

# Análise de Algoritmos

**Parte destes slides são adaptações de slides  
do Prof. Paulo Feofiloff e do Prof. José Coelho de Pina.**

# Mais programação dinâmica

## CLRS 15.5

- = “recursão-com-tabela”
- = transformação inteligente de recursão em iteração

# Buscas em um conjunto conhecido

Considere um inteiro  $n$  e um vetor  $v[1..n]$  de inteiros.

**Problema:** Dado  $v[1..n]$  e uma sequência de  $k$  inteiros, decidir se cada inteiro está ou não em  $v$ .

# Buscas em um conjunto conhecido

Considere um inteiro  $n$  e um vetor  $v[1..n]$  de inteiros.

**Problema:** Dado  $v[1..n]$  e uma sequência de  $k$  inteiros, decidir se cada inteiro está ou não em  $v$ .

Se  $k$  é grande, como devemos armazenar o  $v$ ?

# Buscas em um conjunto conhecido

Considere um inteiro  $n$  e um vetor  $v[1..n]$  de inteiros.

**Problema:** Dado  $v[1..n]$  e uma sequência de  $k$  inteiros, decidir se cada inteiro está ou não em  $v$ .

Se  $k$  é grande, como devemos armazenar o  $v$ ?

E se  $v$  armazena um conjunto bem conhecido, como por exemplo as palavras de uma língua?  
(A ser usado por um tradutor, ou um speller.)

# Buscas em um conjunto conhecido

Considere um inteiro  $n$  e um vetor  $v[1..n]$  de inteiros.

**Problema:** Dado  $v[1..n]$  e uma sequência de  $k$  inteiros, decidir se cada inteiro está ou não em  $v$ .

Se  $k$  é grande, como devemos armazenar o  $v$ ?

E se  $v$  armazena um conjunto bem conhecido, como por exemplo as palavras de uma língua?  
(A ser usado por um tradutor, ou um speller.)

Podemos ordenar  $v$  e aplicar busca binária.

Podemos fazer algo melhor?

# Buscas em conjunto conhecido

Dadas **estimativas** do número de acessos a cada elemento de  $v[1..n]$ , qual é a melhor estrutura de dados para  $v$ ?

# Buscas em conjunto conhecido

Dadas **estimativas** do número de acessos a cada elemento de  $v[1..n]$ , qual é a melhor estrutura de dados para  $v$ ?

Árvore de busca binária (ABB)?

# Buscas em conjunto conhecido

Dadas **estimativas** do número de acessos a cada elemento de  $v[1..n]$ , qual é a melhor estrutura de dados para  $v$ ?

Árvore de busca binária (ABB)?

**Exemplo:**  $n = 3$  e  $e_1 = 10$ ,  $e_2 = 20$ ,  $e_3 = 40$ .

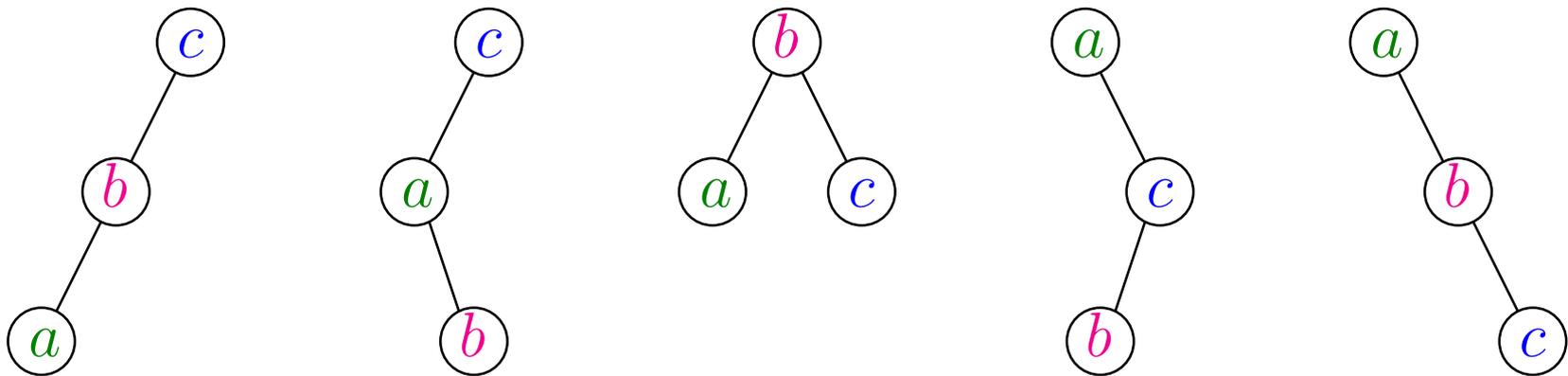
# Buscas em conjunto conhecido

Dadas **estimativas** do número de acessos a cada elemento de  $v[1..n]$ , qual é a melhor estrutura de dados para  $v$ ?

Árvore de busca binária (ABB)?

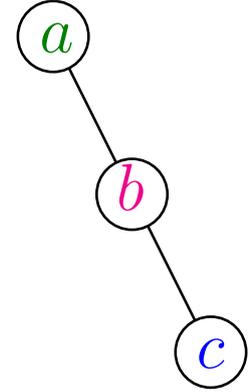
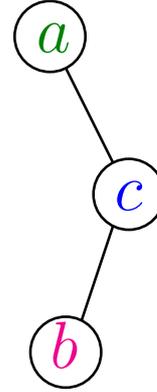
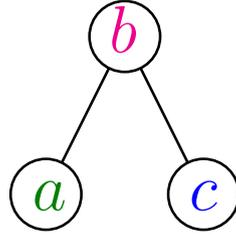
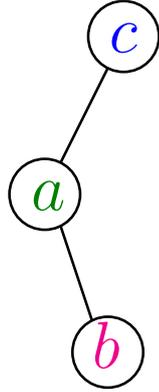
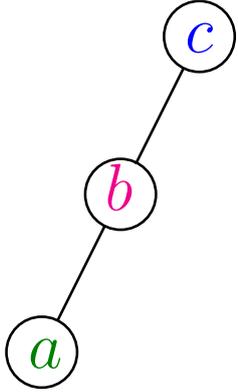
**Exemplo:**  $n = 3$  e  $e_1 = 10$ ,  $e_2 = 20$ ,  $e_3 = 40$ .

Qual a melhor das **ABBs**?



# Exemplo

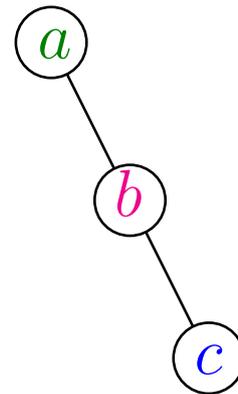
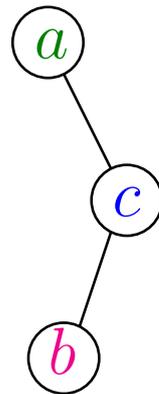
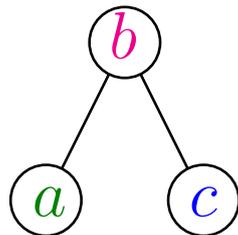
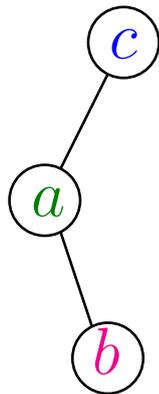
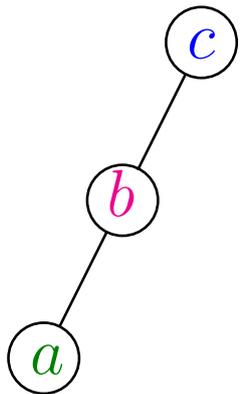
Exemplo:  $n = 3$  e  $e_1 = 10$ ,  $e_2 = 20$ ,  $e_3 = 40$ .



Qual a melhor das **ABBs**?

# Exemplo

Exemplo:  $n = 3$  e  $e_1 = 10$ ,  $e_2 = 20$ ,  $e_3 = 40$ .



Número esperado de comparações:

●  $10 \cdot 3 + 20 \cdot 2 + 40 \cdot 1 = 110$

●  $10 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 40 \cdot 1 = 120$

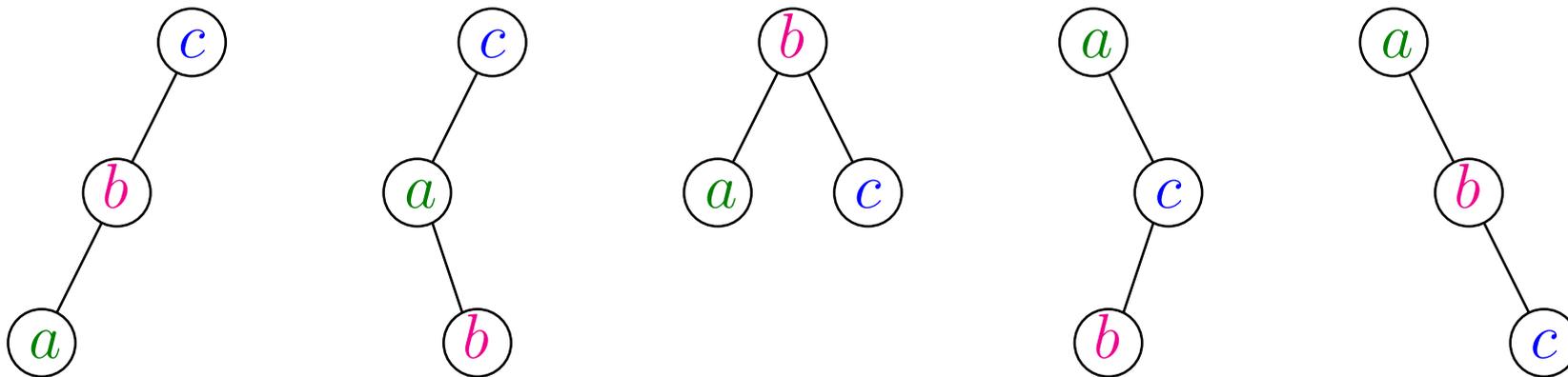
●  $10 \cdot 2 + 20 \cdot 1 + 40 \cdot 2 = 120$

●  $10 \cdot 1 + 20 \cdot 3 + 40 \cdot 2 = 150$

●  $10 \cdot 1 + 20 \cdot 2 + 40 \cdot 3 = 170$

# Exemplo

Exemplo:  $n = 3$  e  $e_1 = 10$ ,  $e_2 = 20$ ,  $e_3 = 40$ .



Número esperado de comparações:

●  $10 \cdot 3 + 20 \cdot 2 + 40 \cdot 1 = 110$  ← ABB ótima

●  $10 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 40 \cdot 1 = 120$

●  $10 \cdot 2 + 20 \cdot 1 + 40 \cdot 2 = 120$

●  $10 \cdot 1 + 20 \cdot 3 + 40 \cdot 2 = 150$

●  $10 \cdot 1 + 20 \cdot 2 + 40 \cdot 3 = 170$

# Árvore de busca ótima

Considere um vetor  $e[1..n]$  de inteiros com uma estimativa do **número de acessos** a cada elemento de  $\{1, \dots, n\}$ .

# Árvore de busca ótima

Considere um vetor  $e[1..n]$  de inteiros com uma estimativa do **número de acessos** a cada elemento de  $\{1, \dots, n\}$ .

Uma **ABB ótima** com respeito ao vetor  $e$  é uma ABB para o conjunto  $\{1, \dots, n\}$  que minimiza o número

$$\sum_{i=1}^n h_i e_i,$$

onde  $h_i$  é o número de nós no caminho de  $i$  até a raiz da árvore.

# Árvore de busca ótima

Considere um vetor  $e[1..n]$  de inteiros com uma estimativa do **número de acessos** a cada elemento de  $\{1, \dots, n\}$ .

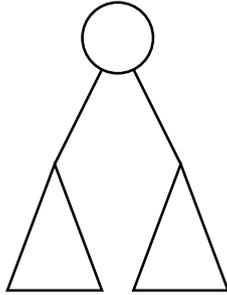
Uma **ABB ótima** com respeito ao vetor  $e$  é uma ABB para o conjunto  $\{1, \dots, n\}$  que minimiza o número

$$\sum_{i=1}^n h_i e_i,$$

onde  $h_i$  é o número de nós no caminho de  $i$  até a raiz da árvore.

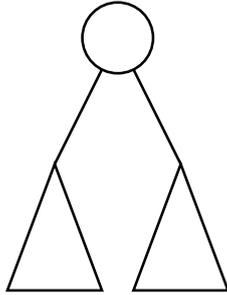
**Problema (ABB Ótima):** Dado  $e[1..n]$ , encontrar uma árvore de busca binária ótima com respeito a  $e$ .

# Subestrutura ótima



Subárvores esquerda e direita de uma ABB ótima são ABBs ótimas.

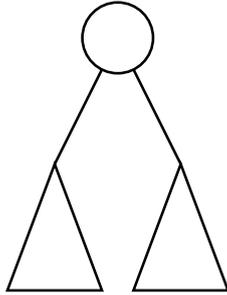
# Subestrutura ótima



Subárvores esquerda e direita de uma ABB ótima são ABBs ótimas.

Resta determinar a **raiz** da ABB ótima.

# Subestrutura ótima



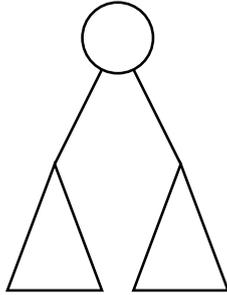
Subárvores esquerda e direita de uma ABB ótima são ABBs ótimas.

Resta determinar a **raiz** da ABB ótima.

$c[i, j]$ : custo min de uma ABB para  $e[i..j]$

$s[i, j]$ : soma dos acessos em  $e[i..j]$

# Subestrutura ótima



Subárvores esquerda e direita de uma ABB ótima são ABBs ótimas.

Resta determinar a **raiz** da ABB ótima.

$c[i, j]$ : custo min de uma ABB para  $e[i..j]$

$s[i, j]$ : soma dos acessos em  $e[i..j]$

$$c[i, j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i > j \\ \min_{i \leq k \leq j} \{c[i, k-1] + c[k+1, j] + s[i, j]\} & \text{se } i \leq j \end{cases}$$

# Custo de uma ABB ótima

$c[i, j]$ : custo min de uma ABB para  $e[i..j]$

$s[j]$ : soma dos acessos em  $e[1..j]$

$s[j] - s[i-1]$ : soma dos acessos em  $e[i..j]$

$$c[i, j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i > j \\ \min_{i \leq k \leq j} \{c[i, k-1] + c[k+1, j] + s[j] - s[i-1]\} & \text{se } i \leq j \end{cases}$$

# Custo de uma ABB ótima

$c[i, j]$ : custo min de uma ABB para  $e[i..j]$

$s[j]$ : soma dos acessos em  $e[1..j]$

$s[j] - s[i-1]$ : soma dos acessos em  $e[i..j]$

$$c[i, j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i > j \\ \min_{i \leq k \leq j} \{c[i, k-1] + c[k+1, j] + s[j] - s[i-1]\} & \text{se } i \leq j \end{cases}$$

Para calcular  $s$ :

- 1  $s[0] = 0$
- 2 **para**  $i \leftarrow 1$  **até**  $n$  **faça**
- 3  $s[i] \leftarrow s[i-1] + e[i]$

# Custo de uma ABB ótima

$c[i, j]$ : custo min de uma ABB para  $e[i..j]$

$s[j]$ : soma dos acessos em  $e[1..j]$

$s[j] - s[i-1]$ : soma dos acessos em  $e[i..j]$

$$c[i, j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i > j \\ \min_{i \leq k \leq j} \{c[i, k-1] + c[k+1, j] + s[j] - s[i-1]\} & \text{se } i \leq j \end{cases}$$

Como preencher a matriz  $c$ ?  
Em que ordem?

# Custo de uma ABB ótima

$c[i, j]$ : custo min de uma ABB para  $e[i..j]$

$s[j]$ : soma dos acessos em  $e[1..j]$

$s[j] - s[i-1]$ : soma dos acessos em  $e[i..j]$

$$c[i, j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i > j \\ \min_{i \leq k \leq j} \{c[i, k-1] + c[k+1, j] + s[j] - s[i-1]\} & \text{se } i \leq j \end{cases}$$

Como preencher a matriz  $c$ ?

Em que ordem?

Como no problema da parentização! Pelas diagonais!

# Programação dinâmica

	0	1	2	3	4	5	6	7	$j$
1	0								
2		0	*	*	*	??			
3			0			*			
4				0		*			
5					0	*			
6						0			
7							0		
$i$								0	

# Simulação

$e[1]=10$     $e[2]=20$     $e[3]=30$     $e[4]=15$     $e[5]=30$

# Simulação

$e[1]=10$     $e[2]=20$     $e[3]=30$     $e[4]=15$     $e[5]=30$

0

1

2

3

4

5

*j*

1

0

??

2

0

3

0

4

0

5

0

6

0

*i*

1	0	??				
2		0				
3			0			
4				0		
5					0	
6						0

# Simulação

$e[1]=10$     $e[2]=20$     $e[3]=30$     $e[4]=15$     $e[5]=30$

	0	1	2	3	4	5	<i>j</i>
1	0	10					
2		0					
3			0				
4				0			
5					0		
6						0	
<i>i</i>							

$$c[1, 1-1] + e[1] + c[1+1, 1] = 0 + 10 + 0 = 10$$

# Simulação

$e[1]=10$     $e[2]=20$     $e[3]=30$     $e[4]=15$     $e[5]=30$

0   1   2   3   4   5    $j$

1	0	10				
2	0	??				
3		0				
4			0			
5				0		
6						0
$i$						

# Simulação

$e[1]=10$     $e[2]=20$     $e[3]=30$     $e[4]=15$     $e[5]=30$   
0   1   2   3   4   5    $j$

1	0	10				
2		0	20			
3			0			
4				0		
5					0	
6						0
$i$						

$$c[2, 2-1] + e[2] + c[2+1, 2] = 0 + 20 + 0 = 20$$

# Simulação

$e[1]=10$     $e[2]=20$     $e[3]=30$     $e[4]=15$     $e[5]=30$   
0            1            2            3            4            5             $j$

1	0	10				
2		0	20			
3			0	??		
4				0		
5					0	
6						0
$i$						

# Simulação

$e[1]=10$     $e[2]=20$     $e[3]=30$     $e[4]=15$     $e[5]=30$   
0            1            2            3            4            5             $j$

1	0	10				
2		0	20			
3			0	30		
4				0		
5					0	
6						0

$i$

$$c[3, 3-1] + e[3] + c[3+1, 3] = 0 + 30 + 0 = 30$$

# Simulação

$e[1]=10$     $e[2]=20$     $e[3]=30$     $e[4]=15$     $e[5]=30$

0   1   2   3   4   5    $j$

1	0	10				
2		0	20			
3			0	30		
4				0	??	
5					0	
6						0

$i$

# Simulação

$e[1]=10$     $e[2]=20$     $e[3]=30$     $e[4]=15$     $e[5]=30$   
0            1            2            3            4            5             $j$

1	0	10				
2		0	20			
3			0	30		
4				0	15	
5					0	
6						0
$i$						

$$c[4, 4+1] + e[4] + c[4+1, 4] = 0 + 15 + 0 = 15$$

# Simulação

$e[1]=10$     $e[2]=20$     $e[3]=30$     $e[4]=15$     $e[5]=30$   
0            1            2            3            4            5      $j$

1	0	10				
2		0	20			
3			0	30		
4				0	15	
5					0	??
6						0
$i$						

# Simulação

$e[1]=10$     $e[2]=20$     $e[3]=30$     $e[4]=15$     $e[5]=30$   
 0            1            2            3            4            5      $j$

1	0	10				
2		0	20			
3			0	30		
4				0	15	
5					0	30
6						0

$i$

$$c[5, 5+1] + e[5] + c[5+1, 5] = 0 + 30 + 0 = 30$$

# Simulação

$e[1]=10$     $e[2]=20$     $e[3]=30$     $e[4]=15$     $e[5]=30$   
0            1            2            3            4            5             $j$

1	0	10	??			
2		0	20			
3			0	30		
4				0	15	
5					0	30
6						0
$i$						

# Simulação

$e[1]=10$     $e[2]=20$     $e[3]=30$     $e[4]=15$     $e[5]=30$   
 0            1            2            3            4            5             $j$

1	0	10	50			
2		0	20			
3			0	30		
4				0	15	
5					0	30
6						0
$i$						

$$c[1, 1-1] + (e[1] + e[2]) + c[1+1, 2] = 0 + 30 + 20 = 50$$

# Simulação

$e[1]=10$     $e[2]=20$     $e[3]=30$     $e[4]=15$     $e[5]=30$   
 0            1            2            3            4            5             $j$

1	0	10	40			
2		0	20			
3			0	30		
4				0	15	
5					0	30
6						0
$i$						

$$c[1, 2-1] + (e[1] + e[2]) + c[2+1, 2] = 10 + 30 + 0 = 40$$

# Simulação

$e[1]=10$     $e[2]=20$     $e[3]=30$     $e[4]=15$     $e[5]=30$   
0            1            2            3            4            5             $j$

1	0	10	40			
2		0	20	??		
3			0	30		
4				0	15	
5					0	30
6						0
$i$						

# Simulação

$e[1]=10$     $e[2]=20$     $e[3]=30$     $e[4]=15$     $e[5]=30$   
 0            1            2            3            4            5         $j$

1	0	10	40			
2		0	20	80		
3			0	30		
4				0	15	
5					0	30
6						0
$i$						

$$c[2, 2-1] + (e[2] + e[3]) + c[2+1, 3] = 0 + 50 + 30 = 80$$

# Simulação

$e[1]=10$     $e[2]=20$     $e[3]=30$     $e[4]=15$     $e[5]=30$   
 0            1            2            3            4            5             $j$

1	0	10	40			
2		0	20	70		
3			0	30		
4				0	15	
5					0	30
6						0
$i$						

$$c[2, 3-1] + (e[2] + e[3]) + c[3+1, 3] = 20 + 50 + 0 = 70$$

# Simulação

$e[1]=10$     $e[2]=20$     $e[3]=30$     $e[4]=15$     $e[5]=30$

0   1   2   3   4   5    $j$

1	0	10	40			
2		0	20	70		
3			0	30	??	
4				0	15	
5					0	30
6						0

$i$

# Simulação

$e[1]=10$     $e[2]=20$     $e[3]=30$     $e[4]=15$     $e[5]=30$   
 0            1            2            3            4            5             $j$

1	0	10	40			
2		0	20	70		
3			0	30	60	
4				0	15	
5					0	30
6						0
$i$						

$$c[3, 3-1] + (e[3] + e[4]) + c[3+1, 4] = 0 + 45 + 15 = 60$$

# Simulação

$e[1]=10$     $e[2]=20$     $e[3]=30$     $e[4]=15$     $e[5]=30$   
 0            1            2            3            4            5             $j$

1	0	10	40			
2		0	20	70		
3			0	30	60	
4				0	15	
5					0	30
6						0
$i$						

$$c[3, 4-1] + (e[3] + e[4]) + c[4+1, 4] = 30 + 45 + 0 = 75$$

# Simulação

$e[1]=10$     $e[2]=20$     $e[3]=30$     $e[4]=15$     $e[5]=30$   
0            1            2            3            4            5             $j$

1	0	10	40			
2		0	20	70		
3			0	30	60	
4				0	15	??
5					0	30
6						0
$i$						

# Simulação

$e[1]=10$     $e[2]=20$     $e[3]=30$     $e[4]=15$     $e[5]=30$   
 0            1            2            3            4            5     *j*

1	0	10	40			
2		0	20	70		
3			0	30	60	
4				0	15	75
5					0	30
6						0

*i*

$$c[4, 4-1] + (e[4] + e[5]) + c[4+1, 5] = 0 + 45 + 30 = 75$$

# Simulação

$e[1]=10$     $e[2]=20$     $e[3]=30$     $e[4]=15$     $e[5]=30$   
 0            1            2            3            4            5      $j$

1	0	10	40			
2		0	20	70		
3			0	30	60	
4				0	15	60
5					0	30
6						0

$i$

$$c[4, 5-1] + (e[4] + e[5]) + c[5+1, 5] = 15 + 45 + 0 = 60$$

# Simulação

$e[1]=10$     $e[2]=20$     $e[3]=30$     $e[4]=15$     $e[5]=30$   
0            1            2            3            4            5             $j$

1	0	10	40	??		
2		0	20	70		
3			0	30	60	
4				0	15	60
5					0	30
6						0
$i$						

# Simulação

$e[1]=10$     $e[2]=20$     $e[3]=30$     $e[4]=15$     $e[5]=30$   
 0            1            2            3            4            5             $j$

1	0	10	40	130		
2		0	20	70		
3			0	30	60	
4				0	15	60
5					0	30
6						0
$i$						

$$c[1, 1-1] + (e[1] + e[2] + e[3]) + c[1+1, 3] = 0 + 60 + 70 = 130$$

# Simulação

$e[1]=10$     $e[2]=20$     $e[3]=30$     $e[4]=15$     $e[5]=30$   
 0            1            2            3            4            5             $j$

1	0	10	40	100		
2		0	20	70		
3			0	30	60	
4				0	15	60
5					0	30
6						0
$i$						

$$c[1, 2-1] + (e[1]) + e[2] + e[3]) + c[2+1, 3] = 10 + 60 + 30 = 100$$

# Simulação

$e[1]=10$     $e[2]=20$     $e[3]=30$     $e[4]=15$     $e[5]=30$   
 0            1            2            3            4            5             $j$

1	0	10	40	100		
2		0	20	70		
3			0	30	60	
4				0	15	60
5					0	30
6						0

$i$

$$c[1, 3-1] + (e[1] + e[2] + e[3]) + c[3+1, 3] = 40 + 60 + 0 = 100$$

# Simulação

$e[1]=10$     $e[2]=20$     $e[3]=30$     $e[4]=15$     $e[5]=30$

0   1   2   3   4   5    $j$

1	0	10	40	100		
2		0	20	70	??	
3			0	30	60	
4				0	15	60
5					0	30
6						0

$i$

# Simulação

$e[1]=10$     $e[2]=20$     $e[3]=30$     $e[4]=15$     $e[5]=30$   
 0            1            2            3            4            5             $j$

1	0	10	40	100		
2		0	20	70	125	
3			0	30	60	
4				0	15	60
5					0	30
6						0
$i$						

$$c[2, 2-1] + (e[2] + e[3] + e[4]) + c[2+1, 4] = 0 + 65 + 60 = 125$$

# Simulação

$e[1]=10$     $e[2]=20$     $e[3]=30$     $e[4]=15$     $e[5]=30$   
 0            1            2            3            4            5             $j$

1	0	10	40	100		
<b>2</b>		0	<b>20</b>	70	<b>100</b>	
3			0	30	60	
4				0	<b>15</b>	60
5					0	30
6						0
$i$						

$$c[2, 3-1] + (e[2] + e[3] + e[4]) + c[3+1, 4] = 20 + 65 + 15 = 100$$

# Simulação

$e[1]=10$     $e[2]=20$     $e[3]=30$     $e[4]=15$     $e[5]=30$   
 0            1            2            3            4            5             $j$

1	0	10	40	100		
<b>2</b>		0	20	<b>70</b>	<b>100</b>	
3			0	30	60	
4				0	15	60
5					<b>0</b>	30
6						0
$i$						

$$c[2, 4-1] + (e[2] + e[3] + e[4]) + c[4+1, 4] = 70 + 65 + 0 = 135$$

# Simulação

$e[1]=10$     $e[2]=20$     $e[3]=30$     $e[4]=15$     $e[5]=30$   
0            1            2            3            4            5     *j*

1	0	10	40	100		
2		0	20	70	100	
<i>3</i>			0	30	60	??
4				0	15	60
5					0	30
6						0
<i>i</i>						

# Simulação

$e[1]=10$     $e[2]=20$     $e[3]=30$     $e[4]=15$     $e[5]=30$   
 0            1            2            3            4            5     *j*

1	0	10	40	100		
2		0	20	70	100	
<b>3</b>			<b>0</b>	30	60	<b>135</b>
4				0	15	<b>60</b>
5					0	30
6						0
<i>i</i>						

$$c[3, 3-1] + (e[3] + e[4] + e[5]) + c[3+1, 5] = 0 + 75 + 60 = 135$$

# Simulação

$e[1]=10$     $e[2]=20$     $e[3]=30$     $e[4]=15$     $e[5]=30$   
 0            1            2            3            4            5     *j*

1	0	10	40	100		
2		0	20	70	100	
<b>3</b>			0	<b>30</b>	60	<b>135</b>
4				0	15	60
5					0	<b>30</b>
6						0
<i>i</i>						

$$c[3, 4-1] + (e[3] + e[4] + e[5]) + c[4+1, 5] = 30 + 75 + 30 = 135$$

# Simulação

$e[1]=10$     $e[2]=20$     $e[3]=30$     $e[4]=15$     $e[5]=30$   
 0            1            2            3            4            5     *j*

1	0	10	40	100		
2		0	20	70	100	
<b>3</b>			0	30	<b>60</b>	<b>135</b>
4				0	15	60
5					0	30
6						0
<i>i</i>						

$$c[3, 5-1] + (e[3] + e[4] + e[5]) + c[5+1, 5] = 60 + 75 + 0 = 135$$

# Simulação

$e[1]=10$     $e[2]=20$     $e[3]=30$     $e[4]=15$     $e[5]=30$   
0            1            2            3            4            5             $j$

1	0	10	40	100		
2		0	20	70	100	
3			0	30	60	135
4				0	15	60
5					0	30
6						0

$i$

**Exercício:** Preencha o que falta!

# Árvore de busca ótima

ABB-ÓTIMA ( $e, n$ )

```
1   $s[0] = 0$ 
2  para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça
3       $s[i] \leftarrow s[i-1] + e[i]$ 
4  para  $i \leftarrow 1$  até  $n+1$  faça
5       $c[i, i-1] \leftarrow 0$ 
6  para  $\ell \leftarrow 1$  até  $n$  faça
7      para  $i \leftarrow 1$  até  $n-\ell+1$  faça
8           $j \leftarrow i+\ell-1$ 
9           $c[i, j] \leftarrow c[i+1, j]$ 
10         para  $k \leftarrow i+1$  até  $j$  faça
11             se  $c[i, k-1] + c[k+1, j] < c[i, j]$ 
12                 então  $c[i, j] \leftarrow c[i, k-1] + c[k+1, j]$ 
13              $c[i, j] \leftarrow c[i, j] + s[j] - s[i-1]$ 
14 devolva  $c[1, n]$ 
```

# Árvore de busca ótima

**Exercício:** Como fazer para obter uma ABB ótima e não apenas o seu custo? Complete o serviço!

Comentários sobre a prova...