}$.

Compartilhamento de largura de banda

- conjunto N de jogadores
- cada jogador i escolhe sua largura de banda $x_i \in [0, 1]$
- se $\sum_i x_i > 1$, nada é transmitido, senão há transmissão
- satisfação do jogador i dada por $x_i(1 - \sum_j x_j)$

Se t é a soma das bandas dos demais jogadores,
escolha que maximiza $x(1 - t - x)$ é $x = (1 - t)/2$.

Se todos escolhem assim, converge para $x_i = \frac{1}{n+1}$.

Satisfação de cada jogador: $\frac{1}{n+1}(1 - \frac{n}{n+1}) = \frac{1}{(n+1)^2}$.
Valor social de $\frac{n}{(n+1)^2} \approx \frac{1}{n}$.

Valor social ótimo é $\frac{1}{4}$, quando $x_i = \frac{1}{2n}$.

Jogos iterados

O mesmo jogo repetido várias vezes,
com os mesmos jogadores.

Como isso afeta o comportamento dos jogadores?

Jogos iterados

O mesmo jogo repetido várias vezes,
com os mesmos jogadores.

Como isso afeta o comportamento dos jogadores?

Exemplo: dilema dos prisioneiros iterado

Jogos iterados

O mesmo jogo repetido várias vezes,
com os mesmos jogadores.

Como isso afeta o comportamento dos jogadores?

Exemplo: dilema dos prisioneiros iterado

Estratégia olho por olho:

- Primeira vez, escolha Silenciar
- Dali para frente, repita a escolha do outro jogador na jogada anterior

Jogos iterados

O mesmo jogo repetido várias vezes,
com os mesmos jogadores.

Como isso afeta o comportamento dos jogadores?

Exemplo: dilema dos prisioneiros iterado

Estratégia olho por olho:

- Primeira vez, escolha Silenciar
- Dali para frente, repita a escolha do outro jogador na jogada anterior

No que isso pode resultar?

Formalização

Componentes de um jogo:

- conjunto N de jogadores;
- para cada jogador i em N,
  conjunto S_i de escolhas possíveis para o jogador i;
  função u_i ou c_i de S em $\mathbb{R}$, onde $S = \times_{i \in N} S_i$.

Formalização

Componentes de um jogo:

- conjunto N de jogadores;
- para cada jogador i em N,
  conjunto S_i de escolhas possíveis para o jogador i;
  função u_i ou c_i de S em $\mathbb{R}$, onde $S = \times_{i \in N} S_i$.

Elementos de S_i: estratégias do jogador i.

Elementos de S: vetor de estratégias ou
resultados possíveis do jogo.

Formalização

Componentes de um jogo:

- conjunto N de jogadores;
- para cada jogador i em N,
  conjunto S_i de escolhas possíveis para o jogador i;
  função u_i ou c_i de S em $\mathbb{R}$, onde $S = \times_{i \in N} S_i$.

Elementos de S_i: estratégias do jogador i.

Elementos de S: vetor de estratégias ou
resultados possíveis do jogo.

u_i: função utilidade $\qquad$ c_i: função custo

Vale que $u_i(s) = -c_i(s)$ para todo i e s.

As funções utilidade/custo descrevem
as preferências dos jogadores.

Definição de jogo

Um jogo J consistem em

- um conjunto N de jogadores;
- para cada jogador i em N,
  um conjunto S_i das estratégias do jogador i;
  uma função utilidade u_i de S em $\mathbb{R}$, onde $S = \times_{i \in N} S_i$.

Definição de jogo

Um jogo J consistem em

- um conjunto N de jogadores;
- para cada jogador i em N,
  um conjunto S_i das estratégias do jogador i;
  uma função utilidade u_i de S em $\mathbb{R}$, onde $S = \times_{i \in N} S_i$.

Alternativamente, pode-se dar funções custo c_i e não u_i.

Definição de jogo

Um jogo J consistem em

- um conjunto N de jogadores;
- para cada jogador i em N,
  um conjunto S_i das estratégias do jogador i;
  uma função utilidade u_i de S em $\mathbb{R}$, onde $S = \times_{i \in N} S_i$.

Alternativamente, pode-se dar funções custo c_i e não u_i.

No Jogo Batalha dos Sexos,
$N = \{R, G\}$, $S_R = S_G = \{\text{cinema}, \text{pedalar}\}$ e
a matriz dada representa as funções utilidade.

Definição de jogo

Um jogo J consistem em

- um conjunto N de jogadores;
- para cada jogador i em N,
  um conjunto S_i das estratégias do jogador i;
  uma função utilidade u_i de S em $\mathbb{R}$, onde $S = \times_{i \in N} S_i$.

Alternativamente, pode-se dar funções custo c_i e não u_i.

No Jogo Batalha dos Sexos,
$N = \{R, G\}$, $S_R = S_G = \{\text{cinema}, \text{pedalar}\}$ e
a matriz dada representa as funções utilidade.

No Jogo Dilema dos Prisioneiros,
$N = \{A, B\}$, $S_A = S_B = \{\text{confessar}, \text{silenciar}\}$ e
a matriz dada representa as funções custo.

Notação e conceitos básicos

Considere um jogo J dado por

- um conjunto $N = [n]$ de jogadores;
- para cada jogador i em N,
  um conjunto S_i das estratégias do jogador i;
  uma função utilidade u_i de S em $\mathbb{R}$, onde $S = \times_{i \in N} S_i$.

Notação e conceitos básicos

Considere um jogo J dado por

- um conjunto $N = [n]$ de jogadores;
- para cada jogador i em N,
  um conjunto S_i das estratégias do jogador i;
  uma função utilidade u_i de S em $\mathbb{R}$, onde $S = \times_{i \in N} S_i$.

Notação:

Para um vetor $s = (s_1, \ldots, s_n)$ em S, e um jogador i,
s_{-i} é o vetor $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$.

Para $r \in S_i$, (r, s_{-i}) é o vetor $(s_1, \ldots, s_{i-1}, r, s_{i+1}, \ldots, s_n) \in S$.

Notação e conceitos básicos

Considere um jogo J dado por

- um conjunto $N = [n]$ de jogadores;
- para cada jogador i em N,
  um conjunto S_i das estratégias do jogador i;
  uma função utilidade u_i de S em $\mathbb{R}$, onde $S = \times_{i \in N} S_i$.

Notação:

Para um vetor $s = (s_1, \ldots, s_n)$ em S, e um jogador i,
s_{-i} é o vetor $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$.

Para $r \in S_i$, (r, s_{-i}) é o vetor $(s_1, \ldots, s_{i-1}, r, s_{i+1}, \ldots, s_n) \in S$.
Jogador i está satisfeito com $s = (s_1, \ldots, s_n)$ se $u_i(s) \geq u_i(r, s_{-i})$,
para toda estratégia r em S_i.

Noção de equilíbrio

Para um vetor $s = (s_1, \ldots, s_n)$ em S, e um jogador i,
s_{-i} é o vetor $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$.

Para $r \in S_i$, (r, s_{-i}) é o vetor $(s_1, \ldots, s_{i-1}, r, s_{i+1}, \ldots, s_n) \in S$.

Jogador i está satisfeito com $s = (s_1, \ldots, s_n)$ se $u_i(s) \geq u_i(r, s_{-i})$, para toda estratégia r em S_i.

Noção de equilíbrio

Para um vetor $s = (s_1, \ldots, s_n)$ em S, e um jogador i,
s_{-i} é o vetor $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$.

Para $r \in S_i$, (r, s_{-i}) é o vetor $(s_1, \ldots, s_{i-1}, r, s_{i+1}, \ldots, s_n) \in S$.

Jogador i está satisfeito com $s = (s_1, \ldots, s_n)$ se $u_i(s) \geq u_i(r, s_{-i})$,
para toda estratégia r em S_i.

(Diz-se que i não tem incentivo para mudar de estratégia.)

Noção de equilíbrio

Para um vetor $s = (s_1, \ldots, s_n)$ em S, e um jogador i,
s_{-i} é o vetor $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$.

Para $r \in S_i$, (r, s_{-i}) é o vetor $(s_1, \ldots, s_{i-1}, r, s_{i+1}, \ldots, s_n) \in S$.

Jogador i está satisfeito com $s = (s_1, \ldots, s_n)$ se $u_i(s) \geq u_i(r, s_{-i})$,
para toda estratégia r em S_i.

(Diz-se que i não tem incentivo para mudar de estratégia.)

Um vetor s é um equilíbrio de Nash se
todo jogador está satisfeito com s.

Noção de equilíbrio

Para um vetor $s = (s_1, \ldots, s_n)$ em S, e um jogador i,
s_{-i} é o vetor $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$.

Para $r \in S_i$, (r, s_{-i}) é o vetor $(s_1, \ldots, s_{i-1}, r, s_{i+1}, \ldots, s_n) \in S$.

Jogador i está satisfeito com $s = (s_1, \ldots, s_n)$ se $u_i(s) \geq u_i(r, s_{-i})$,
para toda estratégia r em S_i.

(Diz-se que i não tem incentivo para mudar de estratégia.)

Um vetor s é um equilíbrio de Nash se
todo jogador está satisfeito com s.

Como vimos nos exemplos,
um jogo pode ter mais do que um equilíbrio de Nash,
ou pode não ter nenhum equilíbrio de Nash.

Estratégias dominantes

Se, para um jogador i, existe uma estratégia r em S_i tal que $u_i(s) \leq u_i(r, s_{-i})$, para todo s em S, dizemos que r é uma estratégia dominante para i.

Estratégias dominantes

Se, para um jogador i, existe uma estratégia r em S_i tal que $u_i(s) \leq u_i(r, s_{-i})$, para todo s em S, dizemos que r é uma estratégia dominante para i.

Um jogo em que todos os jogadores têm uma estratégia dominante é um jogo com estratégias dominantes.

Estratégias dominantes

Se, para um jogador i, existe uma estratégia r em S_i tal que $u_i(s) \leq u_i(r, s_{-i})$, para todo s em S, dizemos que r é uma estratégia dominante para i.

Um jogo em que todos os jogadores têm uma estratégia dominante é um jogo com estratégias dominantes.

Exemplo: O Dilema dos Prisioneiros é um jogo com estratégias dominantes.

Estratégias dominantes

Se, para um jogador i, existe uma estratégia r em S_i
tal que $u_i(s) \leq u_i(r, s_{-i})$, para todo s em S,
dizemos que r é uma estratégia dominante para i.

Um jogo em que todos os jogadores têm uma estratégia dominante é um jogo com estratégias dominantes.

Exemplo: O Dilema dos Prisioneiros é um jogo com estratégias dominantes.

Na maioria dos jogos, não há estratégias dominantes.

Estratégias dominantes

Se, para um jogador i, existe uma estratégia r em S_i
tal que $u_i(s) \leq u_i(r, s_{-i})$, para todo s em S,
dizemos que r é uma estratégia dominante para i.

Um jogo em que todos os jogadores têm uma estratégia dominante é um jogo com estratégias dominantes.

Exemplo: O Dilema dos Prisioneiros é um jogo com estratégias dominantes.

Na maioria dos jogos, não há estratégias dominantes.

É interessante projetar jogos com estratégias dominantes.

Outro exemplo: Leilões do segundo preço.