

Análise de Algoritmos

**Parte destes slides são adaptações de slides
do Prof. Paulo Feofiloff e do Prof. José Coelho de Pina.**

Mais programação dinâmica

CLRS 15.4

- = “recursão-com-tabela”
- = transformação inteligente de recursão em iteração

Subsequências

$\langle z_1, \dots, z_k \rangle$ é **subsequência** de $\langle x_1, \dots, x_m \rangle$
se existem índices $i_1 < \dots < i_k$ tais que

$$z_1 = x_{i_1} \quad \dots \quad z_k = x_{i_k}$$

EXEMPLOS:

$\langle 5, 9, 2, 7 \rangle$ é subsequência de $\langle 9, 5, 6, 9, 6, 2, 7, 3 \rangle$

$\langle A, A, D, A, A \rangle$ é subsequência de
 $\langle A, B, R, A, C, A, D, A, B, R, A \rangle$

A			A			D	A			A
A	B	R	A	C	A	D	A	B	R	A

Exercício

Problema: Decidir se $Z[1..m]$ é subsequência de $X[1..n]$

Exercício

Problema: Decidir se $Z[1..m]$ é subsequência de $X[1..n]$

SUB-SEQ (Z, m, X, n)

```
1   $i \leftarrow m$ 
2   $j \leftarrow n$ 
3  enquanto  $i \geq 1$  e  $j \geq 1$  faça
4      se  $Z[i] = X[j]$ 
5          então  $i \leftarrow i - 1$ 
6       $j \leftarrow j - 1$ 
7  se  $i \geq 1$ 
8      então devolva “não é subsequência”
9  senão devolva “é subsequência”
```

Exercício

Problema: Decidir se $Z[1..m]$ é subsequência de $X[1..n]$

SUB-SEQ (Z, m, X, n)

```
1   $i \leftarrow m$ 
2   $j \leftarrow n$ 
3  enquanto  $i \geq 1$  e  $j \geq 1$  faça
4      se  $Z[i] = X[j]$ 
5          então  $i \leftarrow i - 1$ 
6       $j \leftarrow j - 1$ 
7  se  $i \geq 1$ 
8      então devolva “não é subsequência”
9  senão devolva “é subsequência”
```

Consumo de tempo é $O(n)$ e $\Omega(\min\{m, n\})$.

Exercício

Problema: Decidir se $Z[1..m]$ é subsequência de $X[1..n]$

SUB-SEQ (Z, m, X, n)

```
1   $i \leftarrow m$ 
2   $j \leftarrow n$ 
3  enquanto  $i \geq 1$  e  $j \geq 1$  faça
4      se  $Z[i] = X[j]$ 
5          então  $i \leftarrow i - 1$ 
6       $j \leftarrow j - 1$ 
7  se  $i \geq 1$ 
8      então devolva “não é subsequência”
9  senão devolva “é subsequência”
```

Invariantes:

(i0) $Z[i+1..m]$ é subsequência de $X[j+1..n]$

(i1) $Z[i..m]$ **não** é subsequência de $X[j+1..n]$

Subsequência comum máxima

Z é subseq comum de X e Y

se Z é subsequência de X e de Y

ssco = subseq comum

Subsequência comum máxima

Z é subseq comum de X e Y

se Z é subsequência de X e de Y

SSCO = subseq comum

Exemplos: $X = A \text{ B C B D A B}$

$Y = B \text{ D C A B A}$

SSCO = $B \text{ C A}$

Subsequência comum máxima

Z é subseq comum de X e Y

se Z é subsequência de X e de Y

ssco = subseq comum

Exemplos: $X = A B C B D A B$

$Y = B D C A B A$

ssco = B C A

Outra ssco = B D A B

Problema

Problema: Encontrar uma **ssco máxima** de X e Y .

Exemplos: $X = A \text{ } B \text{ } C \text{ } B \text{ } D \text{ } A \text{ } B$

$Y = B \text{ } D \text{ } C \text{ } A \text{ } B \text{ } A$

$ssco = B \text{ } C \text{ } A$

$ssco \text{ maximal} = A \text{ } B \text{ } A$

$ssco \text{ máxima} = B \text{ } C \text{ } A \text{ } B$

Outra $ssco \text{ máxima} = B \text{ } D \text{ } A \text{ } B$

LCS = Longest Common Subsequence

diff

> more abracadabra

A

B

R

A

C

A

D

A

B

R

A

> more yabbadabbadoo

Y

A

B

B

A

D

A

B

B

A

D

D

O

diff -u abracadabra yabbadabbadoo

+Y

A

B

-R

-A

-C

+B

A

D

A

B

-R

+B

A

+D

+O

+O

Subestrutura ótima

Suponha que $Z[1 \dots k]$ é **ssco máxima** de $X[1 \dots m]$ e $Y[1 \dots n]$.

- Se $X[m] = Y[n]$,
então $Z[k] = X[m] = Y[n]$ e
 $Z[1 \dots k-1]$ é ssco máxima de $X[1 \dots m-1]$ e $Y[1 \dots n-1]$.

Subestrutura ótima

Suponha que $Z[1 \dots k]$ é **ssco máxima** de $X[1 \dots m]$ e $Y[1 \dots n]$.

- Se $X[m] = Y[n]$,
então $Z[k] = X[m] = Y[n]$ e
 $Z[1 \dots k-1]$ é ssco máxima de $X[1 \dots m-1]$ e $Y[1 \dots n-1]$.
- Se $X[m] \neq Y[n]$,
então $Z[k] \neq X[m]$ implica que
 $Z[1 \dots k]$ é ssco máxima de $X[1 \dots m-1]$ e $Y[1 \dots n]$.

Subestrutura ótima

Suponha que $Z[1 \dots k]$ é **ssco máxima** de $X[1 \dots m]$ e $Y[1 \dots n]$.

- Se $X[m] = Y[n]$,
então $Z[k] = X[m] = Y[n]$ e
 $Z[1 \dots k-1]$ é ssco máxima de $X[1 \dots m-1]$ e $Y[1 \dots n-1]$.
- Se $X[m] \neq Y[n]$,
então $Z[k] \neq X[m]$ implica que
 $Z[1 \dots k]$ é ssco máxima de $X[1 \dots m-1]$ e $Y[1 \dots n]$.
- Se $X[m] \neq Y[n]$,
então $Z[k] \neq Y[n]$ implica que
 $Z[1 \dots k]$ é ssco máxima de $X[1 \dots m]$ e $Y[1 \dots n-1]$.

Simplificação

Problema: encontrar o comprimento de uma ssco máxima.

Simplificação

Problema: encontrar o comprimento de uma ssco máxima.

$c[i, j]$ = comprimento de uma ssco máxima
de $X[1 \dots i]$ e $Y[1 \dots j]$

Simplificação

Problema: encontrar o comprimento de uma ssco máxima.

$c[i, j]$ = comprimento de uma ssco máxima
de $X[1 \dots i]$ e $Y[1 \dots j]$

Recorrência:

$$c[0, j] = c[i, 0] = 0$$

Simplificação

Problema: encontrar o **comprimento** de uma ssco máxima.

$c[i, j]$ = comprimento de uma ssco máxima
de $X[1 \dots i]$ e $Y[1 \dots j]$

Recorrência:

$$c[0, j] = c[i, 0] = 0$$

$$c[i, j] = c[i-1, j-1] + 1 \text{ se } X[i] = Y[j]$$

Simplificação

Problema: encontrar o **comprimento** de uma ssco máxima.

$c[i, j]$ = comprimento de uma ssco máxima
de $X[1 \dots i]$ e $Y[1 \dots j]$

Recorrência:

$$c[0, j] = c[i, 0] = 0$$

$$c[i, j] = c[i-1, j-1] + 1 \text{ se } X[i] = Y[j]$$

$$c[i, j] = \max(c[i, j-1], c[i-1, j]) \text{ se } X[i] \neq Y[j]$$

Algoritmo recursivo

Devolve o comprimento de uma ssco máxima de $X[1 \dots i]$ e $Y[1 \dots j]$.

REC-LCS-LENGTH (X, i, Y, j)

```
1  se  $i = 0$  ou  $j = 0$  então devolva 0
2  se  $X[i] = Y[j]$ 
3      então  $c[i, j] \leftarrow \text{REC-LCS-LENGTH}(X, i-1, Y, j-1) + 1$ 
4      senão  $q_1 \leftarrow \text{REC-LCS-LENGTH}(X, i-1, Y, j)$ 
5            $q_2 \leftarrow \text{REC-LCS-LENGTH}(X, i, Y, j-1)$ 
6           se  $q_1 \geq q_2$ 
7               então  $c[i, j] \leftarrow q_1$ 
8               senão  $c[i, j] \leftarrow q_2$ 
9  devolva  $c[i, j]$ 
```

Consumo de tempo

$T(m, n) :=$ número de comparações feitas por
REC-LCS-LENGTH (X, m, Y, n) no pior caso

Consumo de tempo

$T(m, n) :=$ número de comparações feitas por
REC-LCS-LENGTH (X, m, Y, n) no pior caso

Recorrência

$$T(0, n) = 0$$

$$T(m, 0) = 0$$

$$T(m, n) \geq T(m - 1, n) + T(m, n - 1) + 1 \quad \text{para } n \geq 1 \text{ e } m \geq 1$$

Consumo de tempo

$T(m, n) :=$ número de comparações feitas por
REC-LCS-LENGTH (X, m, Y, n) no pior caso

Recorrência

$$T(0, n) = 0$$

$$T(m, 0) = 0$$

$$T(m, n) \geq T(m-1, n) + T(m, n-1) + 1 \quad \text{para } n \geq 1 \text{ e } m \geq 1$$

A que classe Ω pertence $T(m, n)$?

Recorrência

Note que $T(m, n) = T(n, m)$ para $n = 0, 1, \dots$ e $m = 0, 1, \dots$.

Recorrência

Note que $T(m, n) = T(n, m)$ para $n = 0, 1, \dots$ e $m = 0, 1, \dots$.

Seja $k := \min\{m, n\}$. Temos que

$$T(m, n) \geq T(k, k) \geq S(k),$$

onde

$$S(0) = 0$$

$$S(k) = 2S(k-1) + 1 \quad \text{para } k = 1, 2, \dots$$

Recorrência

Note que $T(m, n) = T(n, m)$ para $n = 0, 1, \dots$ e $m = 0, 1, \dots$

Seja $k := \min\{m, n\}$. Temos que

$$T(m, n) \geq T(k, k) \geq S(k),$$

onde

$$S(0) = 0$$

$$S(k) = 2S(k-1) + 1 \quad \text{para } k = 1, 2, \dots$$

$$S(k) \text{ é } \Theta(2^k) \Rightarrow T(m, n) \text{ é } \Omega(2^{\min\{m, n\}})$$

Recorrência

Note que $T(m, n) = T(n, m)$ para $n = 0, 1, \dots$ e $m = 0, 1, \dots$

Seja $k := \min\{m, n\}$. Temos que

$$T(m, n) \geq T(k, k) \geq S(k),$$

onde

$$S(0) = 0$$

$$S(k) = 2S(k-1) + 1 \quad \text{para } k = 1, 2, \dots$$

$$S(k) \text{ é } \Theta(2^k) \Rightarrow T(m, n) \text{ é } \Omega(2^{\min\{m, n\}})$$

$T(m, n)$ é exponencial

Conclusão

O consumo de tempo do algoritmo
REC-LEC-LENGTH é $\Omega(2^{\min\{m,n\}})$.

Programação dinâmica

Cada subproblema, comprimento de uma ssco máxima de

$$X[1 \dots i] \quad \text{e} \quad Y[1 \dots j],$$

é resolvido **uma só** vez.

Em que ordem calcular os componentes da tabela c ?

Para calcular $c[4, 6]$ preciso de ...

Programação dinâmica

Cada subproblema, comprimento de uma ssco máxima de

$$X[1 \dots i] \quad \text{e} \quad Y[1 \dots j],$$

é resolvido **uma só** vez.

Em que ordem calcular os componentes da tabela c ?

Para calcular $c[4, 6]$ preciso de ...

$c[4, 5]$, $c[3, 6]$ e de $c[3, 5]$.

Programação dinâmica

Cada subproblema, comprimento de uma ssco máxima de

$$X[1 \dots i] \quad \text{e} \quad Y[1 \dots j],$$

é resolvido **uma só** vez.

Em que ordem calcular os componentes da tabela c ?

Para calcular $c[4, 6]$ preciso de ...

$c[4, 5]$, $c[3, 6]$ e de $c[3, 5]$.

Calcule todos os $c[i, j]$ com $i = 1$ e $j = 0, 1, \dots, n$,
depois todos com $i = 2$ e $j = 0, 1, \dots, n$,
depois todos com $i = 3$ e $j = 0, 1, \dots, n$,
etc.

Programação dinâmica

	1	2	3	4	5	6	7	8	<i>j</i>
1	0	0	0	0	0	0	0	0	
2	0								
3	0				★	★			
4	0				★	??			
5	0								
6	0								
7	0								
8	0								
<i>i</i>									

Simulação

		<i>Y</i>							
			<i>B</i>	D	C	A	B	A	
<i>X</i>		0	<i>1</i>	2	3	4	5	6	<i>j</i>
	0	0	0	0	0	0	0	0	
<i>A</i>	1	0	??						
<i>B</i>	2	0							
<i>C</i>	3	0							
<i>B</i>	4	0							
<i>D</i>	5	0							
<i>A</i>	6	0							
<i>B</i>	7	0							

i

Simulação

		<i>Y</i>							
			B	D	C	A	B	A	
<i>X</i>		0	1	2	3	4	5	6	<i>j</i>
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	??					
B	2	0							
C	3	0							
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							

i

Simulação

		<i>Y</i>	B	D	<i>C</i>	A	B	A		
<i>X</i>		0	1	2	<i>3</i>	4	5	6	<i>j</i>	
	0	0	0	0	0	0	0	0		
<i>A</i>	1	0	0	0	??					
B	2	0								
<i>C</i>	3	0								
B	4	0								
D	5	0								
A	6	0								
B	7	0								

i

Simulação

		<i>Y</i>	B	D	C	<i>A</i>	B	A		
<i>X</i>		0	1	2	3	<i>4</i>	5	6	<i>j</i>	
	0	0	0	0	0	0	0	0		
<i>A</i>	1	0	0	0	0	??				
B	2	0								
C	3	0								
B	4	0								
D	5	0								
A	6	0								
B	7	0								

i

Simulação

		<i>Y</i>	B	D	C	A	<i>B</i>	A		
<i>X</i>		0	1	2	3	4	<i>5</i>	6	<i>j</i>	
	0	0	0	0	0	0	0	0		
<i>A</i>	1	0	0	0	0	1	??			
<i>B</i>	2	0								
<i>C</i>	3	0								
<i>B</i>	4	0								
<i>D</i>	5	0								
<i>A</i>	6	0								
<i>B</i>	7	0								

i

Simulação

		<i>Y</i>	B	D	C	A	B	<i>A</i>		
<i>X</i>		0	1	2	3	4	5	6	<i>j</i>	
	0	0	0	0	0	0	0	0		
<i>A</i>	1	0	0	0	0	1	1	??		
B	2	0								
C	3	0								
B	4	0								
D	5	0								
A	6	0								
B	7	0								

i

Simulação

		<i>Y</i>	<i>B</i>	D	C	A	B	A		
<i>X</i>		0	1	2	3	4	5	6	<i>j</i>	
	0	0	0	0	0	0	0	0		
A	1	0	0	0	0	1	1	1		
B	2	0	??							
C	3	0								
B	4	0								
D	5	0								
A	6	0								
B	7	0								

i

Simulação

		<i>Y</i>							
			B	D	C	A	B	A	
<i>X</i>		0	1	2	3	4	5	6	<i>j</i>
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	??					
C	3	0							
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							

i

Simulação

		<i>Y</i>							
			B	D	<i>C</i>	A	B	A	
<i>X</i>		0	1	2	<i>3</i>	4	5	6	<i>j</i>
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	<i>2</i>	0	1	1	??				
C	3	0							
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							

i

Simulação

		<i>Y</i>	B	D	C	<i>A</i>	B	A		
<i>X</i>		0	1	2	3	<i>4</i>	5	6	<i>j</i>	
	0	0	0	0	0	0	0	0		
A	1	0	0	0	0	1	1	1		
B	2	0	1	1	1	??				
C	3	0								
B	4	0								
D	5	0								
A	6	0								
B	7	0								

i

Simulação

		<i>Y</i>							
			B	D	C	A	<i>B</i>	A	
<i>X</i>		0	1	2	3	4	<i>5</i>	6	<i>j</i>
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
<i>B</i>	<i>2</i>	0	1	1	1	1	??		
C	3	0							
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							

i

Simulação

		<i>Y</i>	B	D	C	A	B	<i>A</i>		
<i>X</i>		0	1	2	3	4	5	<i>6</i>	<i>j</i>	
	0	0	0	0	0	0	0	0		
A	1	0	0	0	0	1	1	1		
B	2	0	1	1	1	1	2	??		
C	3	0								
B	4	0								
D	5	0								
A	6	0								
B	7	0								

i

Simulação

		<i>Y</i>	<i>B</i>	D	C	A	B	A		
<i>X</i>		0	<i>1</i>	2	3	4	5	6	<i>j</i>	
	0	0	0	0	0	0	0	0		
A	1	0	0	0	0	1	1	1		
B	2	<i>0</i>	<i>1</i>	1	1	1	2	2		
<i>C</i>	<i>3</i>	<i>0</i>	<i>??</i>							
B	4	0								
D	5	0								
A	6	0								
B	7	0								

i

Simulação

		<i>Y</i>							
			B	D	C	A	B	A	
<i>X</i>		0	1	2	3	4	5	6	<i>j</i>
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	??					
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							

i

Simulação

		<i>Y</i>	B	D	<i>C</i>	A	B	A		
<i>X</i>		0	1	2	<i>3</i>	4	5	6	<i>j</i>	
	0	0	0	0	0	0	0	0		
A	1	0	0	0	0	1	1	1		
B	2	0	1	1	1	1	2	2		
<i>C</i>	<i>3</i>	0	1	1	??					
B	4	0								
D	5	0								
A	6	0								
B	7	0								

i

Simulação

		<i>Y</i>	B	D	C	<i>A</i>	B	A		
<i>X</i>		0	1	2	3	<i>4</i>	5	6	<i>j</i>	
	0	0	0	0	0	0	0	0		
A	1	0	0	0	0	1	1	1		
B	2	0	1	1	1	1	2	2		
<i>C</i>	<i>3</i>	0	1	1	2	??				
B	4	0								
D	5	0								
A	6	0								
B	7	0								

i

Simulação

		<i>Y</i>							
			B	D	C	A	<i>B</i>	A	
<i>X</i>		0	1	2	3	4	<i>5</i>	6	<i>j</i>
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	<i>1</i>	<i>2</i>	2	
<i>C</i>	<i>3</i>	0	1	1	2	<i>2</i>	<i>??</i>		
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							

i

Simulação

		<i>Y</i>	B	D	C	A	B	<i>A</i>		
<i>X</i>		0	1	2	3	4	5	<i>6</i>	<i>j</i>	
	0	0	0	0	0	0	0	0		
A	1	0	0	0	0	1	1	1		
B	2	0	1	1	1	1	2	2		
<i>C</i>	<i>3</i>	0	1	1	2	2	2	??		
B	4	0								
D	5	0								
A	6	0								
B	7	0								

i

Simulação

		<i>Y</i>	<i>B</i>	D	C	A	B	A		
<i>X</i>		0	<i>1</i>	2	3	4	5	6	<i>j</i>	
	0	0	0	0	0	0	0	0		
A	1	0	0	0	0	1	1	1		
B	2	0	1	1	1	1	2	2		
C	3	<i>0</i>	<i>1</i>	1	2	2	2	2		
<i>B</i>	<i>4</i>	<i>0</i>	??							
D	5	0								
A	6	0								
B	7	0								

i

Simulação

		Y B D C A B A							
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	??					
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							

i

Simulação

		<i>Y</i>							
			B	D	<i>C</i>	A	B	A	
<i>X</i>		0	1	2	<i>3</i>	4	5	6	<i>j</i>
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
<i>B</i>	<i>4</i>	0	1	1	??				
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							

i

Simulação

		<i>Y</i>	B	D	C	<i>A</i>	B	A		
<i>X</i>		0	1	2	3	<i>4</i>	5	6	<i>j</i>	
	0	0	0	0	0	0	0	0		
A	1	0	0	0	0	1	1	1		
B	2	0	1	1	1	1	2	2		
C	3	0	1	1	2	2	2	2		
<i>B</i>	<i>4</i>	0	1	1	2	??				
D	5	0								
A	6	0								
B	7	0								

i

Simulação

		Y B D C A B A							
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	??		
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							

i

Simulação

		<i>Y</i>	B	D	C	A	B	<i>A</i>	
<i>X</i>		0	1	2	3	4	5	<i>6</i>	<i>j</i>
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	??	
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							

i

Simulação

		<i>Y</i>	<i>B</i>	D	C	A	B	A		
<i>X</i>		0	<i>1</i>	2	3	4	5	6	<i>j</i>	
	0	0	0	0	0	0	0	0		
A	1	0	0	0	0	1	1	1		
B	2	0	1	1	1	1	2	2		
C	3	0	1	1	2	2	2	2		
B	4	<i>0</i>	<i>1</i>	1	2	2	3	3		
<i>D</i>	<i>5</i>	<i>0</i>	??							
A	6	0								
B	7	0								

i

Simulação

		Y						
			B	D	C	A	B	A
X		0	1	2	3	4	5	6 j
	0	0	0	0	0	0	0	0
A	1	0	0	0	0	1	1	1
B	2	0	1	1	1	1	2	2
C	3	0	1	1	2	2	2	2
B	4	0	1	1	2	2	3	3
D	5	0	1	??				
A	6	0						
B	7	0						

i

Simulação

		<i>Y</i>							
			B	D	<i>C</i>	A	B	A	
<i>X</i>		0	1	2	<i>3</i>	4	5	6	<i>j</i>
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
<i>D</i>	<i>5</i>	0	1	2	??				
A	6	0							
B	7	0							

i

Simulação

		<i>Y</i>	B	D	C	<i>A</i>	B	A		
<i>X</i>		0	1	2	3	<i>4</i>	5	6	<i>j</i>	
	0	0	0	0	0	0	0	0		
A	1	0	0	0	0	1	1	1		
B	2	0	1	1	1	1	2	2		
C	3	0	1	1	2	2	2	2		
B	4	0	1	1	2	2	3	3		
<i>D</i>	<i>5</i>	0	1	2	2	??				
A	6	0								
B	7	0								

i

Simulação

		<i>Y</i>							
			B	D	C	A	<i>B</i>	A	
<i>X</i>		0	1	2	3	4	<i>5</i>	6	<i>j</i>
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	<i>2</i>	<i>3</i>	3	
<i>D</i>	<i>5</i>	0	1	2	2	<i>2</i>	<i>??</i>		
A	6	0							
B	7	0							

i

Simulação

		<i>Y</i>	B	D	C	A	B	<i>A</i>	
<i>X</i>		0	1	2	3	4	5	<i>6</i>	<i>j</i>
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
<i>D</i>	<i>5</i>	0	1	2	2	2	3	??	
A	6	0							
B	7	0							

i

Simulação

		<i>Y</i>	B	D	C	A	B	A	
<i>X</i>		0	1	2	3	4	5	6	<i>j</i>
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	??						
B	7	0							

i

Simulação

		<i>Y</i>							
			B	D	C	A	B	A	
<i>X</i>		0	1	2	3	4	5	6	<i>j</i>
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	1	??					
B	7	0							

i

Simulação

		<i>Y</i>						
			B	D	<i>C</i>	A	B	A
<i>X</i>		0	1	2	<i>3</i>	4	5	6 <i>j</i>
	0	0	0	0	0	0	0	0
A	1	0	0	0	0	1	1	1
B	2	0	1	1	1	1	2	2
C	3	0	1	1	2	2	2	2
B	4	0	1	1	2	2	3	3
D	5	0	1	2	2	2	3	3
<i>A</i>	<i>6</i>	0	1	2	??			
B	7	0						

i

Simulação

		<i>Y</i>	B	D	C	<i>A</i>	B	A	
<i>X</i>		0	1	2	3	<i>4</i>	5	6	<i>j</i>
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
<i>A</i>	<i>6</i>	0	1	2	2	??			
B	7	0							

i

Simulação

		<i>Y</i>	B	D	C	A	<i>B</i>	A	
<i>X</i>		0	1	2	3	4	<i>5</i>	6	<i>j</i>
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
<i>A</i>	<i>6</i>	0	1	2	2	3	??		
B	7	0							

i

Simulação

		<i>Y</i>	B	D	C	A	B	<i>A</i>	
<i>X</i>		0	1	2	3	4	5	<i>6</i>	<i>j</i>
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
<i>A</i>	<i>6</i>	0	1	2	2	3	3	??	
B	7	0							

i

Simulação

		<i>Y</i>	<i>B</i>	D	C	A	B	A	
<i>X</i>		0	1	2	3	4	5	6	<i>j</i>
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	1	2	2	3	3	4	
B	7	0	??						

i

Simulação

		<i>Y</i>	B	<i>D</i>	C	A	B	A	
<i>X</i>		0	1	<i>2</i>	3	4	5	6	<i>j</i>
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	1	2	2	3	3	4	
B	7	0	1	??					

i

Simulação

		<i>Y</i>	B	D	<i>C</i>	A	B	A	
<i>X</i>		0	1	2	<i>3</i>	4	5	6	<i>j</i>
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	1	2	2	3	3	4	
B	7	0	1	2	??				

i

Simulação

		Y							
			B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	1	2	2	3	3	4	
B	7	0	1	2	2	??			

i

Simulação

		<i>Y</i>							
			B	D	C	A	<i>B</i>	A	
<i>X</i>		0	1	2	3	4	<i>5</i>	6	<i>j</i>
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	1	2	2	3	3	4	
B	7	0	1	2	2	3	??		

i

Simulação

		<i>Y</i>	B	D	C	A	B	<i>A</i>	
<i>X</i>		0	1	2	3	4	5	<i>6</i>	<i>j</i>
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	1	2	2	3	3	4	
B	7	0	1	2	2	3	4	??	

i

Simulação

		Y							
			B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	1	2	2	3	3	4	
B	7	0	1	2	2	3	4	4	

i

Algoritmo de programação dinâmica

Devolve o comprimento de uma ssco máxima de $X[1..m]$ e $Y[1..n]$.

LEC-LENGTH (X, m, Y, n)

```
1  para  $i \leftarrow 0$  até  $m$  faça  $c[i, 0] \leftarrow 0$ 
2  para  $j \leftarrow 1$  até  $n$  faça  $c[0, j] \leftarrow 0$ 
3  para  $i \leftarrow 1$  até  $m$  faça
4      para  $j \leftarrow 1$  até  $n$  faça
5          se  $X[i] = Y[j]$ 
6              então  $c[i, j] \leftarrow c[i - 1, j - 1] + 1$ 
7              senão se  $c[i - 1, j] \geq c[i, j - 1]$ 
8                  então  $c[i, j] \leftarrow c[i - 1, j]$ 
9                  senão  $c[i, j] \leftarrow c[i, j - 1]$ 
10 devolva  $c[m, n]$ 
```

Algoritmo de programação dinâmica

Devolve o comprimento de uma ssco máxima de $X[1..m]$ e $Y[1..n]$.

LEC-LENGTH (X, m, Y, n)

```
1  para  $i \leftarrow 0$  até  $m$  faça  $c[i, 0] \leftarrow 0$ 
2  para  $j \leftarrow 1$  até  $n$  faça  $c[0, j] \leftarrow 0$ 
3  para  $i \leftarrow 1$  até  $m$  faça
4      para  $j \leftarrow 1$  até  $n$  faça
5          se  $X[i] = Y[j]$ 
6              então  $c[i, j] \leftarrow c[i - 1, j - 1] + 1$ 
7              senão se  $c[i - 1, j] \geq c[i, j - 1]$ 
8                  então  $c[i, j] \leftarrow c[i - 1, j]$ 
9                  senão  $c[i, j] \leftarrow c[i, j - 1]$ 
10 devolva  $c[m, n]$ 
```

Consumo de tempo: $O(mn)$

Conclusão

O consumo de tempo do algoritmo **LEC-LENGTH** é $\Theta(mn)$.

Subsequência comum máxima

		<i>Y</i>	B	D	C	A	B	A	
<i>X</i>		0	1	2	3	4	5	6	<i>j</i>
	0	★	★	★	★	★	★	★	
A	1	★	←	←	←	↖	↑	↖	
B	2	★	↖	↑	↑	←	↖	↑	
C	3	★	←	←	↖	↑	←	←	
B	4	★	↖	←	←	←	↖	↑	
D	5	★	←	↖	←	←	←	←	
A	6	★	←	←	←	↖	←	↖	
B	7	★	↖	←	←	←	↖	←	

Algoritmo de programação dinâmica

LEC-LENGTH (X, m, Y, n)

```
1  para  $i \leftarrow 0$  até  $m$  faça  $c[i, 0] \leftarrow 0$ 
2  para  $j \leftarrow 1$  até  $n$  faça  $c[0, j] \leftarrow 0$ 
3  para  $i \leftarrow 1$  até  $m$  faça
4      para  $j \leftarrow 1$  até  $n$  faça
5          se  $X[i] = Y[j]$ 
6              então  $c[i, j] \leftarrow c[i - 1, j - 1] + 1$ 
7                   $b[i, j] \leftarrow \text{"↖"}$ 
8              senão se  $c[i - 1, j] \geq c[i, j - 1]$ 
9                  então  $c[i, j] \leftarrow c[i - 1, j]$ 
10                      $b[i, j] \leftarrow \text{"↑"}$ 
11                 senão  $c[i, j] \leftarrow c[i, j - 1]$ 
12                      $b[i, j] \leftarrow \text{"←"}$ 
13  devolva  $c$  e  $b$ 
```

Consumo de tempo: $O(mn)$

Get-LCS

GET-LCS ($X, m, n, b, \text{máxcomp}$)

```
1   $k \leftarrow \text{máxcomp}$ 
2   $i \leftarrow m$ 
3   $j \leftarrow n$ 
4  enquanto  $i > 0$  e  $j > 0$  faça
5      se  $b[i, j] = \nwarrow$ 
6          então  $Z[k] \leftarrow X[i]$ 
7               $k \leftarrow k - 1$     $i \leftarrow i - 1$     $j \leftarrow j - 1$ 
8      senão se  $b[i, j] = \leftarrow$ 
9          então  $i \leftarrow i - 1$ 
10         senão  $j \leftarrow j - 1$ 
11 devolva  $Z$ 
```

Consumo de tempo é $O(m + n)$ e $\Omega(\min\{m, n\})$.

Exercícios

Exercício 20.A

Escreva um algoritmo para decidir se $\langle z_1, \dots, z_k \rangle$ é subsequência de $\langle x_1, \dots, x_m \rangle$. Prove rigorosamente que o seu algoritmo está correto.

Exercício 20.B

Suponha que os elementos de uma sequência $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ são distintos dois a dois. Quantas subsequências tem a sequência?

Exercício 20.C

Uma subsequência crescente Z de uma sequência X é *máxima* se não existe outra subsequência crescente mais longa. A subsequência $\langle 5, 6, 9 \rangle$ de $\langle 9, 5, 6, 9, 6, 2, 7 \rangle$ é máxima? Dê uma sequência crescente máxima de $\langle 9, 5, 6, 9, 6, 2, 7 \rangle$. Mostre que o algoritmo “guloso” óbvio não é capaz, em geral, de encontrar uma subsequência crescente máxima de uma sequência dada. (Algoritmo guloso óbvio: escolha o menor elemento de X ; a partir daí, escolha sempre o próximo elemento de X que seja maior ou igual ao último escolhido.)

Exercício 20.D

Escreva um algoritmo de programação dinâmica para resolver o problema da subsequência crescente máxima.

Mais exercícios

Exercício 20.E [CLRS 15.4-5]

Mostre como o algoritmo da subsequência comum máxima pode ser usado para resolver o problema da subsequência crescente máxima de uma sequência numérica. Dê uma delimitação justa, em notação Θ , do consumo de tempo de sua solução.

Exercício 20.F [Printing neatly. CLRS 15-2]

Considere a sequência $P_1, P_2, \dots, P_n$ de palavras que constitui um parágrafo de texto. A palavra P_i tem l_i caracteres. Queremos imprimir as palavras em linhas, na ordem dada, de modo que cada linha tenha no máximo M caracteres. Se uma determinada linha contém as palavras $P_i, P_{i+1}, \dots, P_j$ (com $i \leq j$) e há exatamente um espaço entre cada par de palavras consecutivas, o número de espaços no fim da linha é

$$M - (l_i + 1 + l_{i+1} + 1 + \dots + 1 + l_j).$$

É claro que não devemos permitir que esse número seja negativo. Queremos minimizar, com relação a todas as linhas exceto a última, a soma dos cubos dos números de espaços no fim de cada linha. (Assim, se temos linhas $1, 2, \dots, L$ e b_p espaços no fim da linha p , queremos minimizar $b_1^3 + b_2^3 + \dots + b_{L-1}^3$).

Dê um exemplo para mostrar que algoritmos inocentes não resolvem o problema. Dê um algoritmo de programação dinâmica que resolva o problema. Qual a “optimal substructure property” para esse problema? Faça uma análise do consumo de tempo do algoritmo.