Mais programação dinâmica

CLRS 15.4 e 15.5

= "recursão–com–tabela"
= transformação inteligente de recursão em iteração

Subsequências

$\langle z_1, \ldots, z_k \rangle$ é subsequência de $\langle x_1, \ldots, x_m \rangle$
se existem índices $i_1 < \cdots < i_k$ tais que

$$z_1 = x_{i_1} \quad \ldots \quad z_k = x_{i_k}$$

EXEMPLOS:

$\langle 5, 9, 2, 7 \rangle$ é subsequência de $\langle 9, 5, 6, 9, 6, 2, 7, 3 \rangle$

$\langle$A, A, D, A, A$\rangle$ é subsequência de
$\langle$A, B, R, A, C, A, D, A, B, R, A$\rangle$

A			A			D	A			A
|			|			|	|			|
A	B	R	A	C	A	D	A	B	R	A

Exercício

Problema: Decidir se $Z[1\,..\,m]$ é subsequência de $X[1\,..\,n]$

Exercício

Problema: Decidir se $Z[1\,..\,m]$ é subsequência de $X[1\,..\,n]$

```
SUB-SEQ (Z, m, X, n)
i ← m
j ← n
enquanto i ≥ 1 e j ≥ 1 faça
    se Z[i] = X[j]
        então i ← i − 1
    j ← j − 1
se i ≥ 1
    então devolva "não é subsequência"
    senão devolva "é subsequência"
```

Exercício

Problema: Decidir se $Z[1\,..\,m]$ é subsequência de $X[1\,..\,n]$

```
SUB-SEQ (Z, m, X, n)
1  i ← m
2  j ← n
3  enquanto i ≥ 1 e j ≥ 1 faça
4      se Z[i] = X[j]
5          então i ← i − 1
6      j ← j − 1
7  se i ≥ 1
8      então devolva "não é subsequência"
9      senão devolva "é subsequência"
```

Consumo de tempo é $\mathrm{O}(n)$ e $\Omega(\min\{m, n\})$.

Exercício

Problema: Decidir se $Z[1\,..\,m]$ é subsequência de $X[1\,..\,n]$

```
SUB-SEQ (Z, m, X, n)
i ← m
j ← n
enquanto i ≥ 1 e j ≥ 1 faça
    se Z[i] = X[j]
        então i ← i − 1
    j ← j − 1
se i ≥ 1
    então devolva "não é subsequência"
    senão devolva "é subsequência"
```

Invariantes:

(i0) $Z[i{+}1\,..\,m]$ é subsequência de $X[j{+}1\,..\,n]$

(i1) $Z[i\,..\,m]$ **não** é subsequência de $X[j{+}1\,..\,n]$

Subsequência comum máxima

Z é subseq comum de X e Y

se Z é subsequência de X e de Y

ssco = subseq comum

Subsequência comum máxima

Z é subseq comum de X e Y

se Z é subsequência de X e de Y

ssco = subseq comum

Exemplos: X = A B C B D A B

Y = B D C A B A

ssco = B C A

Subsequência comum máxima

Z é subseq comum de X e Y

se Z é subsequência de X e de Y

ssco = subseq comum

Exemplos: X = A B C B D A B

Y = B D C A B A

ssco = B C A

Outra ssco = B D A B

Problema

Problema: Encontrar uma ssco máxima de X e Y.

Exemplos: X = A B C B D A B

Y = B D C A B A

ssco = B C A

ssco maximal = A B A

ssco máxima = B C A B

Outra ssco máxima = B D A B

LCS = Longest Common Subsequence

diff

```
> more abracadabra
A
B
R
A
C
A
D
A
B
R
A
```

```
> more yabbadabbadoo
Y
A
B
B
A
D
A
B
B
A
D
D
O
```

diff -u abracadabra yabbadabbadoo

```
+Y
 A
 B
-R
-A
-C
+B
 A
 D
 A
 B
-R
+B
 A
+D
+O
+O
```

Subestrutura ótima

Suponha que $Z[1\,..\,k]$ é ssco máxima de $X[1\,..\,m]$ e $Y[1\,..\,n]$.

- Se $X[m] = Y[n]$,
  então $Z[k] = X[m] = Y[n]$ e
  $Z[1\,..\,k{-}1]$ é ssco máxima de $X[1\,..\,m{-}1]$ e $Y[1\,..\,n{-}1]$.

Subestrutura ótima

Suponha que $Z[1\,..\,k]$ é ssco máxima de $X[1\,..\,m]$ e $Y[1\,..\,n]$.

- Se $X[m] = Y[n]$,
  então $Z[k] = X[m] = Y[n]$ e
  $Z[1\,..\,k{-}1]$ é ssco máxima de $X[1\,..\,m{-}1]$ e $Y[1\,..\,n{-}1]$.

- Se $X[m] \neq Y[n]$,
  então $Z[k] \neq X[m]$ implica que
  $Z[1\,..\,k]$ é ssco máxima de $X[1\,..\,m{-}1]$ e $Y[1\,..\,n]$.

Subestrutura ótima

Suponha que $Z[1\,..\,k]$ é ssco máxima de $X[1\,..\,m]$ e $Y[1\,..\,n]$.

- Se $X[m] = Y[n]$,
  então $Z[k] = X[m] = Y[n]$ e
  $Z[1\,..\,k{-}1]$ é ssco máxima de $X[1\,..\,m{-}1]$ e $Y[1\,..\,n{-}1]$.

- Se $X[m] \neq Y[n]$,
  então $Z[k] \neq X[m]$ implica que
  $Z[1\,..\,k]$ é ssco máxima de $X[1\,..\,m{-}1]$ e $Y[1\,..\,n]$.

- Se $X[m] \neq Y[n]$,
  então $Z[k] \neq Y[n]$ implica que
  $Z[1\,..\,k]$ é ssco máxima de $X[1\,..\,m]$ e $Y[1\,..\,n{-}1]$.

Simplificação

Problema: encontrar o comprimento de uma ssco máxima.

Simplificação

Problema: encontrar o comprimento de uma ssco máxima.

$c[i, j] =$ comprimento de uma ssco máxima
de $X[1 \mathinner{..} i]$ e $Y[1 \mathinner{..} j]$

Simplificação

Problema: encontrar o comprimento de uma ssco máxima.

$c[i, j] =$ comprimento de uma ssco máxima de $X[1 \mathinner{..} i]$ e $Y[1 \mathinner{..} j]$

Recorrência:

$c[0, j] = c[i, 0] = 0$

Simplificação

Problema: encontrar o comprimento de uma ssco máxima.

$c[i, j] =$ comprimento de uma ssco máxima de $X[1 \ldots i]$ e $Y[1 \ldots j]$

Recorrência:

$c[0, j] = c[i, 0] = 0$

$c[i, j] = c[i-1, j-1] + 1$ se $X[i] = Y[j]$

Simplificação

Problema: encontrar o comprimento de uma ssco máxima.

$c[i, j] =$ comprimento de uma ssco máxima de $X[1 \,..\, i]$ e $Y[1 \,..\, j]$

Recorrência:

$c[0, j] = c[i, 0] = 0$

$c[i, j] = c[i-1, j-1] + 1$ se $X[i] = Y[j]$

$c[i, j] = \max(c[i, j-1], c[i-1, j])$ se $X[i] \neq Y[j]$

Algoritmo recursivo

Devolve o comprimento de uma ssco máxima de $X[1\,..\,i]$ e $Y[1\,..\,j]$.

```
REC-LCS-LENGTH (X, i, Y, i)
se i = 0 ou j = 0 então devolva 0
se X[i] = Y[j]
    então c[i,j] ← REC-LCS-LENGTH (X, i−1, Y, j−1) + 1
    senão q1 ← REC-LCS-LENGTH (X, i−1, Y, j)
          q2 ← REC-LCS-LENGTH (X, i, Y, j−1)
          se q1 ≥ q2
              então c[i,j] ← q1
              senãoc[i,j] ← q2
devolva c[i,j]
```

Consumo de tempo

$T(m, n) :=$ número de comparações feitas por
REC-LCS-LENGTH (X, m, Y, n) no pior caso

Consumo de tempo

$T(m, n) :=$ número de comparações feitas por REC-LCS-LENGTH (X, m, Y, n) no pior caso

Recorrência

$$T(0, n) = 0$$
$$T(m, 0) = 0$$
$$T(m, n) \geq T(m-1, n) + T(m, n-1) + 1 \quad \text{para } n \geq 1 \text{ e } m \geq 1$$

Consumo de tempo

$T(m, n) :=$ número de comparações feitas por REC-LCS-LENGTH (X, m, Y, n) no pior caso

Recorrência

$$T(0, n) = 0$$
$$T(m, 0) = 0$$
$$T(m, n) \geq T(m-1, n) + T(m, n-1) + 1 \quad \text{para } n \geq 1 \text{ e } m \geq 1$$

A que classe Ω pertence $T(m, n)$?

Recorrência

Note que $T(m, n) = T(n, m)$ para $n = 0, 1, \ldots$ e $m = 0, 1, \ldots$.

Recorrência

Note que $T(m, n) = T(n, m)$ para $n = 0, 1, \ldots$ e $m = 0, 1, \ldots$.

Seja $k := \min\{m, n\}$. Temos que

$$T(m, n) \geq T(k, k) \geq S(k),$$

onde

$$\begin{aligned} S(0) &= 0 \\ S(k) &= 2S(k-1) + 1 \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Recorrência

Note que $T(m, n) = T(n, m)$ para $n = 0, 1, \ldots$ e $m = 0, 1, \ldots$.

Seja $k := \min\{m, n\}$. Temos que

$$T(m, n) \geq T(k, k) \geq S(k),$$

onde

$$\begin{aligned} S(0) &= 0 \\ S(k) &= 2S(k-1) + 1 \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

$S(k)$ é $\Theta(2^k) \Rightarrow T(m, n)$ é $\Omega(2^{\min\{m,n\}})$

Recorrência

Note que $T(m, n) = T(n, m)$ para $n = 0, 1, \ldots$ e $m = 0, 1, \ldots$.

Seja $k := \min\{m, n\}$. Temos que

$$T(m, n) \geq T(k, k) \geq S(k),$$

onde

$$\begin{aligned} S(0) &= 0 \\ S(k) &= 2S(k-1) + 1 \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

$S(k)$ é $\Theta(2^k) \Rightarrow T(m, n)$ é $\Omega(2^{\min\{m,n\}})$

$T(m, n)$ é exponecial

Conclusão

O consumo de tempo do algoritmo REC-LEC-LENGTH é $\Omega(2^{\min\{m,n\}})$.

Programação dinâmica

Cada subproblema, comprimento de uma ssco máxima de

$$X[1\,..\,i] \quad \text{e} \quad Y[1\,..\,j],$$

é resolvido uma só vez.

Em que ordem calcular os componentes da tabela c?

Para calcular $c[4, 6]$ preciso de ...

Programação dinâmica

Cada subproblema, comprimento de uma ssco máxima de

$$X[1\,..\,i] \quad \text{e} \quad Y[1\,..\,j],$$

é resolvido uma só vez.

Em que ordem calcular os componentes da tabela c?

Para calcular $c[4, 6]$ preciso de ...

$c[4, 5]$, $c[3, 6]$ e de $c[3, 5]$.

Programação dinâmica

Cada subproblema, comprimento de uma ssco máxima de

$$X[1\,..\,i] \quad \text{e} \quad Y[1\,..\,j],$$

é resolvido uma só vez.

Em que ordem calcular os componentes da tabela c?

Para calcular $c[4,6]$ preciso de ...

$c[4,5]$, $c[3,6]$ e de $c[3,5]$.

Calcule todos os $c[i,j]$ com $i = 1$ e $j = 0, 1, \ldots, n$,
depois todos com $i = 2$ e $j = 0, 1, \ldots, n$,
depois todos com $i = 3$ e $j = 0, 1, \ldots, n$,
etc.

Programação dinâmica

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0							
3	0				$\star$	$\star$		
4	0				$\star$	??		
5	0							
6	0							
7	0							
8	0							

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	??						
B	2	0							
C	3	0							
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	??					
B	2	0							
C	3	0							
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							

i

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	??				
B	2	0							
C	3	0							
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							

i

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	??			
B	2	0							
C	3	0							
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							

i

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	??		
B	2	0							
C	3	0							
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

X	Y		B	D	C	A	B	A	j
		0	1	2	3	4	5	6	
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	??	
B	2	0							
C	3	0							
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							

i

Simulação

X	Y		B	D	C	A	B	A	j
		0	1	2	3	4	5	6	
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	??						
C	3	0							
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							

i

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	??					
C	3	0							
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	??				
C	3	0							
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	??			
C	3	0							
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

X	Y		B	D	C	A	B	A	j
		0	1	2	3	4	5	6	
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	??		
C	3	0							
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							

i

Simulação

X	Y		B	D	C	A	B	A	j
		0	1	2	3	4	5	6	
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	??	
C	3	0							
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	??						
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

X	Y		B	D	C	A	B	A	j
		0	1	2	3	4	5	6	
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	??					
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							

i

Simulação

X	Y		B	D	C	A	B	A	j
		0	1	2	3	4	5	6	
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	??				
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							

i

Simulação

X	Y		B	D	C	A	B	A	j
		0	1	2	3	4	5	6	
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	??			
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							

i

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	??		
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							

i

Simulação

X	Y		B	D	C	A	B	A	j
		0	1	2	3	4	5	6	
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	??	
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							

i

Simulação

X	Y		B	D	C	A	B	A	j
		0	1	2	3	4	5	6	
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	??						
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							

i

Simulação

X	Y		B	D	C	A	B	A	j
		0	1	2	3	4	5	6	
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	??					
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							

i

Simulação

X	Y		B	D	C	A	B	A	j
		0	1	2	3	4	5	6	
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	??				
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							

i

Simulação

X	Y		B	D	C	A	B	A	j
		0	1	2	3	4	5	6	
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	??			
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							

i

Simulação

X	Y		B	D	C	A	B	A	j
		0	1	2	3	4	5	6	
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	??		
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							

i

Simulação

X	Y		B	D	C	A	B	A	j
		0	1	2	3	4	5	6	
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	??	
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							

i

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	??						
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

X	Y		B	D	C	A	B	A	j
		0	1	2	3	4	5	6	
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	??					
A	6	0							
B	7	0							

i

Simulação

X	Y		B	D	C	A	B	A	j
		0	1	2	3	4	5	6	
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	??				
A	6	0							
B	7	0							

i

Simulação

X	Y		B	D	C	A	B	A	j
		0	1	2	3	4	5	6	
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	??			
A	6	0							
B	7	0							

i

Simulação

X	Y		B	D	C	A	B	A	j
		0	1	2	3	4	5	6	
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	??		
A	6	0							
B	7	0							

i

Simulação

X	Y		B	D	C	A	B	A	j
		0	1	2	3	4	5	6	
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	??	
A	6	0							
B	7	0							

i

Simulação

X	Y		B	D	C	A	B	A	j
		0	1	2	3	4	5	6	
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	??						
B	7	0							
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	1	??					
B	7	0							
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	1	2	??				
B	7	0							
	i								

Simulação

X	Y		B	D	C	A	B	A	j
		0	1	2	3	4	5	6	
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	1	2	2	??			
B	7	0							
	i								

Simulação

X	Y		B	D	C	A	B	A	j
		0	1	2	3	4	5	6	
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	1	2	2	3	??		
B	7	0							

i

Simulação

X	Y		B	D	C	A	B	A	j
		0	1	2	3	4	5	6	
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	1	2	2	3	3	??	
B	7	0							
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	1	2	2	3	3	4	
B	7	0	??						
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	1	2	2	3	3	4	
B	7	0	1	??					
	i								

Simulação

X	Y		B	D	C	A	B	A	j
		0	1	2	3	4	5	6	
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	1	2	2	3	3	4	
B	7	0	1	2	??				
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	1	2	2	3	3	4	
B	7	0	1	2	2	??			
	i								

Simulação

X	Y		B	D	C	A	B	A	j
		0	1	2	3	4	5	6	
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	1	2	2	3	3	4	
B	7	0	1	2	2	3	??		
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	1	2	2	3	3	4	
B	7	0	1	2	2	3	4	??	
	i								

Simulação

X	Y		B	D	C	A	B	A	j
		0	1	2	3	4	5	6	
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	1	2	2	3	3	4	
B	7	0	1	2	2	3	4	4	
	i								

Simulação

X \ Y			B	D	C	A	B	A	j
		0	1	2	3	4	5	6	
	0	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	
A	1	$\star$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	
B	2	$\star$	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	
C	3	$\star$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	
B	4	$\star$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	
D	5	$\star$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	
A	6	$\star$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	
B	7	$\star$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	
	i								

Algoritmo de programação dinâmica

Devolve o comprimento de
uma ssco máxima de $X[1\,..\,m]$ e $Y[1\,..\,n]$.

```
LEC-LENGTH (X, m, Y, n)
  para i ← 0 até m faça c[i, 0] ← 0
  para j ← 1 até n faça c[0, j] ← 0
  para i ← 1 até m faça
      para j ← 1 até n faça
          se X[i] = Y[j]
              então c[i, j] ← c[i − 1, j − 1] + 1
              senão se c[i − 1, j] ≥ c[i, j − 1]
                        então c[i, j] ← c[i − 1, j]
                        senão c[i, j] ← c[i, j − 1]
  devolva c[m, n]
```

Algoritmo de programação dinâmica

Devolve o comprimento de
uma ssco máxima de $X[1\,..\,m]$ e $Y[1\,..\,n]$.

```
LEC-LENGTH (X, m, Y, n)
para i ← 0 até m faça c[i, 0] ← 0
para j ← 1 até n faça c[0, j] ← 0
para i ← 1 até m faça
    para j ← 1 até n faça
        se X[i] = Y[j]
            então c[i, j] ← c[i − 1, j − 1] + 1
            senão se c[i − 1, j] ≥ c[i, j − 1]
                        então c[i, j] ← c[i − 1, j]
                        senão c[i, j] ← c[i, j − 1]
devolva c[m, n]
```

Consumo de tempo: $\mathrm{O}(mn)$

Conclusão

O consumo de tempo do algoritmo LEC-LENGTH é $\Theta(mn)$.

Subsequência comum máxima

X	Y		B	D	C	A	B	A	
		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	
A	1	$\star$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	
B	2	$\star$	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	
C	3	$\star$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	
B	4	$\star$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	
D	5	$\star$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	
A	6	$\star$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	
B	7	$\star$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	
	i								

Algoritmo de programação dinâmica

```
LEC-LENGTH (X, m, Y, n)
para i ← 0 até m faça c[i, 0] ← 0
para j ← 1 até n faça c[0, j] ← 0
para i ← 1 até m faça
    para j ← 1 até n faça
        se X[i] = Y[j]
            então c[i, j] ← c[i − 1, j − 1] + 1
                  b[i, j] ← "↖"
            senão se c[i − 1, j] ≥ c[i, j − 1]
                      então c[i, j] ← c[i − 1, j]
                            b[i, j] ← "↑"
                      senão c[i, j] ← c[i, j − 1]
                            b[i, j] ← "←"
devolva c e b
```

Algoritmo de programação dinâmica

```
LEC-LENGTH (X, m, Y, n)
para i ← 0 até m faça c[i, 0] ← 0
para j ← 1 até n faça c[0, j] ← 0
para i ← 1 até m faça
    para j ← 1 até n faça
        se X[i] = Y[j]
            então c[i, j] ← c[i − 1, j − 1] + 1
                  b[i, j] ← "↖"
            senão se c[i − 1, j] ≥ c[i, j − 1]
                      então c[i, j] ← c[i − 1, j]
                            b[i, j] ← "↑"
                      senão c[i, j] ← c[i, j − 1]
                            b[i, j] ← "←"
devolva c e b
```

Consumo de tempo: $\mathrm{O}(mn)$

Get-LCS

```
GET-LCS (X, m, n, b, máxcomp)
k ← máxcomp
i ← m
j ← n
enquanto i > 0 e j > 0 faça
    se b[i, j] = "↖"
        então Z[k] ← X[i]
              k ← k − 1    i ← i − 1    j ← j − 1
        senão se b[i, j] = "←"
                  então i ← i − 1
                  senão j ← j − 1
devolva Z
```

Consumo de tempo é $\mathrm{O}(m+n)$ e $\Omega(\min\{m,n\})$.

Exercícios

Exercício 20.A
Escreva um algoritmo para decidir se $\langle z_1, \ldots, z_k \rangle$ é subsequência de $\langle x_1, \ldots, x_m \rangle$. Prove rigorosamente que o seu algoritmo está correto.

Exercício 20.B
Suponha que os elementos de uma sequência $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ são distintos dois a dois. Quantas subsequências tem a sequência?

Exercício 20.C
Uma subsequência crescente Z de uma sequência X e é *máxima* se não existe outra subsequência crescente mais longa. A subsequência $\langle 5, 6, 9 \rangle$ de $\langle 9, 5, 6, 9, 6, 2, 7 \rangle$ é máxima? Dê uma sequência crescente máxima de $\langle 9, 5, 6, 9, 6, 2, 7 \rangle$. Mostre que o algoritmo "guloso" óbvio não é capaz, em geral, de encontrar uma subsequência crescente máxima de uma sequência dada. (Algoritmo guloso óbvio: escolha o menor elemento de X; a partir daí, escolha sempre o próximo elemento de X que seja maior ou igual ao último escolhido.)

Exercício 20.D
Escreva um algoritmo de programação dinâmica para resolver o problema da subsequência crescente máxima.

Mais exercícios

Exercício 20.E [CLRS 15.4-5]
Mostre como o algoritmo da subsequência comum máxima pode ser usado para resolver o problema da subsequência crescente máxima de uma sequência numérica. Dê uma delimitação justa, em notação Θ, do consumo de tempo de sua solução.

Exercício 20.F [Printing neatly. CLRS 15-2]
Considere a sequência $P_1, P_2, \ldots, P_n$ de palavras que constitui um parágrafo de texto. A palavra P_i tem l_i caracteres. Queremos imprimir as palavras em linhas, na ordem dada, de modo que cada linha tenha no máximo M caracteres. Se uma determinada linha contém as palavras $P_i, P_{i+1}, \ldots, P_j$ (com $i \leq j$) e há exatamente um espaço entre cada par de palavras consecutivas, o número de espaços no fim da linha é

$$M - (l_i + 1 + l_{i+1} + 1 + \cdots + 1 + l_j)\,.$$

É claro que não devemos permitir que esse número seja negativo. Queremos minimizar, com relação a todas as linhas exceto a última, a soma dos cubos dos números de espaços no fim de cada linha. (Assim, se temos linhas $1, 2, \ldots, L$ e b_p espaços no fim da linha p, queremos minimizar $b_1^3 + b_2^3 + \cdots + b_{L-1}^3$).
Dê um exemplo para mostrar que algoritmos inocentes não resolvem o problema. Dê um algoritmo de programação dinâmica que resolva o problema. Qual a "optimal substructure property" para esse problema? Faça uma análise do consumo de tempo do algoritmo.

Buscas em um conjunto conhecido

Considere um inteiro n e um vetor $v[1\,..\,n]$ de inteiros.

Problema: Dado $v[1\,..\,n]$ e uma sequência de k inteiros, decidir se cada inteiro está ou não em v.

Buscas em um conjunto conhecido

Considere um inteiro n e um vetor $v[1\,..\,n]$ de inteiros.

Problema: Dado $v[1\,..\,n]$ e uma sequência de k inteiros, decidir se cada inteiro está ou não em v.

Se k é grande, como devemos armazenar o v?

Buscas em um conjunto conhecido

Considere um inteiro n e um vetor $v[1\,..\,n]$ de inteiros.

Problema: Dado $v[1\,..\,n]$ e uma sequência de k inteiros, decidir se cada inteiro está ou não em v.

Se k é grande, como devemos armazenar o v?

E se v armazena um conjunto bem conhecido, como por exemplo as palavras de uma língua?
(A ser usado por um tradutor, ou um speller.)

Buscas em um conjunto conhecido

Considere um inteiro n e um vetor $v[1\,..\,n]$ de inteiros.

Problema: Dado $v[1\,..\,n]$ e uma sequência de k inteiros, decidir se cada inteiro está ou não em v.

Se k é grande, como devemos armazenar o v?

E se v armazena um conjunto bem conhecido, como por exemplo as palavras de uma língua?
(A ser usado por um tradutor, ou um speller.)

Podemos ordenar v e aplicar busca binária.

Podemos fazer algo melhor?

Buscas em conjunto conhecido

Dadas estimativas do número de acessos a cada elemento de $v[1 \mathinner{..} n]$, qual é a melhor estrutura de dados para v?

Buscas em conjunto conhecido

Dadas estimativas do número de acessos a cada elemento de $v[1 \mathinner{..} n]$, qual é a melhor estrutura de dados para v?

Árvore de busca binária (ABB)?

Buscas em conjunto conhecido

Dadas estimativas do número de acessos a cada elemento de $v[1\,..\,n]$, qual é a melhor estrutura de dados para v?

Árvore de busca binária (ABB)?

Exemplo: $n = 3$ e $e_1 = 20$, $e_2 = 10$, $e_3 = 40$.

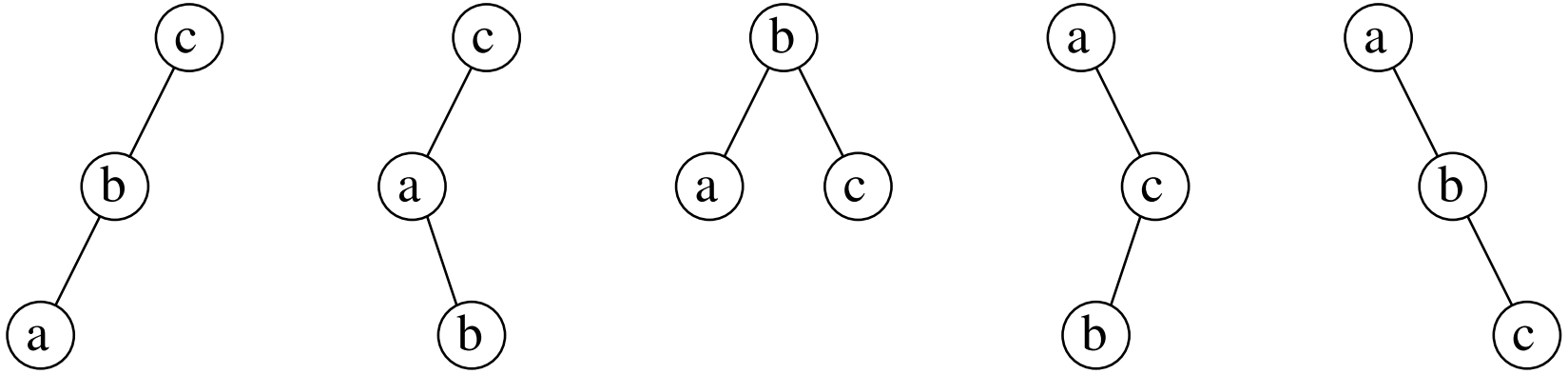
Buscas em conjunto conhecido

Dadas estimativas do número de acessos a cada elemento de $v[1\,..\,n]$, qual é a melhor estrutura de dados para v?

Árvore de busca binária (ABB)?

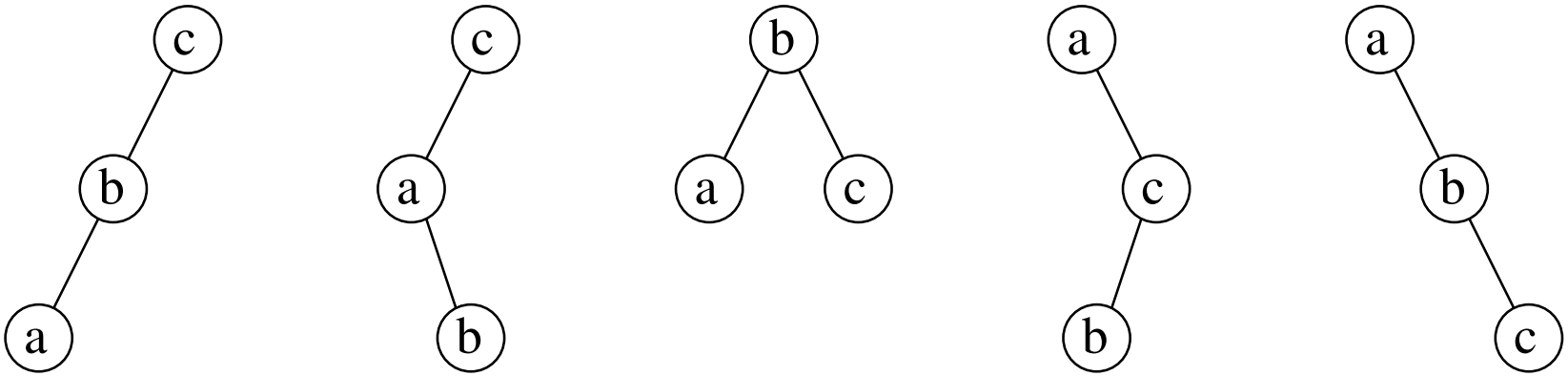
Exemplo: $n = 3$ e $e_1 = 20$, $e_2 = 10$, $e_3 = 40$.

Qual a melhor das ABBs?



Exemplo

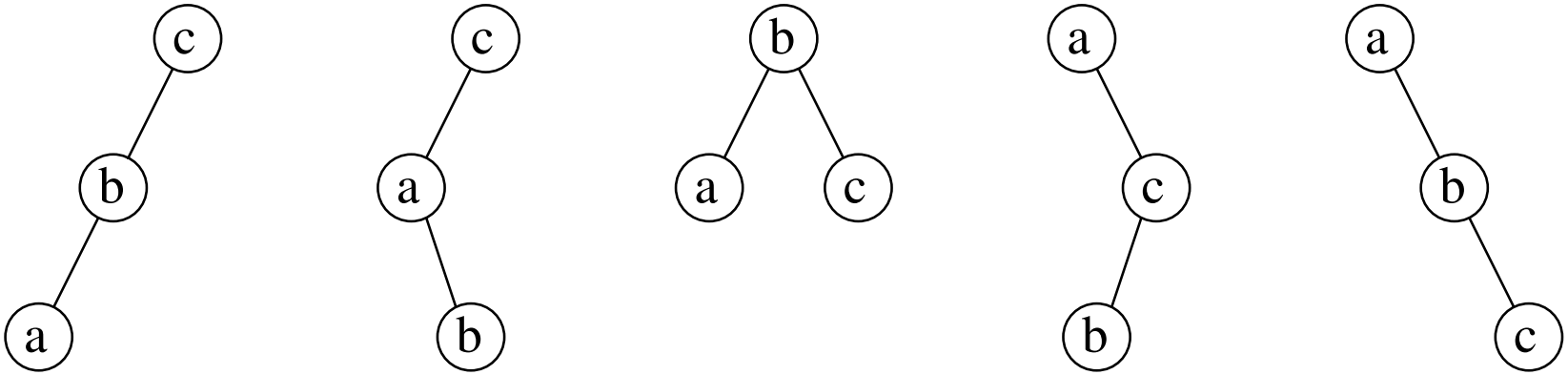
Exemplo: $n = 3$ e $e_1 = 20$, $e_2 = 10$, $e_3 = 40$.



Qual a melhor das ABBs?

Exemplo

Exemplo: $n = 3$ e $e_1 = 20$, $e_2 = 10$, $e_3 = 40$.

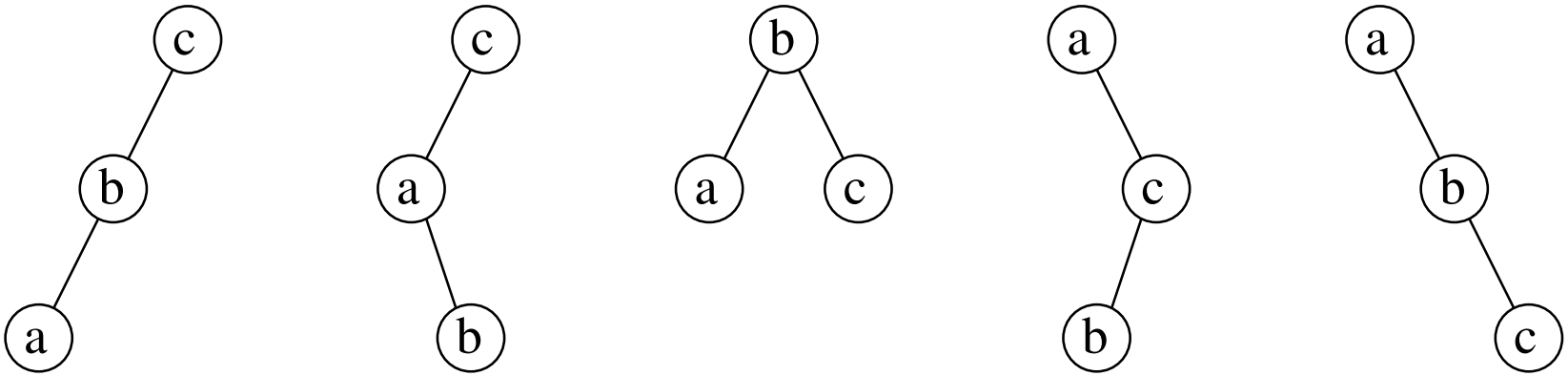


Número esperado de comparações:

- $20 \cdot 3 + 10 \cdot 2 + 40 \cdot 1 = 120$
- $20 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 40 \cdot 1 = 110$
- $20 \cdot 2 + 10 \cdot 1 + 40 \cdot 2 = 130$
- $20 \cdot 1 + 10 \cdot 3 + 40 \cdot 2 = 130$
- $20 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 40 \cdot 3 = 160$

Exemplo

Exemplo: $n = 3$ e $e_1 = 20$, $e_2 = 10$, $e_3 = 40$.



Número esperado de comparações:

- $20 \cdot 3 + 10 \cdot 2 + 40 \cdot 1 = 120$
- $20 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 40 \cdot 1 = 110$ $\longleftarrow$ ABB ótima
- $20 \cdot 2 + 10 \cdot 1 + 40 \cdot 2 = 130$
- $20 \cdot 1 + 10 \cdot 3 + 40 \cdot 2 = 130$
- $20 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 40 \cdot 3 = 160$

Árvore de busca ótima

Considere um vetor $e[1\,..\,n]$ de inteiros com uma estimativa do número de acessos a cada elemento de $\{1, \ldots, n\}$.

Árvore de busca ótima

Considere um vetor $e[1\,..\,n]$ de inteiros com uma estimativa do número de acessos a cada elemento de $\{1, \ldots, n\}$.

Uma ABB ótima com respeito ao vetor e é uma ABB para o conjunto $\{1, \ldots, n\}$ que minimiza o número

$$\sum_{i=1}^{n} h_i \, e_i,$$

onde h_i é o número de nós no caminho de i até a raiz da árvore.

Árvore de busca ótima

Considere um vetor $e[1\,..\,n]$ de inteiros com uma estimativa do número de acessos a cada elemento de $\{1, \ldots, n\}$.

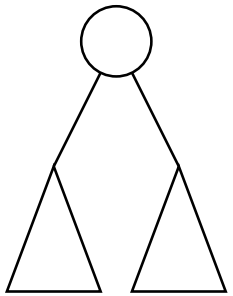
Uma ABB ótima com respeito ao vetor e é uma ABB para o conjunto $\{1, \ldots, n\}$ que minimiza o número

$$\sum_{i=1}^{n} h_i \, e_i,$$

onde h_i é o número de nós no caminho de i até a raiz da árvore.

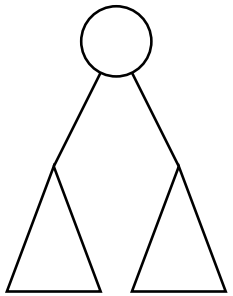
Problema (ABB Ótima): Dado $e[1\,..\,n]$, encontrar uma árvore de busca binária ótima com respeito a e.

Subestrutura ótima



Subárvores esquerda e direita de uma ABB ótima são ABBs ótimas.

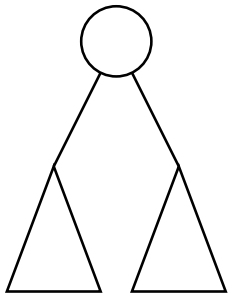
Subestrutura ótima



Subárvores esquerda e direita de uma ABB ótima são ABBs ótimas.

Resta determinar a raiz da ABB ótima.

Subestrutura ótima

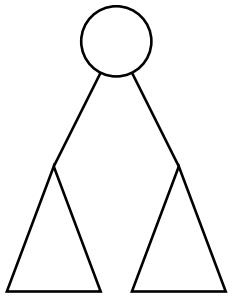


Subárvores esquerda e direita de uma ABB ótima são ABBs ótimas.

Resta determinar a raiz da ABB ótima.

$c[i, j]$: custo min de uma ABB para $e[i \,..\, j]$
$s[i, j]$: soma dos acessos em $e[i \,..\, j]$

Subestrutura ótima



Subárvores esquerda e direita de uma ABB ótima são ABBs ótimas.

Resta determinar a raiz da ABB ótima.

$c[i,j]$: custo min de uma ABB para $e[i\,..\,j]$
$s[i,j]$: soma dos acessos em $e[i\,..\,j]$

$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i > j \\ \min_{i \le k \le j}\{c[i,k-1] + c[k+1,j] + s[i,j]\} & \text{se } i \le j \end{cases}$$

Custo de uma ABB ótima

$c[i, j]$: custo min de uma ABB para $e[i \,..\, j]$

$s[j]$: soma dos acessos em $e[1 \,..\, j]$
$s[j] - s[i-1]$: soma dos acessos em $e[i \,..\, j]$

$$c[i, j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i > j \\ \min_{i \le k \le j} \{c[i, k-1] + c[k+1, j] + s[j] - s[i-1]\} & \text{se } i \le j \end{cases}$$

Custo de uma ABB ótima

$c[i,j]$: custo min de uma ABB para $e[i\,..\,j]$

$s[j]$: soma dos acessos em $e[1\,..\,j]$
$s[j] - s[i-1]$: soma dos acessos em $e[i\,..\,j]$

$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i > j \\ \min_{i \le k \le j}\{c[i,k-1] + c[k+1,j] + s[j] - s[i-1]\} & \text{se } i \le j \end{cases}$$

Para calcular s:

```
s[0] = 0
para i ← 1 até n faça
    s[i] ← s[i−1] + e[i]
```

Custo de uma ABB ótima

$c[i,j]$: custo min de uma ABB para $e[i\,..\,j]$

$s[j]$: soma dos acessos em $e[1\,..\,j]$
$s[j] - s[i-1]$: soma dos acessos em $e[i\,..\,j]$

$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i > j \\ \min_{i \le k \le j}\{c[i,k-1] + c[k+1,j] + s[j] - s[i-1]\} & \text{se } i \le j \end{cases}$$

Como preencher a matriz c?
Em que ordem?

Custo de uma ABB ótima

$c[i,j]$: custo min de uma ABB para $e[i\,..\,j]$

$s[j]$: soma dos acessos em $e[1\,..\,j]$
$s[j] - s[i-1]$: soma dos acessos em $e[i\,..\,j]$

$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i > j \\ \min_{i \le k \le j}\{c[i,k-1] + c[k+1,j] + s[j] - s[i-1]\} & \text{se } i \le j \end{cases}$$

Como preencher a matriz c?
Em que ordem?

Como no problema da parentização! Pelas diagonais!

Programação dinâmica

	0	1	2	3	4	5	6	7	j
1	0								
2		0	$\star$	$\star$	$\star$	??			
3			0			$\star$			
4				0		$\star$			
5					0	$\star$			
6						0			
7							0		
i								0	

Simulação

$e[1]=10 \quad e[2]=20 \quad e[3]=30 \quad e[4]=15 \quad e[5]=30$

Simulação

$e[1]=10$ $e[2]=20$ $e[3]=30$ $e[4]=15$ $e[5]=30$

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	??				
2		0				
3			0			
4				0		
5					0	
6						0

Simulação

$e[1]=10 \quad e[2]=20 \quad e[3]=30 \quad e[4]=15 \quad e[5]=30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10				
2		0				
3			0			
4				0		
5					0	
6						0

$$c[1, 1-1] + e[1] + c[1+1, 1] = 0+10+0 = 10$$

Simulação

$e[1]=10$ $e[2]=20$ $e[3]=30$ $e[4]=15$ $e[5]=30$

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10				
2		0	??			
3			0			
4				0		
5					0	
6						0

Simulação

$e[1]=10 \quad e[2]=20 \quad e[3]=30 \quad e[4]=15 \quad e[5]=30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10				
2		0	20			
3			0			
4				0		
5					0	
6						0

$$c[2, 2-1] + e[2] + c[2+1, 2] = 0+20+0 = 20$$

Simulação

$e[1]=10$ $e[2]=20$ $e[3]=30$ $e[4]=15$ $e[5]=30$

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10				
2		0	20			
3			0	??		
4				0		
5					0	
6						0

Simulação

$e[1]=10 \quad e[2]=20 \quad e[3]=30 \quad e[4]=15 \quad e[5]=30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10				
2		0	20			
3			0	30		
4				0		
5					0	
6						0

$$c[3, 3-1] + e[3] + c[3+1, 3] = 0+30+0 = 30$$

Simulação

$e[1]=10$ $e[2]=20$ $e[3]=30$ $e[4]=15$ $e[5]=30$

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10				
2		0	20			
3			0	30		
4				0	??	
5					0	
6						0

Simulação

$e[1]=10 \quad e[2]=20 \quad e[3]=30 \quad e[4]=15 \quad e[5]=30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10				
2		0	20			
3			0	30		
4				0	15	
5					0	
6						0

$$c[4, 4+1] + e[4] + c[4+1, 4] = 0+15+0 = 15$$

Simulação

$e[1]=10$ $e[2]=20$ $e[3]=30$ $e[4]=15$ $e[5]=30$

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10				
2		0	20			
3			0	30		
4				0	15	
5					0	??
6						0

Simulação

$e[1]=10 \quad e[2]=20 \quad e[3]=30 \quad e[4]=15 \quad e[5]=30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10				
2		0	20			
3			0	30		
4				0	15	
5					0	30
6						0

$$c[5, 5+1] + e[5] + c[5+1, 5] = 0+30+0 = 30$$

Simulação

$e[1]=10$ $e[2]=20$ $e[3]=30$ $e[4]=15$ $e[5]=30$

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	??			
2		0	20			
3			0	30		
4				0	15	
5					0	30
6						0

Simulação

$e[1]=10 \quad e[2]=20 \quad e[3]=30 \quad e[4]=15 \quad e[5]=30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10	50			
2		0	20			
3			0	30		
4				0	15	
5					0	30
6						0

$$c[1, 1-1] + (e[1] + e[2]) + c[1+1, 2] = 0+30+20 = 50$$

Simulação

$e[1]=10 \quad e[2]=20 \quad e[3]=30 \quad e[4]=15 \quad e[5]=30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40			
2		0	20			
3			0	30		
4				0	15	
5					0	30
6						0

$$c[1, 2-1] + (e[1] + e[2]) + c[2+1, 2] = 10+30+0 = 40$$

Simulação

$e[1]=10$ $e[2]=20$ $e[3]=30$ $e[4]=15$ $e[5]=30$

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40			
2		0	20	??		
3			0	30		
4				0	15	
5					0	30
6						0

Simulação

$e[1]=10 \quad e[2]=20 \quad e[3]=30 \quad e[4]=15 \quad e[5]=30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40			
2		0	20	80		
3			0	30		
4				0	15	
5					0	30
6						0

$$c[2, 2-1] + (e[2] + e[3]) + c[2+1, 3] = 0+50+30 = 80$$

Simulação

$e[1]=10 \quad e[2]=20 \quad e[3]=30 \quad e[4]=15 \quad e[5]=30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40			
2		0	20	70		
3			0	30		
4				0	15	
5					0	30
6						0

$$c[2, 3-1] + (e[2] + e[3]) + c[3+1, 3] = 20+50+0 = 70$$

Simulação

$e[1]=10$ $e[2]=20$ $e[3]=30$ $e[4]=15$ $e[5]=30$

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40			
2		0	20	70		
3			0	30	??	
4				0	15	
5					0	30
6						0

Simulação

$e[1]=10 \quad e[2]=20 \quad e[3]=30 \quad e[4]=15 \quad e[5]=30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40			
2		0	20	70		
3			0	30	60	
4				0	15	
5					0	30
6						0

$$c[3, 3-1] + (e[3] + e[4]) + c[3+1, 4] = 0+45+15 = 60$$

Simulação

$e[1]=10 \quad e[2]=20 \quad e[3]=30 \quad e[4]=15 \quad e[5]=30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40			
2		0	20	70		
3			0	30	60	
4				0	15	
5					0	30
6						0

$$c[3, 4-1] + (e[3] + e[4]) + c[4+1, 4] = 30+45+0 = 75$$

Simulação

$e[1]=10$ $e[2]=20$ $e[3]=30$ $e[4]=15$ $e[5]=30$

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40			
2		0	20	70		
3			0	30	60	
4				0	15	??
5					0	30
6						0

Simulação

$e[1]=10 \quad e[2]=20 \quad e[3]=30 \quad e[4]=15 \quad e[5]=30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40			
2		0	20	70		
3			0	30	60	
4				0	15	75
5					0	30
6						0

$$c[4, 4-1] + (e[4] + e[5]) + c[4+1, 5] = 0+45+30=75$$

Simulação

$e[1]=10 \quad e[2]=20 \quad e[3]=30 \quad e[4]=15 \quad e[5]=30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40			
2		0	20	70		
3			0	30	60	
4				0	15	60
5					0	30
6						0

$$c[4, 5-1] + (e[4] + e[5]) + c[5+1, 5] = 15+45+0 = 60$$

Simulação

$e[1]=10$ $e[2]=20$ $e[3]=30$ $e[4]=15$ $e[5]=30$

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40	??		
2		0	20	70		
3			0	30	60	
4				0	15	60
5					0	30
6						0

Simulação

$e[1]=10 \quad e[2]=20 \quad e[3]=30 \quad e[4]=15 \quad e[5]=30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40	130		
2		0	20	70		
3			0	30	60	
4				0	15	60
5					0	30
6						0

$$c[1, 1-1] + (e[1] + e[2] + e[3]) + c[1+1, 3] = 0+60+70 = 130$$

Simulação

$e[1]=10 \quad e[2]=20 \quad e[3]=30 \quad e[4]=15 \quad e[5]=30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40	100		
2		0	20	70		
3			0	30	60	
4				0	15	60
5					0	30
6						0

$$c[1, 2-1] + (e[1]) + e[2] + e[3]) + c[2+1, 3] = 10+60+30 = 100$$

Simulação

$e[1]=10 \quad e[2]=20 \quad e[3]=30 \quad e[4]=15 \quad e[5]=30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40	100		
2		0	20	70		
3			0	30	60	
4				0	15	60
5					0	30
6						0

$$c[1, 3-1] + (e[1] + e[2] + e[3]) + c[3+1, 3] = 40+60+0 = 100$$

Simulação

$e[1]=10$ $e[2]=20$ $e[3]=30$ $e[4]=15$ $e[5]=30$

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40	100		
2		0	20	70	??	
3			0	30	60	
4				0	15	60
5					0	30
6						0

Simulação

$e[1]=10 \quad e[2]=20 \quad e[3]=30 \quad e[4]=15 \quad e[5]=30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40	100		
2		0	20	70	125	
3			0	30	60	
4				0	15	60
5					0	30
6						0

$$c[2, 2-1] + (e[2] + e[3] + e[4]) + c[2+1, 4] = 0+65+60 = 125$$

Simulação

$e[1]=10 \quad e[2]=20 \quad e[3]=30 \quad e[4]=15 \quad e[5]=30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40	100		
2		0	20	70	100	
3			0	30	60	
4				0	15	60
5					0	30
6						0

$$c[2, 3-1] + (e[2] + e[3] + e[4]) + c[3+1, 4] = 20+65+15 = 100$$

Simulação

$e[1]=10 \quad e[2]=20 \quad e[3]=30 \quad e[4]=15 \quad e[5]=30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40	100		
2		0	20	70	100	
3			0	30	60	
4				0	15	60
5					0	30
6						0

$$c[2, 4-1] + (e[2] + e[3] + e[4]) + c[4+1, 4] = 70+65+0 = 135$$

Simulação

$e[1]=10$ $e[2]=20$ $e[3]=30$ $e[4]=15$ $e[5]=30$

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40	100		
2		0	20	70	100	
3			0	30	60	??
4				0	15	60
5					0	30
6						0

Simulação

$e[1]=10 \quad e[2]=20 \quad e[3]=30 \quad e[4]=15 \quad e[5]=30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40	100		
2		0	20	70	100	
3			0	30	60	135
4				0	15	60
5					0	30
6						0

$$c[3, 3-1] + (e[3] + e[4] + e[5]) + c[3+1, 5] = 0+75+60 = 135$$

Simulação

$e[1]=10 \quad e[2]=20 \quad e[3]=30 \quad e[4]=15 \quad e[5]=30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40	100		
2		0	20	70	100	
3			0	30	60	135
4				0	15	60
5					0	30
6						0

$$c[3, 4-1] + (e[3] + e[4] + e[5]) + c[4+1, 5] = 30+75+30 = 135$$

Simulação

$e[1]=10 \quad e[2]=20 \quad e[3]=30 \quad e[4]=15 \quad e[5]=30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40	100		
2		0	20	70	100	
3			0	30	60	135
4				0	15	60
5					0	30
6						0

$$c[3, 5-1] + (e[3] + e[4] + e[5]) + c[5+1, 5] = 60+75+0 = 135$$

Simulação

$e[1]=10$ $e[2]=20$ $e[3]=30$ $e[4]=15$ $e[5]=30$

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40	100		
2		0	20	70	100	
3			0	30	60	135
4				0	15	60
5					0	30
6						0

Exercício: Preencha o que falta!

Árvore de busca ótima

```
ABB-Ótima (e, n)
s[0] = 0
para i ← 1 até n faça
    s[i] ← s[i−1] + e[i]
para i ← 1 até n+1 faça
    c[i, i−1] ← 0
para ℓ ← 1 até n faça
    para i ← 1 até n−ℓ+1 faça
        j ← i+ℓ−1
        c[i, j] ← c[i+1, j]
        para k ← i+1 até j faça
            se c[i, k−1] + c[k+1, j] < c[i, j]
            então c[i, j] ← c[i, k−1] + c[k+1, j]
        c[i, j] ← c[i, j] + s[j] − s[i−1]
devolva c[1, n]
```

Exercício

Como fazer para obter uma ABB ótima
e não apenas o seu custo?

Complete o serviço!