Análise de Algoritmos

Parte destes slides são adaptações de slides

do Prof. Paulo Feofiloff e do Prof. José Coelho de Pina.

Ordenação em tempo linear

CLRS cap 8

Ordenação: limite inferior

Problema: Rearranjar um vetor $A[1\,..\,n]$ de modo que ele fique em ordem crescente.

Existem algoritmos que consomem tempo $\mathrm{O}(n \lg n)$.

Ordenação: limite inferior

Problema: Rearranjar um vetor $A[1\,..\,n]$ de modo que ele fique em ordem crescente.

Existem algoritmos que consomem tempo $\mathrm{O}(n \lg n)$.

Existe algoritmo assintoticamente melhor?

Ordenação: limite inferior

Problema: Rearranjar um vetor $A[1\,..\,n]$ de modo que ele fique em ordem crescente.

Existem algoritmos que consomem tempo $\mathrm{O}(n \lg n)$.

Existe algoritmo assintoticamente melhor?

NÃO, se o algoritmo é baseado em comparações.

Prova?

Ordenação: limite inferior

Problema: Rearranjar um vetor $A[1\,..\,n]$ de modo que ele fique em ordem crescente.

Existem algoritmos que consomem tempo $\mathrm{O}(n \lg n)$.

Existe algoritmo assintoticamente melhor?

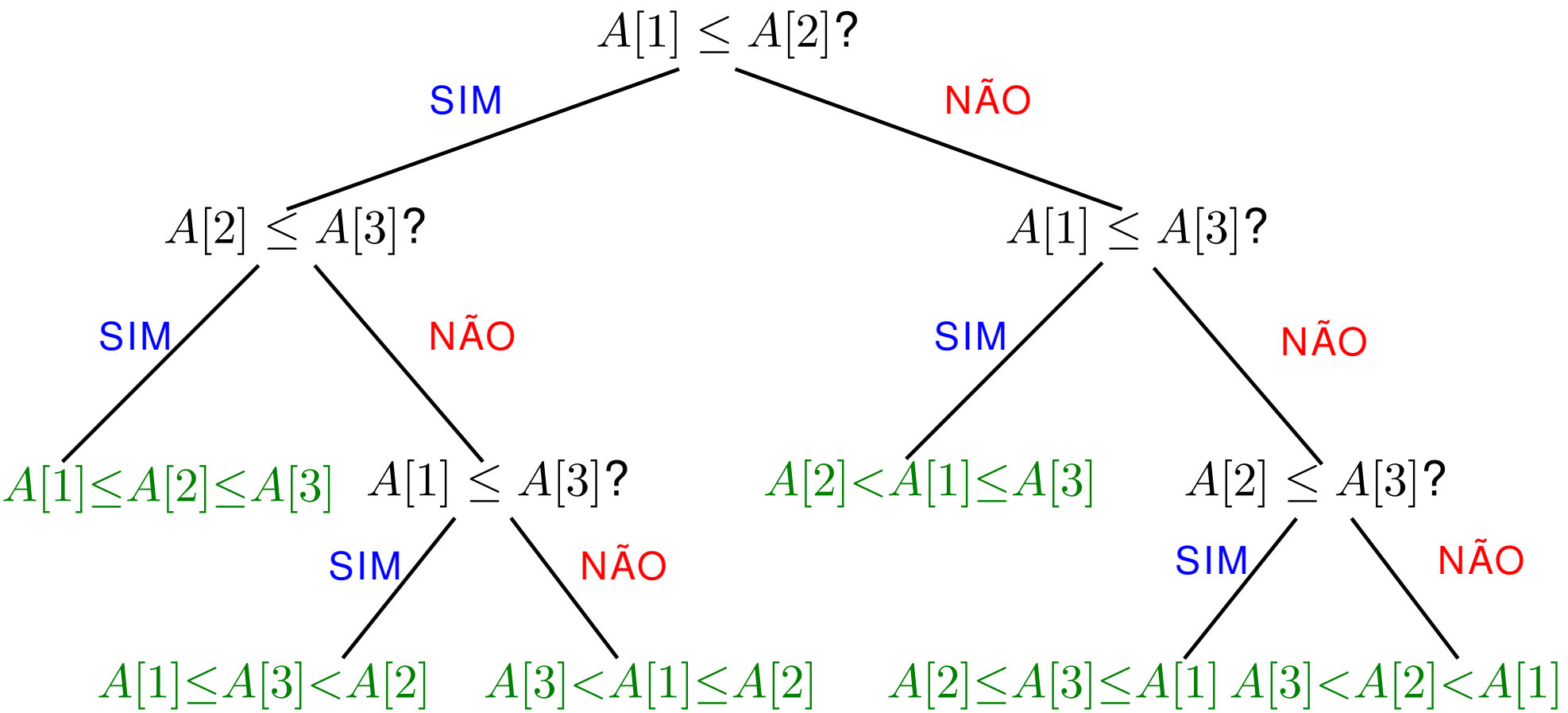
NÃO, se o algoritmo é baseado em comparações.

Prova?

Qualquer algoritmo baseado em comparações é uma "árvore de decisão".

Exemplo

ORDENA-POR-INSERÇÃO $(A[1\,..\,3])$:



Limite inferior

Considere uma árvore de decisão para $A[1\,..\,n]$.

Limite inferior

Considere uma árvore de decisão para $A[1\,..\,n]$.

Número de comparações, no pior caso?

Limite inferior

Considere uma árvore de decisão para $A[1\,..\,n]$.

Número de comparações, no pior caso?
Resposta: altura, h, da árvore de decisão.

Limite inferior

Considere uma árvore de decisão para $A[1\,..\,n]$.

Número de comparações, no pior caso?
Resposta: altura, h, da árvore de decisão.

Todas as $n!$ permutações de $1, \ldots, n$ devem ser folhas.

Limite inferior

Considere uma árvore de decisão para $A[1\,..\,n]$.

Número de comparações, no pior caso?
Resposta: altura, h, da árvore de decisão.

Todas as $n!$ permutações de $1, \ldots, n$ devem ser folhas.

Toda árvore binária de altura h tem no máximo 2^h folhas.

Limite inferior

Considere uma árvore de decisão para $A[1\,..\,n]$.

Número de comparações, no pior caso?
Resposta: altura, h, da árvore de decisão.

Todas as $n!$ permutações de $1, \ldots, n$ devem ser folhas.

Toda árvore binária de altura h tem no máximo 2^h folhas.

Prova: Por indução em h. A afirmação vale para $h = 0$.

Limite inferior

Considere uma árvore de decisão para $A[1\,..\,n]$.

Número de comparações, no pior caso?
Resposta: altura, h, da árvore de decisão.

Todas as $n!$ permutações de $1, \ldots, n$ devem ser folhas.

Toda árvore binária de altura h tem no máximo 2^h folhas.

Prova: Por indução em h. A afirmação vale para $h = 0$.
Suponha que a afirmação vale para toda árvore binária de altura menor que h, para $h \geq 1$.

Limite inferior

Considere uma árvore de decisão para $A[1\,..\,n]$.

Número de comparações, no pior caso?
Resposta: altura, h, da árvore de decisão.

Todas as $n!$ permutações de $1, \ldots, n$ devem ser folhas.

Toda árvore binária de altura h tem no máximo 2^h folhas.

Prova: Por indução em h. A afirmação vale para $h = 0$.
Suponha que a afirmação vale para toda árvore binária de altura menor que h, para $h \geq 1$.
Número de folhas de árvore de altura h é a soma do número de folhas das subárvores, que têm altura $\leq h - 1$.

Limite inferior

Considere uma árvore de decisão para $A[1\,..\,n]$.

Número de comparações, no pior caso?
Resposta: altura, h, da árvore de decisão.

Todas as $n!$ permutações de $1, \ldots, n$ devem ser folhas.

Toda árvore binária de altura h tem no máximo 2^h folhas.

Prova: Por indução em h. A afirmação vale para $h = 0$.
Suponha que a afirmação vale para toda árvore binária de altura menor que h, para $h \geq 1$.
Número de folhas de árvore de altura h é a soma do número de folhas das subárvores, que têm altura $\leq h - 1$.
Logo, o número de folhas de uma árvore de altura h é

$$\leq \; 2 \times 2^{h-1} \; = \; 2^h.$$

Limite inferior

Assim, devemos ter $2^h \geq n!$, donde $h \geq \lg(n!)$.

Limite inferior

Assim, devemos ter $2^h \geq n!$, donde $h \geq \lg(n!)$.

$$(n!)^2 = \prod_{i=0}^{n-1} (n-i)(i+1) \geq \prod_{i=1}^{n} n = n^n$$

Limite inferior

Assim, devemos ter $2^h \geq n!$, donde $h \geq \lg(n!)$.

$$(n!)^2 = \prod_{i=0}^{n-1} (n-i)(i+1) \geq \prod_{i=1}^{n} n = n^n$$

Portanto,

$$h \geq \lg(n!) \geq \frac{1}{2} n \lg n.$$

Limite inferior

Assim, devemos ter $2^h \geq n!$, donde $h \geq \lg(n!)$.

$$(n!)^2 \;=\; \prod_{i=0}^{n-1} (n-i)(i+1) \;\geq\; \prod_{i=1}^{n} n \;=\; n^n$$

Portanto,

$$h \;\geq\; \lg(n!) \;\geq\; \frac{1}{2}\, n \lg n.$$

Alternativamente, a fórmula de Stirling diz que

$$n! \;=\; \sqrt{2\pi\, n}\big(\frac{n}{e}\big)^n (1 + \Theta(\frac{1}{n})).$$

Limite inferior

Assim, devemos ter $2^h \geq n!$, donde $h \geq \lg(n!)$.

$$(n!)^2 \;=\; \prod_{i=0}^{n-1} (n-i)(i+1) \;\geq\; \prod_{i=1}^{n} n \;=\; n^n$$

Portanto,

$$h \;\geq\; \lg(n!) \;\geq\; \frac{1}{2}\, n \lg n.$$

Alternativamente, a fórmula de Stirling diz que

$$n! \;=\; \sqrt{2\pi\, n}\big(\frac{n}{e}\big)^n (1 + \Theta(\frac{1}{n})).$$

Disso, temos que $h \;\geq\; \lg(n!) \;\geq\; \lg\left(\frac{n}{e}\right)^n \;=\; n(\lg n - \lg e)$.

Conclusão

Todo algoritmo de ordenação
baseado em comparações faz

$$\Omega(n \lg n)$$

comparações no pior caso.

Counting Sort

Recebe inteiros n e k, e um vetor $A[1\,..\,n]$ onde cada elemento é um inteiro entre 1 e k.

Counting Sort

Recebe inteiros n e k, e um vetor $A[1\,..\,n]$ onde cada elemento é um inteiro entre 1 e k.

Devolve um vetor $B[1\,..\,n]$ com os elementos de $A[1\,..\,n]$ em ordem crescente.

Counting Sort

Recebe inteiros n e k, e um vetor $A[1\,..\,n]$ onde cada elemento é um inteiro entre 1 e k.

Devolve um vetor $B[1\,..\,n]$ com os elementos de $A[1\,..\,n]$ em ordem crescente.

```
CountingSort(A, n)
 1  para i ← 1 até k faça
 2      C[i] ← 0
 3  para j ← 1 até n faça
 4      C[A[j]] ← C[A[j]] + 1
 5  para i ← 2 até k faça
 6      C[i] ← C[i] + C[i − 1]
 7  para j ← n decrescendo até 1 faça
 8      B[C[A[j]]] ← A[j]
 9      C[A[j]] ← C[A[j]] − 1
10  devolva B
```

Consumo de tempo

linha	consumo na linha
1	$\Theta(k)$
2	$\mathrm{O}(k)$
3	$\Theta(n)$
4	$\mathrm{O}(n)$
5	$\Theta(k)$
6	$\mathrm{O}(k)$
7	$\Theta(n)$
8	$\mathrm{O}(n)$
9	$\mathrm{O}(n)$
10	$\Theta(1)$
total	????

Consumo de tempo

linha	consumo na linha
1	$\Theta(k)$
2	$\mathrm{O}(k)$
3	$\Theta(n)$
4	$\mathrm{O}(n)$
5	$\Theta(k)$
6	$\mathrm{O}(k)$
7	$\Theta(n)$
8	$\mathrm{O}(n)$
9	$\mathrm{O}(n)$
10	$\Theta(1)$
total	$\Theta(k+n)$

Counting Sort

```
COUNTINGSORT(A, n)
 1  para i ← 1 até k faça
 2      C[i] ← 0
 3  para j ← 1 até n faça
 4      C[A[j]] ← C[A[j]] + 1
 5  para i ← 2 até k faça
 6      C[i] ← C[i] + C[i − 1]
 7  para j ← n decrescendo até 1 faça
 8      B[C[A[j]]] ← A[j]
 9      C[A[j]] ← C[A[j]] − 1
10  devolva B
```

Consumo de tempo: $\Theta(k+n)$

Se $k = \mathrm{O}(n)$, o consumo de tempo é $\Theta(n)$.

Radix Sort

Algoritmo usado para ordenar

- inteiros não-negativos com d dígitos
- cartões perfurados
- registros cuja chave tem vários campos

Radix Sort

Algoritmo usado para ordenar

- inteiros não-negativos com d dígitos
- cartões perfurados
- registros cuja chave tem vários campos

dígito 1: menos significativo
dígito d: mais significativo

Radix Sort

Algoritmo usado para ordenar

- inteiros não-negativos com d dígitos
- cartões perfurados
- registros cuja chave tem vários campos

dígito 1: menos significativo
dígito d: mais significativo

```
RADIXSORT(A, n, d)
1  para i ← 1 até d faça
2      ORDENE(A, n, i)
```

Radix Sort

Algoritmo usado para ordenar

- inteiros não-negativos com d dígitos
- cartões perfurados
- registros cuja chave tem vários campos

dígito 1: menos significativo
dígito d: mais significativo

```
RADIXSORT(A, n, d)
1  para i ← 1 até d faça
2      ORDENE(A, n, i)
```

ORDENE(A, n, i): ordena $A[1\,..\,n]$ pelo i-ésimo dígito dos números em A por meio de um algoritmo estável.

Estabilidade

Um algoritmo de ordenação é estável se sempre que, inicialmente, $A[i] = A[j]$ para $i < j$, a cópia $A[i]$ termina em uma posição menor do vetor que a cópia $A[j]$.

Estabilidade

Um algoritmo de ordenação é estável se sempre que, inicialmente, $A[i] = A[j]$ para $i < j$, a cópia $A[i]$ termina em uma posição menor do vetor que a cópia $A[j]$.

Isso só é relevante quando temos informação satélite.

Estabilidade

Um algoritmo de ordenação é estável se sempre que, inicialmente, $A[i] = A[j]$ para $i < j$, a cópia $A[i]$ termina em uma posição menor do vetor que a cópia $A[j]$.

Isso só é relevante quando temos informação satélite.

Quais dos algoritmos que vimos são estáveis?

Estabilidade

Um algoritmo de ordenação é estável se sempre que, inicialmente, $A[i] = A[j]$ para $i < j$, a cópia $A[i]$ termina em uma posição menor do vetor que a cópia $A[j]$.

Isso só é relevante quando temos informação satélite.

Quais dos algoritmos que vimos são estáveis?

- inserção direta? seleção direta? bubblesort?
- mergesort?
- quicksort?
- heapsort?
- countingsort?

Consumo de tempo do Radixsort

Depende do algoritmo ORDENE.

Consumo de tempo do Radixsort

Depende do algoritmo ORDENE.

Se cada dígito é um inteiro de 1 a k,
então podemos usar o CountingSort.

Consumo de tempo do Radixsort

Depende do algoritmo ORDENE.

Se cada dígito é um inteiro de 1 a k,
então podemos usar o CountingSort.

Neste caso, o consumo de tempo é $\Theta(d(k+n))$.

Consumo de tempo do Radixsort

Depende do algoritmo ORDENE.

Se cada dígito é um inteiro de 1 a k,
então podemos usar o CountingSort.

Neste caso, o consumo de tempo é $\Theta(d(k+n))$.

Se d é limitado por uma constante (ou seja, se $d = \mathrm{O}(1)$)
e $k = \mathrm{O}(n)$, então o consumo de tempo é $\Theta(n)$.

Bucket Sort

Recebe um inteiro n e um vetor $A[1\,..\,n]$ onde cada elemento é um número no intervalo $[0, 1)$.

Bucket Sort

Recebe um inteiro n e um vetor $A[1\,..\,n]$ onde cada elemento é um número no intervalo $[0, 1)$.

A	.47	.93	.82	.12	.42	.03	.62	.38	.77	.91

Bucket Sort

Recebe um inteiro n e um vetor $A[1\,..\,n]$ onde cada elemento é um número no intervalo $[0, 1)$.

A	.47	.93	.82	.12	.42	.03	.62	.38	.77	.91

Devolve um vetor $C[1\,..\,n]$ com os elementos de $A[1\,..\,n]$ em ordem crescente.

Bucket Sort

Recebe um inteiro n e um vetor $A[1\,..\,n]$ onde cada elemento é um número no intervalo $[0, 1)$.

A	.47	.93	.82	.12	.42	.03	.62	.38	.77	.91

Devolve um vetor $C[1\,..\,n]$ com os elementos de $A[1\,..\,n]$ em ordem crescente.

C	.03	.12	.38	.42	.47	.62	.77	.82	.91	.93

Exemplo

.47	.93	.82	.12	.42	.03	.62	.38	.77	.91

Exemplo

.47	.93	.82	.12	.42	.03	.62	.38	.77	.91

$B[0]$:	.03	
$B[1]$:	.12	
$B[2]$:		
$B[3]$:	.38	
$B[4]$:	.47	.42
$B[5]$:		
$B[6]$:	.62	
$B[7]$:	.77	
$B[8]$:	.82	
$B[9]$:	.93	.91

Exemplo

.47	.93	.82	.12	.42	.03	.62	.38	.77	.91

$B[0]$:	.03	
$B[1]$:	.12	
$B[2]$:		
$B[3]$:	.38	
$B[4]$:	.42	.47
$B[5]$:		
$B[6]$:	.62	
$B[7]$:	.77	
$B[8]$:	.82	
$B[9]$:	.91	.93

Exemplo

.47	.93	.82	.12	.42	.03	.62	.38	.77	.91

$B[0]$:	.03	
$B[1]$:	.12	
$B[2]$:		
$B[3]$:	.38	
$B[4]$:	.42	.47
$B[5]$:		
$B[6]$:	.62	
$B[7]$:	.77	
$B[8]$:	.82	
$B[9]$:	.91	.93

.03	.12	.38	.42	.47	.62	.77	.82	.91	.93

Bucket Sort

Recebe um inteiro n e um vetor $A[1\,..\,n]$ onde cada elemento é um número no intervalo $[0, 1)$.

Devolve um vetor $C[1\,..\,n]$ com os elementos de $A[1\,..\,n]$ em ordem crescente.

```
BUCKETSORT(A, n)
 1  para i ← 0 até n − 1 faça
 2      B[i] ← NIL
 3  para i ← 1 até n faça
 4      INSIRA(B[⌊n A[i]⌋], A[i])
 5  para i ← 0 até n − 1 faça
 6      ORDENELISTA(B[i])
 7  C ← CONCATENE(B, n)
 8  devolva C
```

Bucket Sort

```
BUCKETSORT(A, n)
 1  para i ← 0 até n − 1 faça
 2      B[i] ← NIL
 3  para i ← 1 até n faça
 4      INSIRA(B[⌊n A[i]⌋], A[i])
 5  para i ← 0 até n − 1 faça
 6      ORDENELISTA(B[i])
 7  C ← CONCATENE(B, n)
 8  devolva C
```

INSIRA(p, x): insere x na lista apontada por p

ORDENELISTA(p): ordena a lista apontada por p

CONCATENE(B, n): devolve a lista obtida da concatenação das listas apontadas por $B[0], \ldots, B[n-1]$.

Consumo de tempo

Suponha que os números em $A[1\,..\,n]$ são uniformemente distribuídos no intervalo $[0, 1)$.

Suponha que o ORDENELISTA seja o INSERTIONSORT.

Consumo de tempo

Suponha que os números em $A[1\,..\,n]$ são uniformemente distribuídos no intervalo $[0, 1)$.

Suponha que o ORDENELISTA seja o INSERTIONSORT.

Seja X_i o número de elementos na lista $B[i]$.

Consumo de tempo

Suponha que os números em $A[1\,..\,n]$ são uniformemente distribuídos no intervalo $[0, 1)$.

Suponha que o ORDENELISTA seja o INSERTIONSORT.

Seja X_i o número de elementos na lista $B[i]$.

Seja

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento foi para a lista } B[i] \\ 0 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento não foi para a lista } B[i]. \end{cases}$$

Consumo de tempo

Suponha que os números em $A[1\,..\,n]$ são uniformemente distribuídos no intervalo $[0, 1)$.

Suponha que o ORDENELISTA seja o INSERTIONSORT.

Seja X_i o número de elementos na lista $B[i]$.

Seja

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento foi para a lista } B[i] \\ 0 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento não foi para a lista } B[i]. \end{cases}$$

Observe que $X_i = \sum_j X_{ij}$.

Consumo de tempo

Suponha que os números em $A[1\,..\,n]$ são uniformemente distribuídos no intervalo $[0, 1)$.

Suponha que o ORDENELISTA seja o INSERTIONSORT.

Seja X_i o número de elementos na lista $B[i]$.

Seja

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento foi para a lista } B[i] \\ 0 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento não foi para a lista } B[i]. \end{cases}$$

Observe que $X_i = \sum_j X_{ij}$.

Y_i: número de comparações para ordenar a lista $B[i]$.

Consumo de tempo

X_i: número de elementos na lista $B[i]$

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento foi para a lista } B[i] \\ 0 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento não foi para a lista } B[i]. \end{cases}$$

Y_i: número de comparações para ordenar a lista $B[i]$.

Consumo de tempo

X_i: número de elementos na lista $B[i]$

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento foi para a lista } B[i] \\ 0 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento não foi para a lista } B[i]. \end{cases}$$

Y_i: número de comparações para ordenar a lista $B[i]$.

Observe que $Y_i \leq {X_i}^2$.

Logo $\mathrm{E}[Y_i] \leq \mathrm{E}[{X_i}^2] = \mathrm{E}[(\sum_j X_{ij})^2]$.

Consumo de tempo

X_i: número de elementos na lista $B[i]$

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento foi para a lista } B[i] \\ 0 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento não foi para a lista } B[i]. \end{cases}$$

Y_i: número de comparações para ordenar a lista $B[i]$.

Observe que $Y_i \leq {X_i}^2$.

Logo $\mathrm{E}[Y_i] \leq \mathrm{E}[{X_i}^2] = \mathrm{E}[(\sum_j X_{ij})^2]$.

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[(\sum_j X_{ij})^2] &= \mathrm{E}[\sum_j \sum_k X_{ij} X_{ik}] \\ &= \mathrm{E}[\sum_j {X_{ij}}^2 + \sum_j \sum_{k \neq j} X_{ij} X_{ik}] \end{aligned}$$

Consumo de tempo

X_i: número de elementos na lista $B[i]$

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento foi para a lista } B[i] \\ 0 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento não foi para a lista } B[i]. \end{cases}$$

Y_i: número de comparações para ordenar a lista $B[i]$.

Observe que $Y_i \leq {X_i}^2$.

Logo $\mathrm{E}[Y_i] \leq \mathrm{E}[{X_i}^2] = \mathrm{E}[(\sum_j X_{ij})^2]$.

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[(\sum_j X_{ij})^2] &= \mathrm{E}[\sum_j \sum_k X_{ij} X_{ik}] \\ &= \mathrm{E}[\sum_j {X_{ij}}^2] + \mathrm{E}[\sum_j \sum_{k \neq j} X_{ij} X_{ik}] \end{aligned}$$

Consumo de tempo

X_i: número de elementos na lista $B[i]$

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento foi para a lista } B[i] \\ 0 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento não foi para a lista } B[i]. \end{cases}$$

Y_i: número de comparações para ordenar a lista $B[i]$.

Observe que $Y_i \leq {X_i}^2$.

Logo $\mathrm{E}[Y_i] \leq \mathrm{E}[{X_i}^2] = \mathrm{E}[(\sum_j X_{ij})^2]$.

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[(\sum_j X_{ij})^2] &= \mathrm{E}[\sum_j \sum_k X_{ij} X_{ik}] \\ &= \sum_j \mathrm{E}[{X_{ij}}^2] + \sum_j \sum_{k \neq j} \mathrm{E}[X_{ij} X_{ik}] \end{aligned}$$

Consumo de tempo

X_i: número de elementos na lista $B[i]$

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento foi para a lista } B[i] \\ 0 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento não foi para a lista } B[i]. \end{cases}$$

Y_i: número de comparações para ordenar a lista $B[i]$.

Observe que $Y_i \leq {X_i}^2$. Ademais,

$$\mathrm{E}[Y_i] \leq \sum_j \mathrm{E}[{X_{ij}}^2] + \sum_j \sum_{k \neq j} \mathrm{E}[X_{ij} X_{ik}].$$

Consumo de tempo

X_i: número de elementos na lista $B[i]$

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento foi para a lista } B[i] \\ 0 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento não foi para a lista } B[i]. \end{cases}$$

Y_i: número de comparações para ordenar a lista $B[i]$.

Observe que $Y_i \leq {X_i}^2$. Ademais,

$$\mathrm{E}[Y_i] \leq \sum_j \mathrm{E}[{X_{ij}}^2] + \sum_j \sum_{k \neq j} \mathrm{E}[X_{ij} X_{ik}].$$

Observe que ${X_{ij}}^2$ é uma variável aleatória binária. Vamos calcular sua esperança:

$$\mathrm{E}[{X_{ij}}^2] = \Pr[{X_{ij}}^2 = 1] = \Pr[X_{ij} = 1] = \frac{1}{n}.$$

Consumo de tempo

Para calcular $\mathrm{E}[X_{ij}X_{ik}]$ para $j \neq k$, primeiro note que X_{ij} e X_{ik} são variáveis aleatórias independentes.

Portanto, $\mathrm{E}[X_{ij}X_{ik}] = \mathrm{E}[X_{ij}]\mathrm{E}[X_{ik}]$.

Ademais, $\mathrm{E}[X_{ij}] = \Pr[X_{ij} = 1] = \frac{1}{n}$.

Consumo de tempo

Para calcular $\mathrm{E}[X_{ij}X_{ik}]$ para $j \neq k$, primeiro note que X_{ij} e X_{ik} são variáveis aleatórias independentes.

Portanto, $\mathrm{E}[X_{ij}X_{ik}] = \mathrm{E}[X_{ij}]\mathrm{E}[X_{ik}]$.

Ademais, $\mathrm{E}[X_{ij}] = \Pr[X_{ij} = 1] = \frac{1}{n}$.

Logo,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[Y_i] &\leq \sum_j \frac{1}{n} + \sum_j \sum_{k \neq j} \frac{1}{n^2} \\
&= \frac{n}{n} + n(n-1)\frac{1}{n^2} \\
&= 1 + (n-1)\frac{1}{n} \\
&= 2 - \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Consumo de tempo

Agora, seja $Y = \sum_i Y_i$.

Note que Y é o número de comparações realizadas pelo BUCKETSORT no total.

Assim $\mathrm{E}[Y]$ é o número esperado de comparações realizadas pelo algoritmo, e tal número determina o consumo assintótico de tempo do BUCKETSORT.

Mas então $\mathrm{E}[Y] = \sum_i \mathrm{E}[Y_i] \leq 2n - 1 = \mathrm{O}(n)$.

Consumo de tempo

Agora, seja $Y = \sum_i Y_i$.

Note que Y é o número de comparações realizadas pelo BUCKETSORT no total.

Assim $\mathrm{E}[Y]$ é o número esperado de comparações realizadas pelo algoritmo, e tal número determina o consumo assintótico de tempo do BUCKETSORT.

Mas então $\mathrm{E}[Y] = \sum_i \mathrm{E}[Y_i] \leq 2n - 1 = \mathrm{O}(n)$.

O consumo de tempo esperado do BUCKETSORT quando os números em $A[1\,..\,n]$ são uniformemente distribuídos no intervalo $[0, 1)$ é $\mathrm{O}(n)$.

Exercícios

Exercício 7.A
Desenhe a árvore de decisão para o SELECTIONSORT aplicado a $A[1\,..\,3]$ com todos os elementos distintos.

Exercício 7.B [CLRS 8.1-1]
Qual o menor profundidade (= menor nível) que uma folha pode ter em uma árvore de decisão que descreve um algoritmo de ordenação baseado em comparações?

Exercício 7.C [CLRS 8.1-2]
Mostre que $\lg(n!) = \Omega(n \lg n)$ sem usar a fórmula de Stirling. Sugestão: Calcule $\sum_{k=n/2}^{n} \lg k$. Use as técnicas de CLRS A.2.

Exercícios

Exercício 7.D [CLRS 8.2-1]
Simule a execução do CountingSort usando como entrada o vetor $A[1\,..\,11] = \langle 7, 1, 3, 1, 2, 4, 5, 7, 2, 4, 3\rangle$.

Exercício 7.E [CLRS 8.2-2]
Mostre que o CountingSort é estável.

Exercício 7.F [CLRS 8.2-3]
Suponha que o **para** da linha 7 do CountingSort é substituído por

```
7    para j ← 1 até n faça
```

Mostre que o ainda funciona. O algoritmo resultante continua estável?