Jogos de formação de redes

Jogo de conexão local:

n jogadores vão formar um grafo com n vértices

estratégia de cada jogador: vértices com quem se liga

Jogos de formação de redes

Jogo de conexão local:

n jogadores vão formar um grafo com n vértices

estratégia de cada jogador: vértices com quem se liga

Dadas as escolhas dos jogadores, temos um grafo G.

Qual é o custo de G para cada jogador?

Jogos de formação de redes

Jogo de conexão local:

n jogadores vão formar um grafo com n vértices

estratégia de cada jogador: vértices com quem se liga

Dadas as escolhas dos jogadores, temos um grafo G.

Qual é o custo de G para cada jogador?

Custo por ligação: $\alpha > 0$
Custo por distâncias:

soma da distância em G a cada outro vértice

Jogos de formação de redes

Jogo de conexão local:

n jogadores vão formar um grafo com n vértices

estratégia de cada jogador: vértices com quem se liga

Dadas as escolhas dos jogadores, temos um grafo G.

Qual é o custo de G para cada jogador?

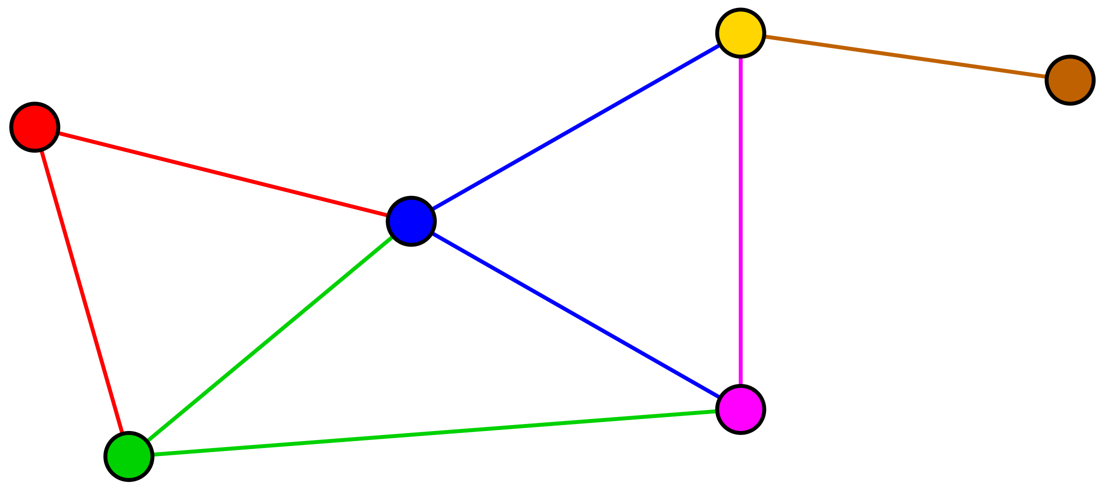
Custo por ligação: $\alpha > 0$
Custo por distâncias:

soma da distância em G a cada outro vértice

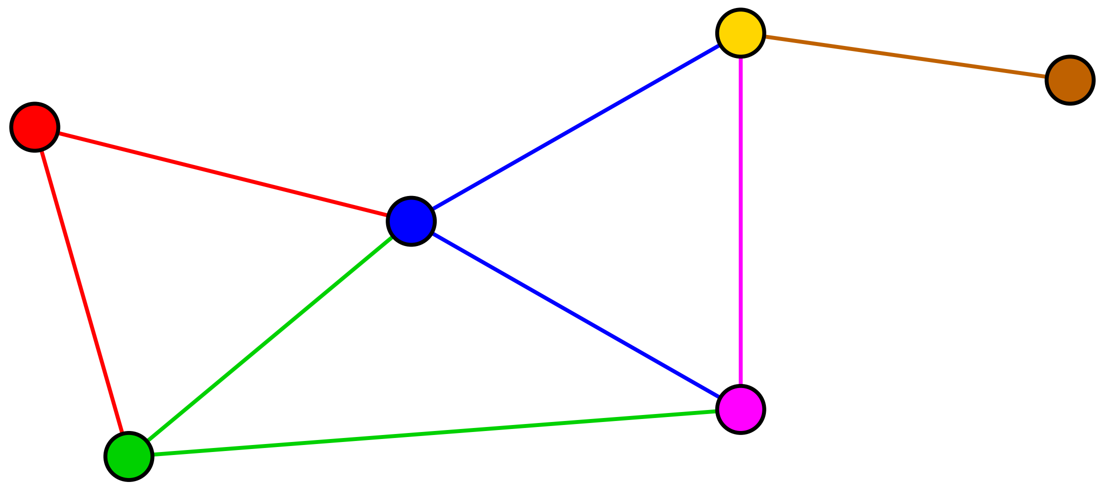
$$c_v(G) \ = \ \alpha\,|N_v| + \sum_{u \in [n]} d_G(u,v),$$

onde N_v é o conjunto de vértices a quem v se ligou.

Exemplo



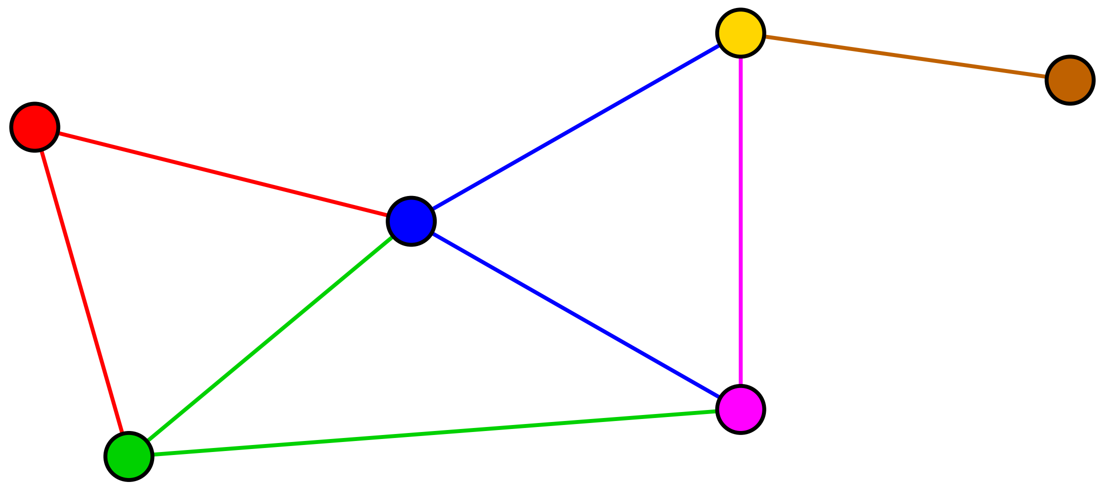
Exemplo



Para $\alpha = 2$, temos os seguintes custos:

- vértice verde: $4 + (1 + 1 + 1 + 2 + 3) = 4 + 8 = 12$
- vértice azul: $4 + (1 + 1 + 1 + 1 + 2) = 4 + 6 = 10$
- vértice marrom: $2 + (1 + 2 + 2 + 3 + 3) = 2 + 11 = 13$

Exemplo

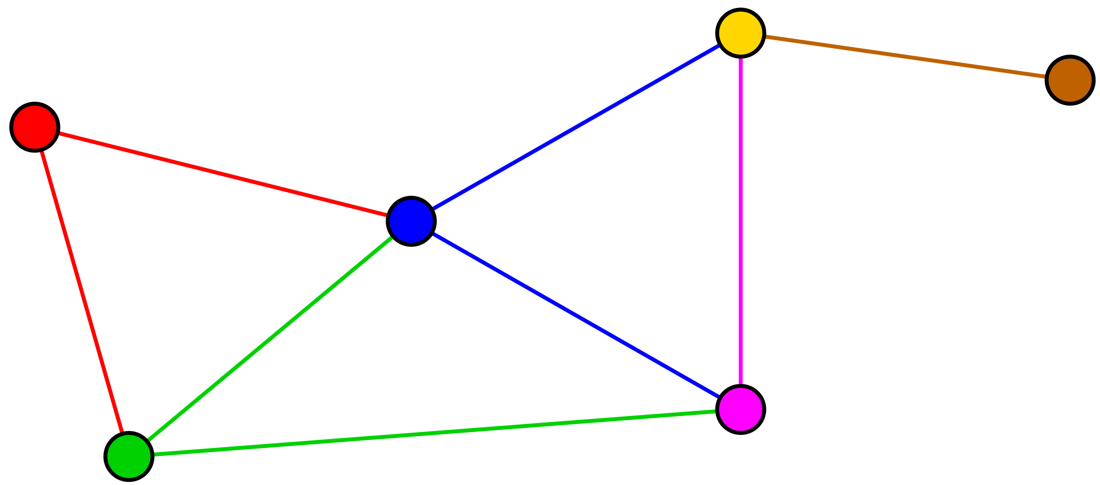


Para $\alpha = 2$, temos os seguintes custos:

- vértice verde: $4 + (1 + 1 + 1 + 2 + 3) = 4 + 8 = 12$
- vértice azul: $4 + (1 + 1 + 1 + 1 + 2) = 4 + 6 = 10$
- vértice marrom: $2 + (1 + 2 + 2 + 3 + 3) = 2 + 11 = 13$

É um equilíbrio?

Exemplo

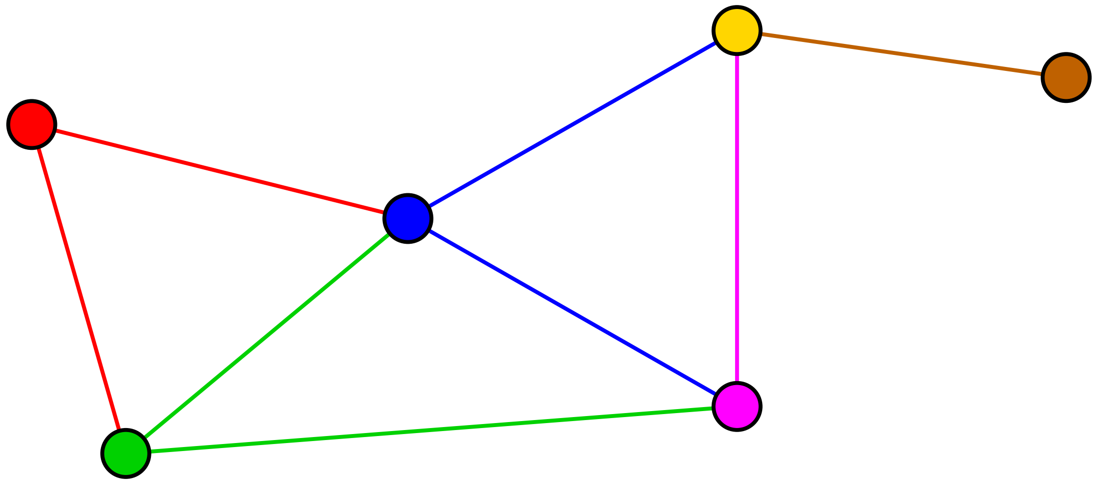


Para $\alpha = 2$, temos os seguintes custos:

- vértice verde: $4 + (1 + 1 + 1 + 2 + 3) = 4 + 8 = 12$
- vértice azul: $4 + (1 + 1 + 1 + 1 + 2) = 4 + 6 = 10$
- vértice marrom: $2 + (1 + 2 + 2 + 3 + 3) = 2 + 11 = 13$

É um equilíbrio?
Não... o verde por exemplo pode melhorar...

Exemplo

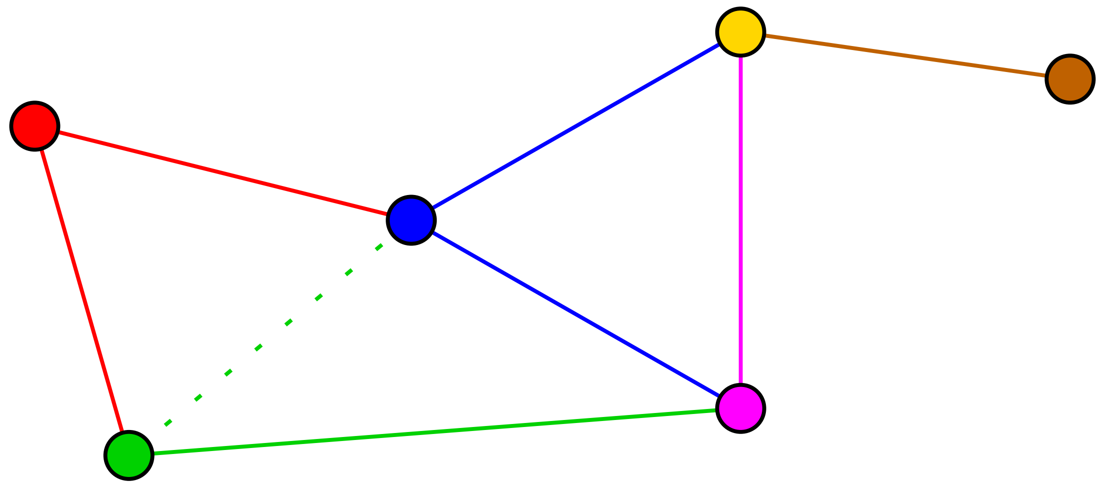


Para $\alpha = 2$, temos os seguintes custos:

- vértice verde: $4 + (1 + 1 + 1 + 2 + 3) = 4 + 8 = 12$
- vértice azul: $4 + (1 + 1 + 1 + 1 + 2) = 4 + 6 = 10$

O verde pode melhorar:

Exemplo



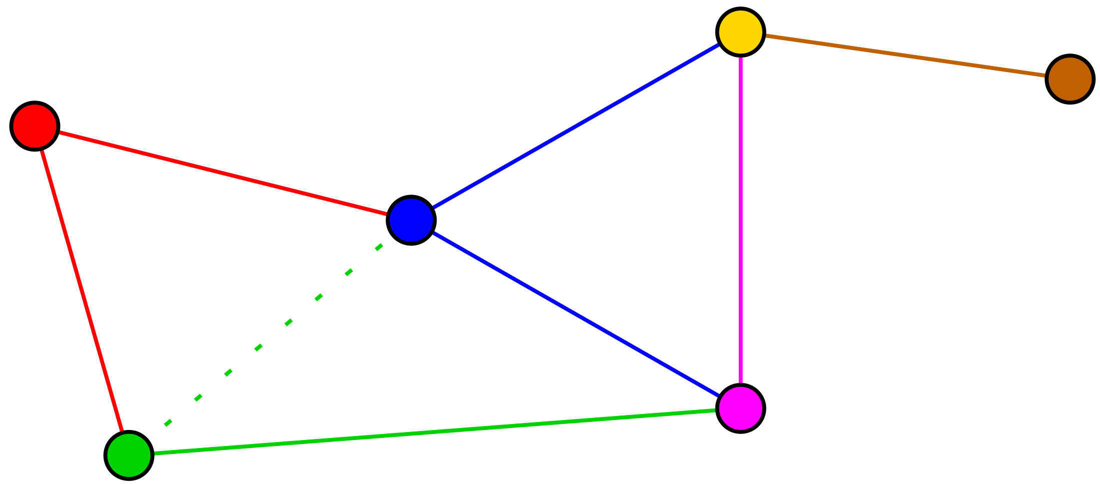
Para $\alpha = 2$, temos os seguintes custos:

- vértice verde: $4 + (1 + 1 + 1 + 2 + 3) = 4 + 8 = 12$
- vértice azul: $4 + (1 + 1 + 1 + 1 + 2) = 4 + 6 = 10$

Se o verde se desligar do azul seu custo cai para

$$2 + (1 + 2 + 1 + 2 + 3) = 2 + 9 = 11 < 12$$

Exemplo



Para $\alpha = 2$, temos os seguintes custos:

- vértice verde: $4 + (1 + 1 + 1 + 2 + 3) = 4 + 8 = 12$
- vértice azul: $4 + (1 + 1 + 1 + 1 + 2) = 4 + 6 = 10$

Se o verde se desligar do azul seu custo cai para

$$2 + (1 + 2 + 1 + 2 + 3) = 2 + 9 = 11 < 12$$

Note que o custo do azul piora de 1 neste caso.

O Lema

Lema: Se um grafo G é um equilíbro com diâmetro d, então seu custo social é $\mathrm{O}(d)$ vezes o custo social ótimo.

O Lema

Lema: Se um grafo G é um equilíbro com diâmetro d, então seu custo social é $\mathrm{O}(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova: Ótimo tem custo $\Omega(\alpha\, n + n^2)$,
pois o grafo tem que ser conexo ($m \geq n - 1$).

O Lema

Lema: Se um grafo G é um equilíbro com diâmetro d, então seu custo social é $\mathrm{O}(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova: Ótimo tem custo $\Omega(\alpha\, n + n^2)$, pois o grafo tem que ser conexo ($m \geq n - 1$).

Se G tem diâmetro d, o custo das distâncias é $\mathrm{O}(dn^2)$.

O Lema

Lema: Se um grafo G é um equilíbro com diâmetro d, então seu custo social é $\mathrm{O}(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova: Ótimo tem custo $\Omega(\alpha\, n + n^2)$,
pois o grafo tem que ser conexo ($m \geq n - 1$).

Se G tem diâmetro d, o custo das distâncias é $\mathrm{O}(dn^2)$.

Quebramos o custo das arestas em duas partes:

- arestas de corte
- arestas não de corte

O Lema

Lema: Se um grafo G é um equilíbro com diâmetro d, então seu custo social é $\mathrm{O}(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova: Ótimo tem custo $\Omega(\alpha\, n + n^2)$,
pois o grafo tem que ser conexo ($m \geq n - 1$).

Se G tem diâmetro d, o custo das distâncias é $\mathrm{O}(dn^2)$.

Quebramos o custo das arestas em duas partes:

- arestas de corte
- arestas não de corte

No máximo $n - 1$ arestas de corte.

O Lema

Lema: Se um grafo G é um equilíbro com diâmetro d, então seu custo social é $\mathrm{O}(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova: Ótimo tem custo $\Omega(\alpha\, n + n^2)$,
pois o grafo tem que ser conexo ($m \geq n - 1$).

Se G tem diâmetro d, o custo das distâncias é $\mathrm{O}(dn^2)$.

Quebramos o custo das arestas em duas partes:

- arestas de corte
- arestas não de corte

No máximo $n - 1$ arestas de corte.

Então arestas de corte custam menos que $\alpha\, n$.

Arestas não de corte

Lema: Se um grafo G é um equilíbro com diâmetro d, então seu custo social é $\mathrm{O}(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova: Ótimo tem custo $\Omega(\alpha\, n + n^2)$,
pois o grafo tem que ser conexo ($m \geq n - 1$).

Se G tem diâmetro d, o custo das distâncias é $\mathrm{O}(dn^2)$.

Arestas de corte custam menos que $\alpha\, n$.

Falta contabilizar o custo das arestas não de corte.

Arestas não de corte

Lema: Se um grafo G é um equilíbro com diâmetro d, então seu custo social é $\mathrm{O}(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova: Ótimo tem custo $\Omega(\alpha\, n + n^2)$,
pois o grafo tem que ser conexo ($m \geq n - 1$).

Se G tem diâmetro d, o custo das distâncias é $\mathrm{O}(dn^2)$.

Arestas de corte custam menos que $\alpha\, n$.

Falta contabilizar o custo das arestas não de corte.

Vamos mostrar que:
cada vértice paga $\mathrm{O}(nd)$ por $\mathrm{O}(nd/\alpha)$ arestas não de corte.

Arestas não de corte

Lema: Se um grafo G é um equilíbro com diâmetro d, então seu custo social é $\mathrm{O}(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova: Ótimo tem custo $\Omega(\alpha\, n + n^2)$,
pois o grafo tem que ser conexo ($m \geq n - 1$).

Se G tem diâmetro d, o custo das distâncias é $\mathrm{O}(dn^2)$.

Arestas de corte custam menos que $\alpha\, n$.

Falta contabilizar o custo das arestas não de corte.

Vamos mostrar que:
cada vértice paga $\mathrm{O}(nd)$ por $\mathrm{O}(nd/\alpha)$ arestas não de corte.

Disso segue que custo total destas arestas é $\mathrm{O}(n^2 d)$.

Arestas não de corte

Lema: Se um grafo G é um equilíbro com diâmetro d, então seu custo social é $\mathrm{O}(d)$ vezes o custo social ótimo.

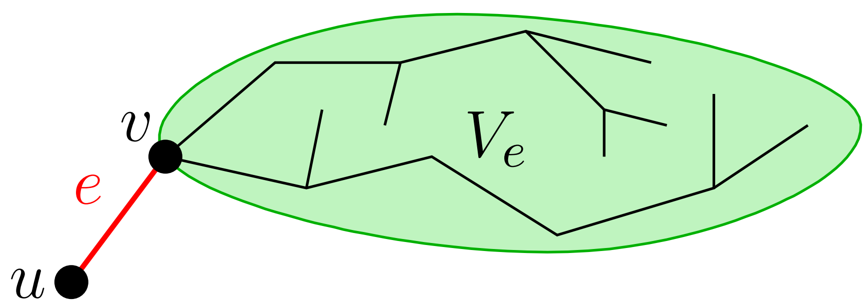
Prova: Falta mostrar que:
cada vértice paga por $\mathrm{O}(nd/\alpha)$ arestas não de corte.

Arestas não de corte

Lema: Se um grafo G é um equilíbro com diâmetro d, então seu custo social é $\mathrm{O}(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova: Falta mostrar que:
cada vértice paga por $\mathrm{O}(nd/\alpha)$ arestas não de corte.

Para cada vértice u e cada aresta $e = uv$ paga por u,
V_e: conjunto dos w tq todo caminho mínimo de u a w usa e.

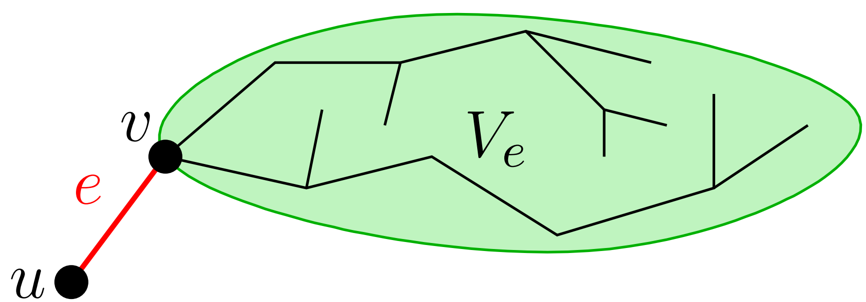


Arestas não de corte

Lema: Se um grafo G é um equilíbro com diâmetro d, então seu custo social é $\mathrm{O}(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova: Falta mostrar que:
cada vértice paga por $\mathrm{O}(nd/\alpha)$ arestas não de corte.

Para cada vértice u e cada aresta $e = uv$ paga por u,
V_e: conjunto dos w tq todo caminho mínimo de u a w usa e.



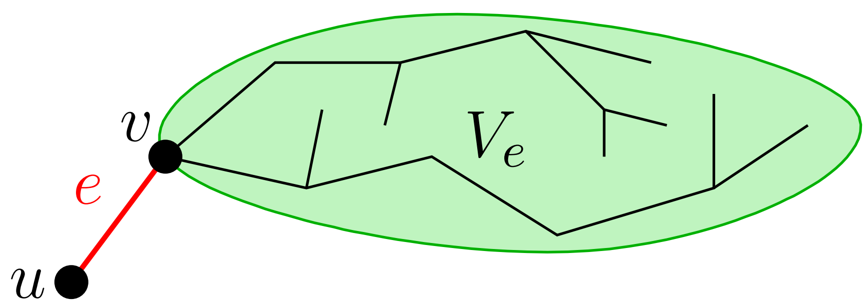
Ao remover e, a distância de u aos vértices de V_e (e só a eles) aumenta.

Arestas não de corte

Lema: Se um grafo G é um equilíbro com diâmetro d, então seu custo social é $\mathrm{O}(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova: Falta mostrar que:
cada vértice paga por $\mathrm{O}(nd/\alpha)$ arestas não de corte.

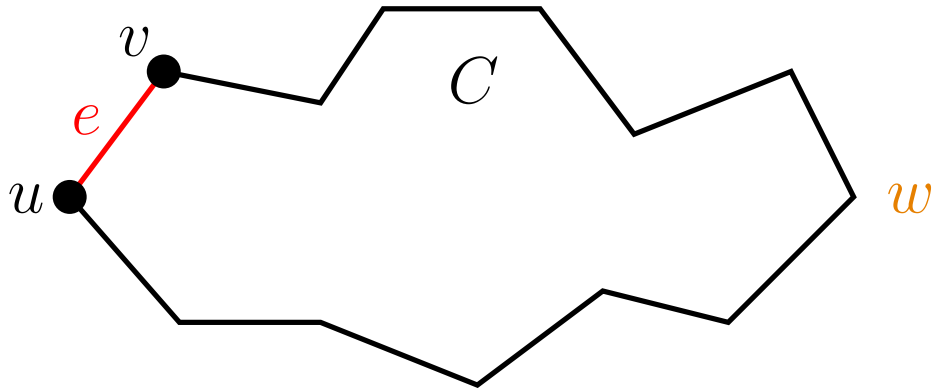
Para cada vértice u e cada aresta $e = uv$ paga por u,
V_e: conjunto dos w tq todo caminho mínimo de u a w usa e.



Ao remover e, a distância de u aos vértices de V_e (e só a eles) aumenta. Aumenta de quanto?

Arestas não de corte

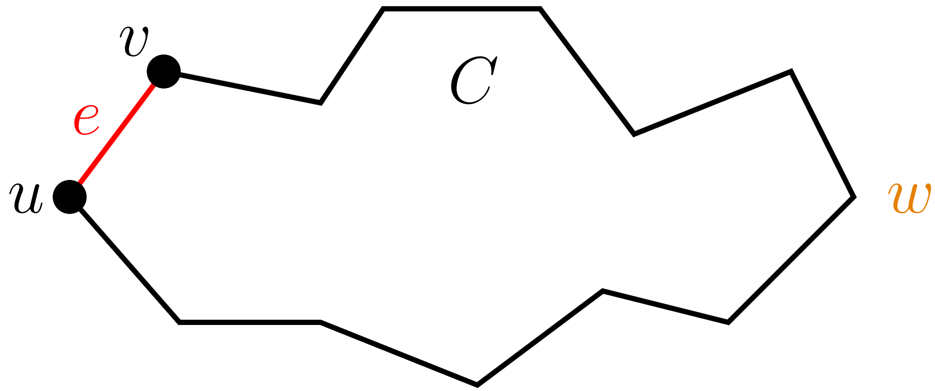
Seja C um circuito de comprimento mínimo contendo e.



Seja w o vértice mais distante de u em C.

Arestas não de corte

Seja C um circuito de comprimento mínimo contendo e.



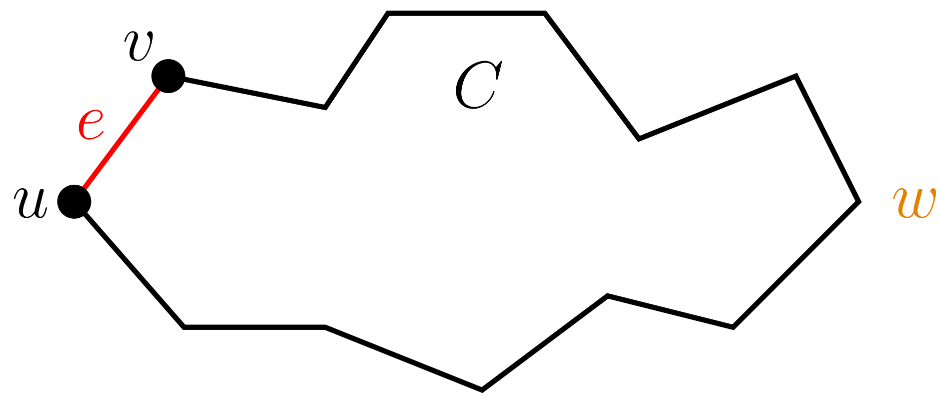
Seja w o vértice mais distante de u em C.

Note que o trecho C_{uw} é um caminho mínimo em G, logo tem comprimento no máximo d.

Analogamente, o trecho C_{vw} é um caminho mínimo em G, logo tem comprimento no máximo d.

Arestas não de corte

Seja C um circuito de comprimento mínimo contendo e.



Seja w o vértice mais distante de u em C.

Note que o trecho C_{uw} é um caminho mínimo em G, logo tem comprimento no máximo d.

Analogamente, o trecho C_{vw} é um caminho mínimo em G, logo tem comprimento no máximo d.

Assim sendo $d(u, v)$ após a remoção de e é no máximo $2d$.

Arestas não de corte

Falta: cada vértice paga por $\mathrm{O}(nd/\alpha)$ arestas não de corte.

Para cada vértice u e cada aresta $e = uv$ paga por u,
V_e: conjunto dos w tq todo caminho mínimo de u a w usa e.

Ao remover e, a distância de u aos vértices de V_e
(e só a eles) aumenta. Aumenta de quanto?

Arestas não de corte

Falta: cada vértice paga por $\mathrm{O}(nd/\alpha)$ arestas não de corte.

Para cada vértice u e cada aresta $e = uv$ paga por u,
V_e: conjunto dos w tq todo caminho mínimo de u a w usa e.

Ao remover e, a distância de u aos vértices de V_e (e só a eles) aumenta. Aumenta de quanto?

Distância de u a v sobe para no máximo $2d$.

Arestas não de corte

Falta: cada vértice paga por $\mathrm{O}(nd/\alpha)$ arestas não de corte.

Para cada vértice u e cada aresta $e = uv$ paga por u,
V_e: conjunto dos w tq todo caminho mínimo de u a w usa e.

Ao remover e, a distância de u aos vértices de V_e
(e só a eles) aumenta. Aumenta de quanto?

Distância de u a v sobe para no máximo $2d$.

Então custo de u desce de α, e sobe de no máximo $2d|V_e|$.

Ou seja, $2d|V_e| \geq \alpha$ e $|V_e| \geq \alpha/2d$.

Arestas não de corte

Falta: cada vértice paga por $\mathrm{O}(nd/\alpha)$ arestas não de corte.

Para cada vértice u e cada aresta $e = uv$ paga por u,
V_e: conjunto dos w tq todo caminho mínimo de u a w usa e.

Ao remover e, a distância de u aos vértices de V_e
(e só a eles) aumenta. Aumenta de quanto?

Distância de u a v sobe para no máximo $2d$.

Então custo de u desce de α, e sobe de no máximo $2d|V_e|$.

Ou seja, $2d|V_e| \geq \alpha$ e $|V_e| \geq \alpha/2d$.

V_e's são disjuntos, logo $\leq n/(\alpha/2d) = 2dn/\alpha = \mathrm{O}(dn/\alpha)$ V_e's.

Arestas não de corte

Falta: cada vértice paga por $\mathrm{O}(nd/\alpha)$ arestas não de corte.

Para cada vértice u e cada aresta $e = uv$ paga por u,
V_e: conjunto dos w tq todo caminho mínimo de u a w usa e.

Ao remover e, a distância de u aos vértices de V_e
(e só a eles) aumenta. Aumenta de quanto?

Distância de u a v sobe para no máximo $2d$.

Então custo de u desce de α, e sobe de no máximo $2d|V_e|$.

Ou seja, $2d|V_e| \geq \alpha$ e $|V_e| \geq \alpha/2d$.

V_e's são disjuntos, logo $\leq n/(\alpha/2d) = 2dn/\alpha = \mathrm{O}(dn/\alpha)$ V_e's.

Então cada vértice paga por $\mathrm{O}(nd/\alpha)$ arestas não de corte.

Mais sobre preço da anarquia

Para $\alpha < 1$, o grafo completo é o único equilíbrio,
e é solução ótima: o preço da anarquia é 1 para $\alpha < 1$.

Fabrikant, Luthra, Maneva, e Papadimitriou (2003)

Teorema: O diâmetro de um equilíbrio é no máximo $2\sqrt{\alpha}$,
e portanto o preço da anarquia é $\mathrm{O}(\sqrt{\alpha})$.

Mais sobre preço da anarquia

Para $\alpha < 1$, o grafo completo é o único equilíbrio,
e é solução ótima: o preço da anarquia é 1 para $\alpha < 1$.

Fabrikant, Luthra, Maneva, e Papadimitriou (2003)

Teorema: O diâmetro de um equilíbrio é no máximo $2\sqrt{\alpha}$,
e portanto o preço da anarquia é $\mathrm{O}(\sqrt{\alpha})$.

Lin (2003) e independentemente
Albers, Eilts, Even-Dar, Mansour e Rodittyt (2006)

Teorema: O preço da anarquia é $\mathrm{O}(1)$ se $\alpha = \mathrm{O}(\sqrt{n})$.
Em geral, o preço da anarquia é $\mathrm{O}(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Segundo resultado

Teorema: O preço da anarquia é $\mathrm{O}(1)$ se $\alpha = \mathrm{O}(\sqrt{n})$.
Em geral, o preço da anarquia é $\mathrm{O}(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Segundo resultado

Teorema: O preço da anarquia é $\mathrm{O}(1)$ se $\alpha = \mathrm{O}(\sqrt{n})$.
Em geral, o preço da anarquia é $\mathrm{O}(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

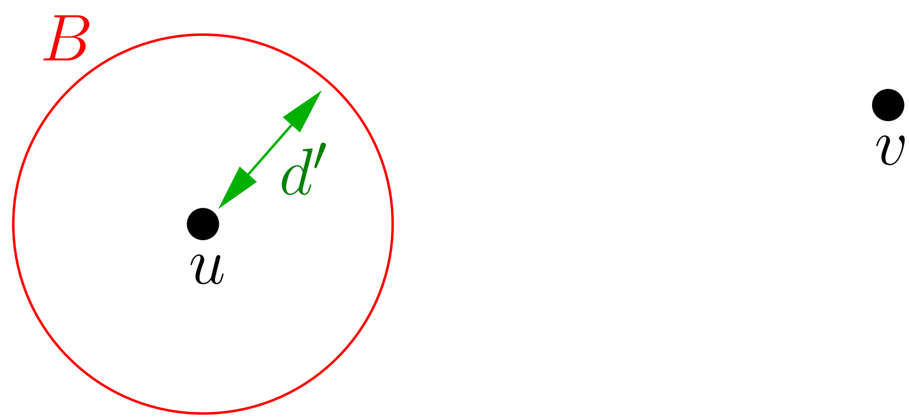
Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.

Segundo resultado

Teorema: O preço da anarquia é $\mathrm{O}(1)$ se $\alpha = \mathrm{O}(\sqrt{n})$.
Em geral, o preço da anarquia é $\mathrm{O}(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.

B: conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u.

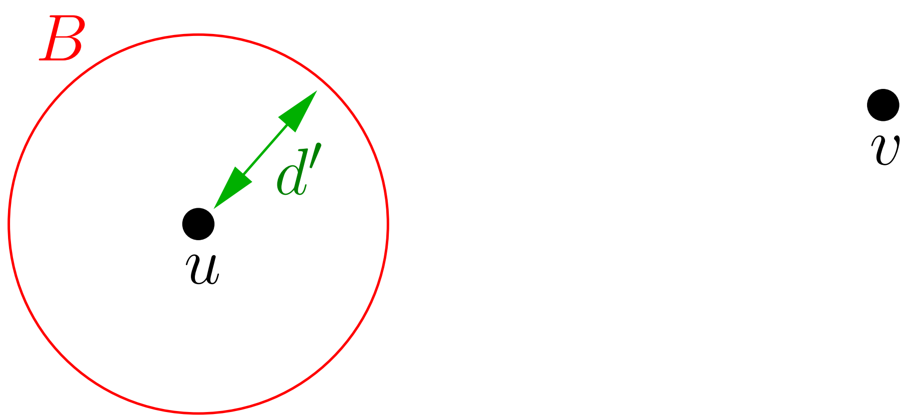


Segundo resultado

Teorema: O preço da anarquia é $\mathrm{O}(1)$ se $\alpha = \mathrm{O}(\sqrt{n})$.
Em geral, o preço da anarquia é $\mathrm{O}(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.

B: conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u.



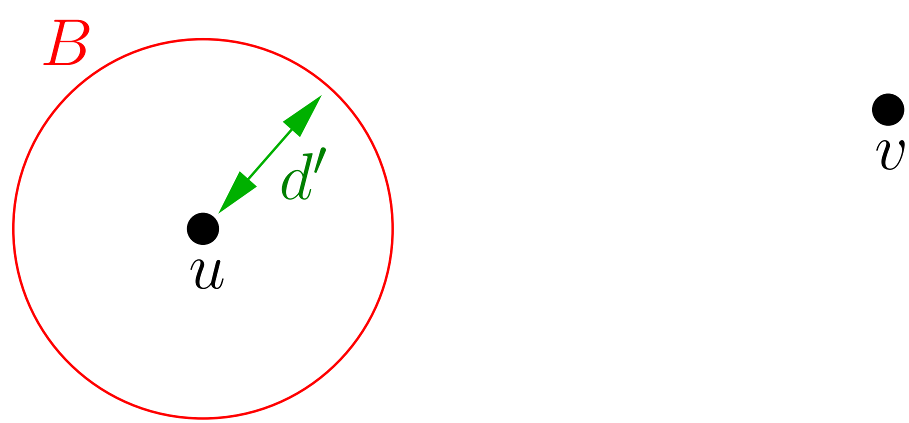
Se v pagar por uv, a distância de v a cada vértice de B, que era pelo menos $d - d'$, cai para no máximo $d' + 1$.

Segundo resultado

Teorema: O preço da anarquia é $\mathrm{O}(1)$ se $\alpha = \mathrm{O}(\sqrt{n})$.
Em geral, o preço da anarquia é $\mathrm{O}(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u,v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.

B: conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u.



Se v pagar por uv, a distância de v a cada vértice de B, que era pelo menos $d - d'$, cai para no máximo $d' + 1$.

Se G é um equilíbrio, $\alpha \geq |B|(d - 2d' - 1) \geq (d-1)|B|/2$.

Segundo resultado

Teorema: O preço da anarquia é $\mathrm{O}(1)$ se $\alpha = \mathrm{O}(\sqrt{n})$.
Em geral, o preço da anarquia é $\mathrm{O}(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

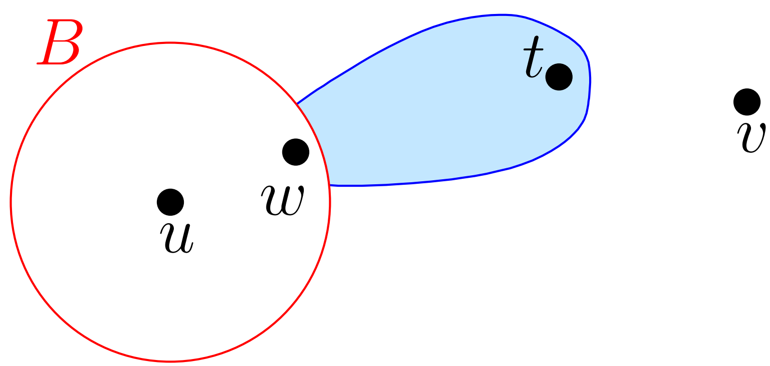
Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.
B: conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u.
Se G é um equilíbrio, $\alpha \geq (d-1)|B|/2$.

Segundo resultado

Teorema: O preço da anarquia é $\mathrm{O}(1)$ se $\alpha = \mathrm{O}(\sqrt{n})$.
Em geral, o preço da anarquia é $\mathrm{O}(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.
B: conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u.
Se G é um equilíbrio, $\alpha \geq (d-1)|B|/2$.

A_w: conjunto dos vértices $t \notin B$ tq
há caminho mínimo de u a t que deixa B por w.

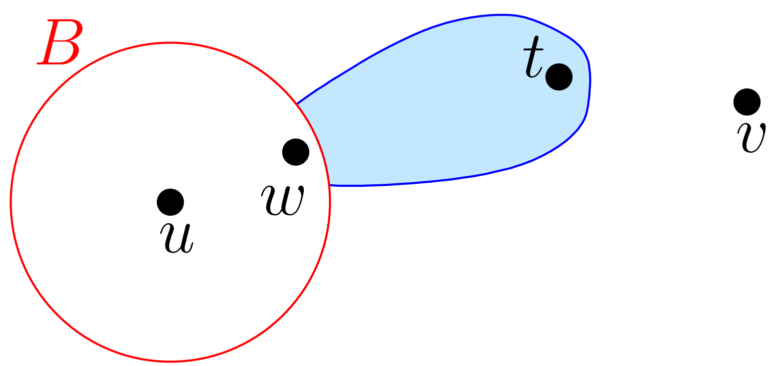


Segundo resultado

Teorema: O preço da anarquia é $\mathrm{O}(1)$ se $\alpha = \mathrm{O}(\sqrt{n})$.
Em geral, o preço da anarquia é $\mathrm{O}(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.
B: conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u.
Se G é um equilíbrio, $\alpha \geq (d-1)|B|/2$.

A_w: conjunto dos vértices $t \notin B$ tq
há caminho mínimo de u a t que deixa B por w.



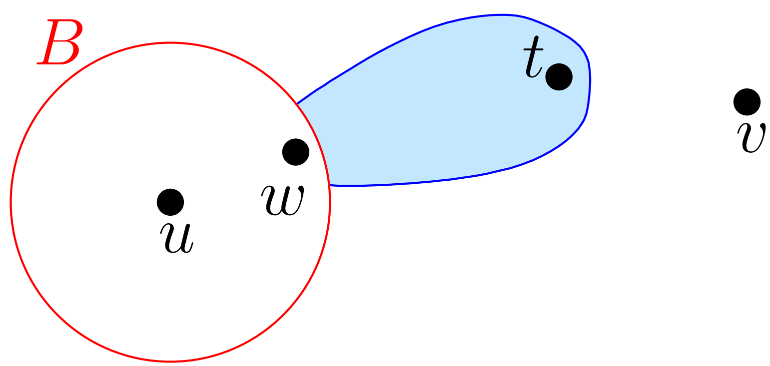
Se $A_w \neq \emptyset$, então $d(u, w) = d'$.

Segundo resultado

Teorema: O preço da anarquia é $\mathrm{O}(1)$ se $\alpha = \mathrm{O}(\sqrt{n})$.
Em geral, o preço da anarquia é $\mathrm{O}(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.
B: conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u.
Se G é um equilíbrio, $\alpha \geq (d-1)|B|/2$.

A_w: conjunto dos vértices $t \notin B$ tq
há caminho mínimo de u a t que deixa B por w.



Se $A_w \neq \emptyset$, então $d(u, w) = d'$.
Se u pagar por uw, economiza $|A_w|(d' - 1)$.

Segundo resultado

Teorema: O preço da anarquia é $\mathrm{O}(1)$ se $\alpha = \mathrm{O}(\sqrt{n})$.
Em geral, o preço da anarquia é $\mathrm{O}(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.
B: conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u.
Se G é um equilíbrio, $\alpha \geq (d-1)|B|/2$.

A_w: conjunto dos vértices t tq
há caminho mínimo de u a t que deixa B por w.
Se u pagar por uw, economiza $|A_w|(d'-1)$.

Segundo resultado

Teorema: O preço da anarquia é $\mathrm{O}(1)$ se $\alpha = \mathrm{O}(\sqrt{n})$.
Em geral, o preço da anarquia é $\mathrm{O}(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.
B: conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u.
Se G é um equilíbrio, $\alpha \geq (d-1)|B|/2$.

A_w: conjunto dos vértices t tq
há caminho mínimo de u a t que deixa B por w.
Se u pagar por uw, economiza $|A_w|(d'-1)$.

Logo $\alpha \geq |A_w|(d'-1)$.

Segundo resultado

Teorema: O preço da anarquia é $\mathrm{O}(1)$ se $\alpha = \mathrm{O}(\sqrt{n})$.
Em geral, o preço da anarquia é $\mathrm{O}(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.
B: conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u.
Se G é um equilíbrio, $\alpha \geq (d-1)|B|/2$.

A_w: conjunto dos vértices t tq
há caminho mínimo de u a t que deixa B por w.
Se u pagar por uw, economiza $|A_w|(d'-1)$.

Logo $\alpha \geq |A_w|(d'-1)$.

Note que existe w tq $|A_w| \geq (n - |B|)/|B|$.

Segundo resultado

Teorema: O preço da anarquia é $\mathrm{O}(1)$ se $\alpha = \mathrm{O}(\sqrt{n})$.
Em geral, o preço da anarquia é $\mathrm{O}(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.
B: conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u.
Se G é um equilíbrio, $\alpha \geq (d-1)|B|/2$.

A_w: conjunto dos vértices t tq
há caminho mínimo de u a t que deixa B por w.
Se u pagar por uw, economiza $|A_w|(d'-1)$.

Logo $\alpha \geq |A_w|(d'-1)$.

Note que existe w tq $|A_w| \geq (n - |B|)/|B|$.

Combinando, concluímos que $\alpha \geq (d'-1)(n - |B|)/|B|$.

Segundo resultado

Teorema: O preço da anarquia é $\mathrm{O}(1)$ se $\alpha = \mathrm{O}(\sqrt{n})$.
Em geral, o preço da anarquia é $\mathrm{O}(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.
B: conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u.
Se G é um equilíbrio, $\alpha \geq (d-1)|B|/2$.

Concluímos também que $\alpha \geq (d'-1)(n-|B|)/|B|$.

Segundo resultado

Teorema: O preço da anarquia é $\mathrm{O}(1)$ se $\alpha = \mathrm{O}(\sqrt{n})$.
Em geral, o preço da anarquia é $\mathrm{O}(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.
B: conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u.
Se G é um equilíbrio, $\alpha \geq (d-1)|B|/2$.

Concluímos também que $\alpha \geq (d'-1)(n-|B|)/|B|$.

Portanto $|B|(1 + \alpha/(d'-1)) \geq n$.

Segundo resultado

Teorema: O preço da anarquia é $\mathrm{O}(1)$ se $\alpha = \mathrm{O}(\sqrt{n})$.
Em geral, o preço da anarquia é $\mathrm{O}(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.
B: conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u.
Se G é um equilíbrio, $\alpha \geq (d-1)|B|/2$.

Concluímos também que $\alpha \geq (d'-1)(n - |B|)/|B|$.

Portanto $|B|(1 + \alpha/(d'-1)) \geq n$.

E, como $\alpha > d > d'$, vale que $|B| \geq n(d'-1)/2\alpha$.

Segundo resultado

Teorema: O preço da anarquia é $\mathrm{O}(1)$ se $\alpha = \mathrm{O}(\sqrt{n})$.
Em geral, o preço da anarquia é $\mathrm{O}(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.
B: conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u.
Se G é um equilíbrio, $\alpha \geq (d-1)|B|/2$.

E vale que $|B| \geq n(d'-1)/2\alpha$.

Segundo resultado

Teorema: O preço da anarquia é $\mathrm{O}(1)$ se $\alpha = \mathrm{O}(\sqrt{n})$.
Em geral, o preço da anarquia é $\mathrm{O}(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.
B: conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u.
Se G é um equilíbrio, $\alpha \geq (d-1)|B|/2$.

E vale que $|B| \geq n(d'-1)/2\alpha$.

Então $\alpha \geq (d-1)|B|/2 \geq (d-1)n(d'-1)/4\alpha \geq n(d'-1)^2/\alpha$.

Segundo resultado

Teorema: O preço da anarquia é $\mathrm{O}(1)$ se $\alpha = \mathrm{O}(\sqrt{n})$.
Em geral, o preço da anarquia é $\mathrm{O}(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.
B: conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u.
Se G é um equilíbrio, $\alpha \geq (d-1)|B|/2$.

E vale que $|B| \geq n(d'-1)/2\alpha$.

Então $\alpha \geq (d-1)|B|/2 \geq (d-1)n(d'-1)/4\alpha \geq n(d'-1)^2/\alpha$.

Ou seja, $\alpha^2 \geq n(d'-1)^2$, e

Segundo resultado

Teorema: O preço da anarquia é $\mathrm{O}(1)$ se $\alpha = \mathrm{O}(\sqrt{n})$.
Em geral, o preço da anarquia é $\mathrm{O}(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.
B: conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u.
Se G é um equilíbrio, $\alpha \geq (d-1)|B|/2$.

E vale que $|B| \geq n(d'-1)/2\alpha$.

Então $\alpha \geq (d-1)|B|/2 \geq (d-1)n(d'-1)/4\alpha \geq n(d'-1)^2/\alpha$.

Ou seja, $\alpha^2 \geq n(d'-1)^2$, e

$$d \leq 4(d'+1) \leq 4d' + 4 = 4(d'-1) + 8 \leq 4\alpha/\sqrt{n} + 8.$$

Segundo resultado

Teorema: O preço da anarquia é $\mathrm{O}(1)$ se $\alpha = \mathrm{O}(\sqrt{n})$.
Em geral, o preço da anarquia é $\mathrm{O}(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.
B: conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u.
Se G é um equilíbrio, $\alpha \geq (d-1)|B|/2$.

E vale que $|B| \geq n(d'-1)/2\alpha$.

Então $\alpha \geq (d-1)|B|/2 \geq (d-1)n(d'-1)/4\alpha \geq n(d'-1)^2/\alpha$.

Ou seja, $\alpha^2 \geq n(d'-1)^2$, e

$$d \leq 4(d'+1) \leq 4d'+4 = 4(d'-1)+8 \leq 4\alpha/\sqrt{n}+8.$$

Do Lema da aula passada então $\mathrm{PoA} = \mathrm{O}(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Jogo de conexão global

Seja $G = (V, E)$ um digrafo com custo c_e para cada e em E.

Jogo de conexão global

Seja $G = (V, E)$ um digrafo com custo c_e para cada e em E.

k jogadores, cada um com um par de vértices (s_i, t_i).

Jogo de conexão global

Seja $G = (V, E)$ um digrafo com custo c_e para cada e em E.

k jogadores, cada um com um par de vértices (s_i, t_i).

Estratégia do jogador i: caminho de s_i a t_i em G.

Jogo de conexão global

Seja $G = (V, E)$ um digrafo com custo c_e para cada e em E.

k jogadores, cada um com um par de vértices (s_i, t_i).

Estratégia do jogador i: caminho de s_i a t_i em G.

custo para i do vetor de estratégias $S = (P_1, \ldots, P_k)$:

$$\mathrm{custo}_i(S) \;=\; \sum_{e \in P_i} \frac{c_e}{k_e},$$

onde k_e é o número de caminhos em S que usam e.

Jogo de conexão global

Seja $G = (V, E)$ um digrafo com custo c_e para cada e em E.

k jogadores, cada um com um par de vértices (s_i, t_i).

Estratégia do jogador i: caminho de s_i a t_i em G.

custo para i do vetor de estratégias $S = (P_1, \ldots, P_k)$:

$$\mathrm{custo}_i(S) \;=\; \sum_{e \in P_i} \frac{c_e}{k_e},$$

onde k_e é o número de caminhos em S que usam e.

Custo social $\mathrm{cs}(S)$: soma do custo das arestas em $\cup_i P_i$.

Problema de Steiner Generalizado

Seja $G = (V, E)$ um digrafo com custo c_e para cada e em E, e pares de vértices (s_i, t_i), para $i = 1, \ldots, k$.

Problema de Steiner Generalizado

Seja $G = (V, E)$ um digrafo com custo c_e para cada e em E, e pares de vértices (s_i, t_i), para $i = 1, \ldots, k$.

Problema: Encontrar um subgrafo de G de custo mínimo que contém um caminho de s_i a t_i, para $i = 1, \ldots, k$.

Problema de Steiner Generalizado

Seja $G = (V, E)$ um digrafo com custo c_e para cada e em E, e pares de vértices (s_i, t_i), para $i = 1, \ldots, k$.

Problema: Encontrar um subgrafo de G de custo mínimo que contém um caminho de s_i a t_i, para $i = 1, \ldots, k$.

Esse problema é NP-difícil, mas
é com ele que vamos comparar o custo dos equilíbrios.

Problema de Steiner Generalizado

Seja $G = (V, E)$ um digrafo com custo c_e para cada e em E, e pares de vértices (s_i, t_i), para $i = 1, \ldots, k$.

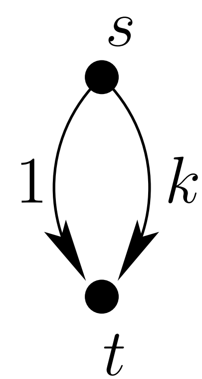
Problema: Encontrar um subgrafo de G de custo mínimo que contém um caminho de s_i a t_i, para $i = 1, \ldots, k$.

Esse problema é NP-difícil, mas
é com ele que vamos comparar o custo dos equilíbrios.

Ou seja, o custo social ótimo do jogo é o custo da solução do correspondente problema de Steiner generalizado.

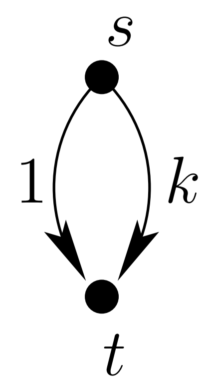
Exemplo

k jogadores, todos com o mesmo s e t.



Exemplo

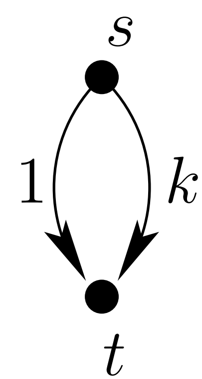
k jogadores, todos com o mesmo s e t.



Ótimo: todos pela aresta de custo 1.

Exemplo

k jogadores, todos com o mesmo s e t.

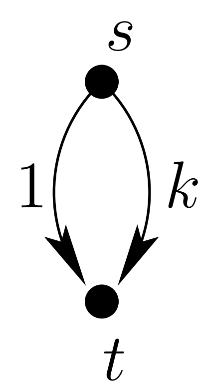


Ótimo: todos pela aresta de custo 1.

Isso é um equilíbrio: $\mathrm{PoE} = 1$

Exemplo

k jogadores, todos com o mesmo s e t.



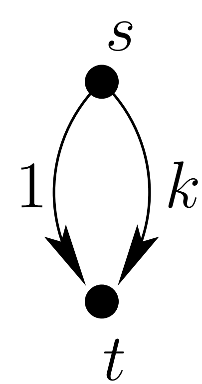
Ótimo: todos pela aresta de custo 1.

Isso é um equilíbrio: $\mathrm{PoE} = 1$

Outro equilíbrio: todos pela aresta de custo k...

Exemplo

k jogadores, todos com o mesmo s e t.



Ótimo: todos pela aresta de custo 1.

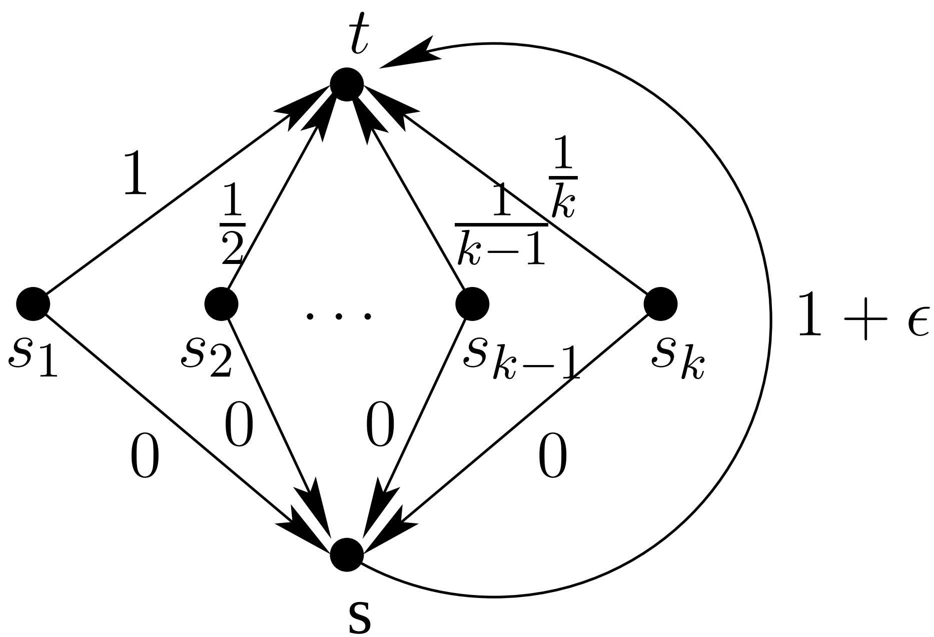
Isso é um equilíbrio: $\text{PoE} = 1$

Outro equilíbrio: todos pela aresta de custo k...

$\text{PoA} = k$

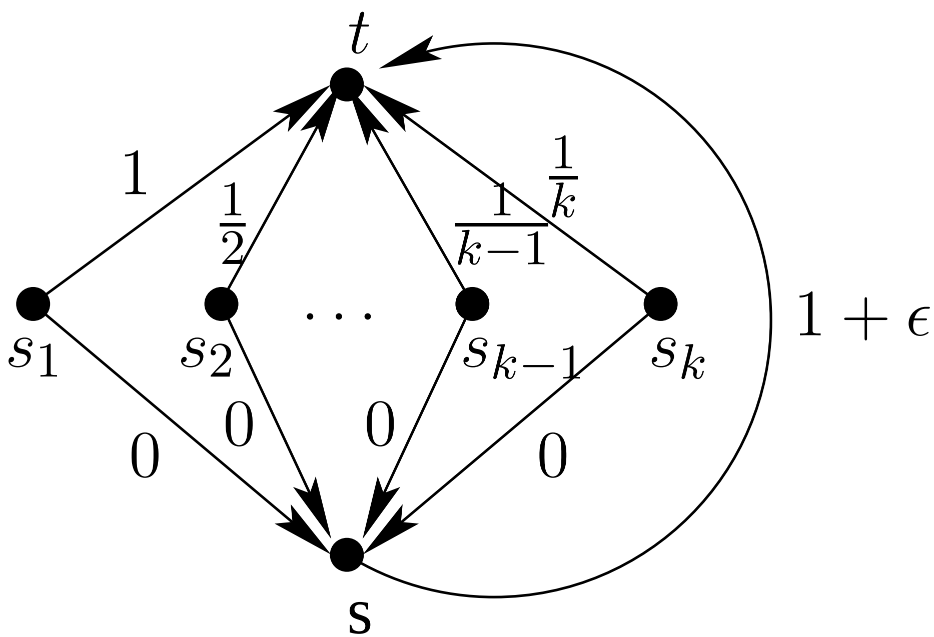
Exemplo

k jogadores, todos com o mesmo t.



Exemplo

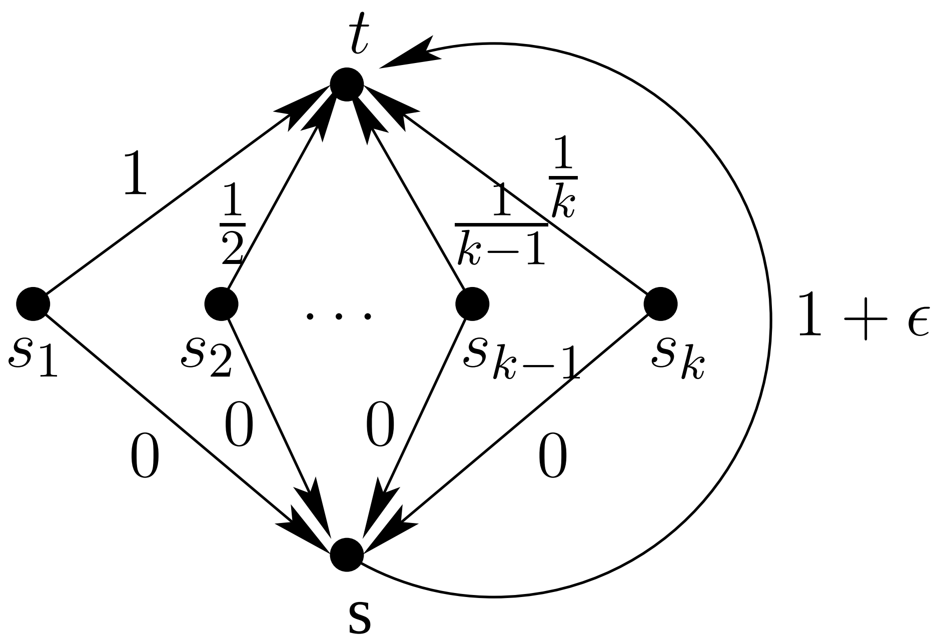
k jogadores, todos com o mesmo t.



Ótimo: todos por s, a um custo total de $1 + \epsilon$.

Exemplo

k jogadores, todos com o mesmo t.

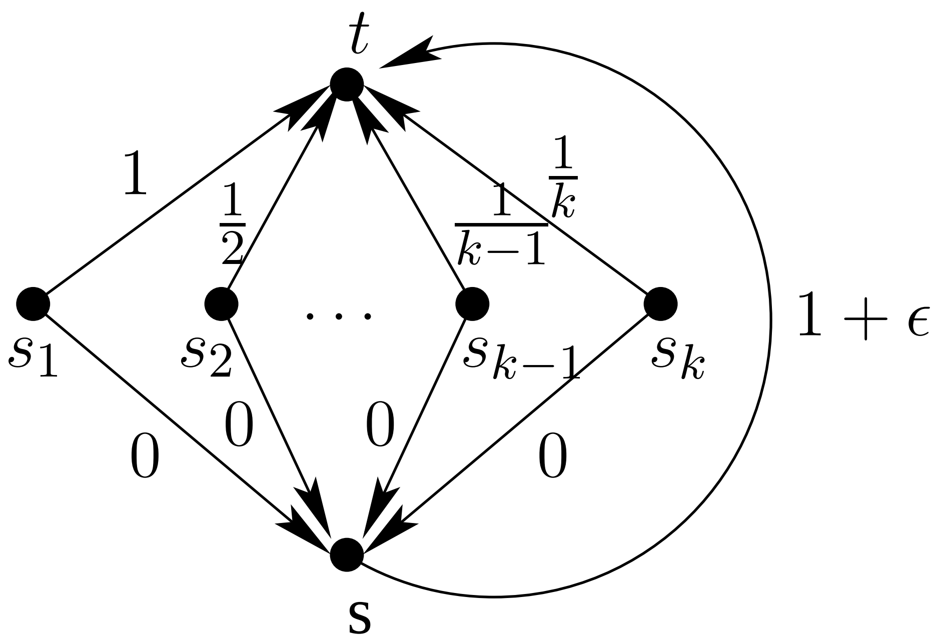


Ótimo: todos por s, a um custo total de $1+\epsilon$.

Mas isso não é um equilíbrio: k está insatisfeito.

Exemplo

k jogadores, todos com o mesmo t.



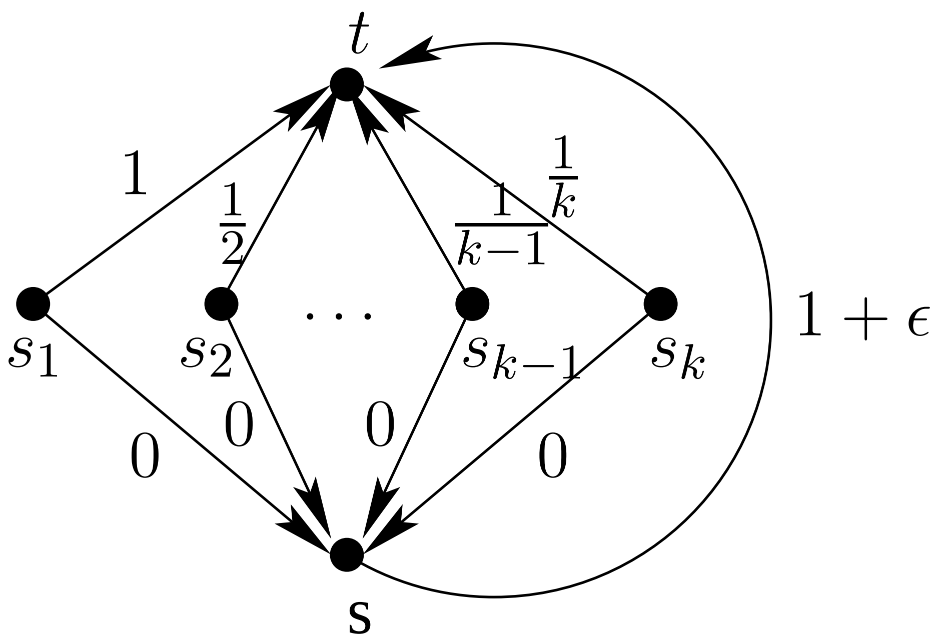
Ótimo: todos por s, a um custo total de $1+\epsilon$.

Mas isso não é um equilíbrio: k está insatisfeito.

Único equilíbrio: todos diretamente para t...

Exemplo

k jogadores, todos com o mesmo t.



Ótimo: todos por s, a um custo total de $1+\epsilon$.

Mas isso não é um equilíbrio: k está insatisfeito.

Único equilíbrio: todos diretamente para t...

$\text{cs} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} = H_k$ e portanto $\text{PoE} = \text{PoA} = H_k$.

Aula que vem

Teorema: Qualquer instância do jogo de conexão global tem um equilíbrio puro.

Aula que vem

Teorema: Qualquer instância do jogo de conexão global tem um equilíbrio puro.

Teorema: O preço da estabilidade do jogo de conexão global com k jogadores é no máximo H_k.

Aula que vem

Teorema: Qualquer instância do jogo de conexão global tem um equilíbrio puro.

Teorema: O preço da estabilidade do jogo de conexão global com k jogadores é no máximo H_k.

A prova destes resultados usa função potencial.

Aula que vem

Teorema: Qualquer instância do jogo de conexão global tem um equilíbrio puro.

Teorema: O preço da estabilidade do jogo de conexão global com k jogadores é no máximo H_k.

A prova destes resultados usa função potencial.

A prova é mais geral, para jogos de potencial.