Leilões ascendentes

Subclasse dos chamados leilões iterativos.

Leilões ascendentes

Subclasse dos chamados leilões iterativos.

Preços só podem subir.

Leilões ascendentes

Subclasse dos chamados leilões iterativos.

Preços só podem subir.

Ideia:

Leiloeiro começa com os preços nulos (ou no mínimo).

Leilões ascendentes

Subclasse dos chamados leilões iterativos.

Preços só podem subir.

Ideia:

Leiloeiro começa com os preços nulos (ou no mínimo).

Cada participante aposta em um dos seus conjuntos mais desejados de itens, ou seja, em uma demanda.

Leilões ascendentes

Subclasse dos chamados leilões iterativos.

Preços só podem subir.

Ideia:

Leiloeiro começa com os preços nulos (ou no mínimo).

Cada participante aposta em um dos seus conjuntos mais desejados de itens, ou seja, em uma demanda.

Leiloeiro aumenta alguns preços de algum modo, até decidir por uma alocação.

Leilões ascendentes

Preços por itens

Leilões ascendentes

Preços por itens

Valoração v satisfaz a propriedade dos substitutos se, para todo par de preços dos itens $q \geq p$,

Leilões ascendentes

Preços por itens

Valoração v satisfaz a propriedade dos substitutos se, para todo par de preços dos itens $q \geq p$, a demanda com preços q contem todos os itens da demanda com preço p que mantiveram seus preços.

Leilões ascendentes

Preços por itens

Valoração v satisfaz a propriedade dos substitutos se, para todo par de preços dos itens $q \geq p$, a demanda com preços q contem todos os itens da demanda com preço p que mantiveram seus preços.

Formalmente: para todo $A \in \arg\max_S \{v(S) - \sum_{j \in S} p_j\}$, existe $D \in \arg\max_S \{v(S) - \sum_{j \in S} q_j\}$ tal que $D \supseteq \{j \in A : p_j = q_j\}$.

Leilões ascendentes

Preços por itens

Valoração v satisfaz a propriedade dos substitutos se, para todo par de preços dos itens $q \geq p$, a demanda com preços q contem todos os itens da demanda com preço p que mantiveram seus preços.

Formalmente: para todo $A \in \arg\max_S \{v(S) - \sum_{j \in S} p_j\}$, existe $D \in \arg\max_S \{v(S) - \sum_{j \in S} q_j\}$ tal que $D \supseteq \{j \in A : p_j = q_j\}$.

Apenas itens cujo preço subiu podem sair da demanda.

Leilão de preços ascendentes de itens

PREÇOSASCENDENTES (m, n)

para $j \leftarrow 1$ **até** m **faça** $p_j \leftarrow 0$
para $i \leftarrow 1$ **até** n **faça** $S_i \leftarrow \emptyset$
enquanto S_i não é demanda para algum i **faça**
    seja D_i uma demanda de i para preços
      p_j para $j \in S_i$ e $p_j + \epsilon$ para $j \notin S_i$
    se $D_i \neq S_i$ para algum i
        então para $j \in D_i \setminus S_i$ **faça** $p_j \leftarrow p_j + \epsilon$
            $S_i \leftarrow D_i$
            para $k \leftarrow 1$ **até** n **faça**
                se $k \neq i$ **então** $S_k \leftarrow S_k \setminus D_i$
devolva $S_1, \ldots, S_n$

Leilão de preços ascendentes de itens

PREÇOSASCENDENTES (m, n)

para $j \leftarrow 1$ **até** m **faça** $p_j \leftarrow 0$
para $i \leftarrow 1$ **até** n **faça** $S_i \leftarrow \emptyset$
enquanto S_i não é demanda para algum i **faça**
    seja D_i uma demanda de i para preços
      p_j para $j \in S_i$ e $p_j + \epsilon$ para $j \notin S_i$
    se $D_i \neq S_i$ para algum i
      então para $j \in D_i \setminus S_i$ **faça** $p_j \leftarrow p_j + \epsilon$
        $S_i \leftarrow D_i$
        para $k \leftarrow 1$ **até** n **faça**
          se $k \neq i$ **então** $S_k \leftarrow S_k \setminus D_i$
devolva $S_1, \ldots, S_n$

Termina quando nenhum item que está tentativamente com um participante está na demanda de outro.

Leilão de preços ascendentes de itens

PREÇOSASCENDENTES (m, n)

para $j \leftarrow 1$ **até** m **faça** $p_j \leftarrow 0$
para $i \leftarrow 1$ **até** n **faça** $S_i \leftarrow \emptyset$
enquanto S_i não é demanda para algum i **faça**
  seja D_i uma demanda de i para preços
    p_j para $j \in S_i$ e $p_j + \epsilon$ para $j \notin S_i$
  se $D_i \neq S_i$ para algum i
    então para $j \in D_i \setminus S_i$ **faça** $p_j \leftarrow p_j + \epsilon$
      $S_i \leftarrow D_i$
      para $k \leftarrow 1$ **até** n **faça**
        se $k \neq i$ **então** $S_k \leftarrow S_k \setminus D_i$
devolva $S_1, \ldots, S_n$

Termina próximo a um equilíbrio Walrasiano.

Equilíbrio ϵ-Walrasiano

Alocação $S_1, \ldots, S_n$ e preços $p_1, \ldots, p_m$ são equilíbrio ϵ-Walrasiano se

- $\cup_i S_i \supseteq \{j : p_j > 0\}$ e
- S_i para cada i é uma demanda de i para os preços p_j para $j \in S_i$ e $p_j + \epsilon$ para $j \notin S_i$.

Equilíbrio ϵ-Walrasiano

Alocação $S_1, \ldots, S_n$ e preços $p_1, \ldots, p_m$ são equilíbrio ϵ-Walrasiano se

- $\cup_i S_i \supseteq \{j : p_j > 0\}$ e
- S_i para cada i é uma demanda de i para os preços p_j para $j \in S_i$ e $p_j + \epsilon$ para $j \notin S_i$.

Teorema: Para participantes com valoração de substitutos, o algoritmo PreçosAscendentes produz um equilíbrio ϵ-Walrasiano. Assim a alocação produzida atinge um bem-estar social a $n\epsilon$ do bem-estar social ótimo.

Equilíbrio ϵ-Walrasiano

Alocação $S_1, \ldots, S_n$ e preços $p_1, \ldots, p_m$ são equilíbrio ϵ-Walrasiano se

- $\cup_i S_i \supseteq \{j : p_j > 0\}$ e
- S_i para cada i é uma demanda de i para os preços p_j para $j \in S_i$ e $p_j + \epsilon$ para $j \notin S_i$.

Teorema: Para participantes com valoração de substitutos, o algoritmo PREÇOSASCENDENTES produz um equilíbrio ϵ-Walrasiano. Assim a alocação produzida atinge um bem-estar social a $n\epsilon$ do bem-estar social ótimo.

Afirmação:
Para todo participante i, durante todo o algoritmo, $S_i \subseteq D_i$.

Relaxação linear inteira

LP: encontrar x que

maximizem $\sum_{i=1}^{n} \sum_{S \subseteq [m]} x_{i,S} v_i(S)$

sujeitos a $\sum_{i=1}^{n} \sum_{S \subseteq [m]: j \in S} x_{i,S} \leq 1$ para cada $j \in [m]$

$\sum_{S \subseteq [m]} x_{i,S} \leq 1$ para cada $i \in [n]$

$x_{i,S} \geq 0$ para cada $i \in [n]$ e cada $S \subseteq [m]$.

Dual: encontrar u e p que

minimizem $\sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{j \in [m]} p_j$

sujeitos a $u_i + \sum_{j \in S} p_j \geq v_i(S)$ para cada $S \subseteq [m]$

$u_i \geq 0,$ $p_j \geq 0$ para cada $i \in [n]$ e $j \in [m]$.

Os nomes u_i e p_j são propositais, pois,
quando há solução ótima inteira,
estes valores têm exatamente estas interpretações.

Equilíbrio ϵ-Walrasiano

Alocação $S_1, \ldots, S_n$ e preços $p_1, \ldots, p_m$ são equilíbrio ϵ-Walrasiano se

- $\cup_i S_i \supseteq \{j : p_j > 0\}$ e
- S_i para cada i é uma demanda de i para os preços p_j para $j \in S_i$ e $p_j + \epsilon$ para $j \notin S_i$.

Teorema: Para participantes com valoração de substitutos, o algoritmo PREÇOSASCENDENTES produz um equilíbrio ϵ-Walrasiano. Assim a alocação produzida atinge um bem-estar social a $n\epsilon$ do bem-estar social ótimo.

Equilíbrio ϵ-Walrasiano

Alocação $S_1, \ldots, S_n$ e preços $p_1, \ldots, p_m$
são equilíbrio ϵ-Walrasiano se

- $\cup_i S_i \supseteq \{j : p_j > 0\}$ e
- S_i para cada i é uma demanda de i para os preços p_j para $j \in S_i$ e $p_j + \epsilon$ para $j \notin S_i$.

Teorema: Para participantes com valoração de substitutos, o algoritmo PreçosAscendentes produz um equilíbrio ϵ-Walrasiano. Assim a alocação produzida atinge um bem-estar social a $n\epsilon$ do bem-estar social ótimo.

Infelizmente, não é à prova de estratégia.

Exemplo

Considere dois itens, a e b, e dois jogadores, Alice e Bob, com as seguintes valorações

	$v(a)$	$v(b)$	$v(ab)$
Alice	4	4	4
Bob	5	5	10

Exemplo

Considere dois itens, a e b, e dois jogadores, Alice e Bob, com as seguintes valorações

	$v(a)$	$v(b)$	$v(ab)$
Alice	4	4	4
Bob	5	5	10

Para estas valorações, o leilão do algoritmo termina no equilíbrio Walrasiano, com preços $p_a = p_b = 4$, e Bob recebendo os dois itens, com utilidade 2.

Exemplo

Considere dois itens, a e b, e dois jogadores, Alice e Bob, com as seguintes valorações

	$v(a)$	$v(b)$	$v(ab)$
Alice	4	4	4
Bob	5	5	10

Para estas valorações, o leilão do algoritmo termina no equilíbrio Walrasiano, com preços $p_a = p_b = 4$, e Bob recebendo os dois itens, com utilidade 2.

Se Bob declarasse sua valoração apenas por a, então o algoritmo deixaria a com Bob e b com Alice, os dois pelo preço nulo.

Equilíbrio ϵ-Walrasiano

Alocação $S_1, \ldots, S_n$ e preços $p_1, \ldots, p_m$ são equilíbrio ϵ-Walrasiano se

- $\cup_i S_i \supseteq \{j : p_j > 0\}$ e
- S_i para cada i é uma demanda de i para os preços p_j para $j \in S_i$ e $p_j + \epsilon$ para $j \notin S_i$.

Teorema: Para participantes com valoração de substitutos, o algoritmo PreçosAscendentes produz um equilíbrio ϵ-Walrasiano. Assim a alocação produzida atinge um bem-estar social a $n\epsilon$ do bem-estar social ótimo.

Equilíbrio ϵ-Walrasiano

Alocação $S_1, \ldots, S_n$ e preços $p_1, \ldots, p_m$
são equilíbrio ϵ-Walrasiano se

- $\cup_i S_i \supseteq \{j : p_j > 0\}$ e
- S_i para cada i é uma demanda de i para os preços p_j para $j \in S_i$ e $p_j + \epsilon$ para $j \notin S_i$.

Teorema: Para participantes com valoração de substitutos, o algoritmo PreçosAscendentes produz um equilíbrio ϵ-Walrasiano. Assim a alocação produzida atinge um bem-estar social a $n\epsilon$ do bem-estar social ótimo.

É à prova de estratégia para o caso em que cada participante levar apenas um item (unit demand case).

Leilões ascendentes

Preços por bandos de itens:

Leilões ascendentes

Preços por bandos de itens:
Para cada i e cada $S \subseteq [m]$, um preço $p_i(S)$.

Leilões ascendentes

Preços por bandos de itens:

Para cada i e cada $S \subseteq [m]$, um preço $p_i(S)$.

Demanda para i: conjunto $D \in \arg\max_S \{v_i(S) - p_i(S)\}$.

Leilões ascendentes

Preços por bandos de itens:
Para cada i e cada $S \subseteq [m]$, um preço $p_i(S)$.

Demanda para i: conjunto $D \in \arg\max_S \{v_i(S) - p_i(S)\}$.

Equilíbrio competitivo:

preços p e alocação $S = (S_1, \ldots, S_n)$ tq

- para todo i, conjunto S_i é uma demanda par a i;
- alocação maximiza o lucro do leiloeiro para p:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(S_i) \;\geq\; \sum_{i=1}^{n} p_i(T_i),$$

para qualquer outra alocação $T = (T_1, \ldots, T_n)$.

Leilões ascendentes

Preços por bandos de itens:
Para cada i e cada $S \subseteq [m]$, um preço $p_i(S)$.

Demanda para i: conjunto $D \in \arg\max_S \{v_i(S) - p_i(S)\}$.

Equilíbrio competitivo:

preços p e alocação $S = (S_1, \ldots, S_n)$ tq

- para todo i, conjunto S_i é uma demanda par a i;
- alocação maximiza o lucro do leiloeiro para p:

$$\sum_{i=1}^n p_i(S_i) \;\geq\; \sum_{i=1}^n p_i(T_i),$$

  para qualquer outra alocação $T = (T_1, \ldots, T_n)$.

Proposição: Em qualquer equilíbrio competitivo,
a alocação maximiza o bem-estar social.

Leilão de preços ascendentes de itens

PREÇOSASCENDENTES (m, n)

para $j \leftarrow 1$ **até** m e $S \subseteq [m]$ **faça** $p_i(S) \leftarrow 0$
repita
    encontre alocação $T = (T_1, \ldots, T_n)$ que maximiza lucro do leiloeiro com $p_i(T_i) > 0$ para todo $T_i \neq \emptyset$.
    $L \leftarrow \{i : T_i = \emptyset\}$ $\triangleright$ perdedores
    para cada $i \in L$ **faça**
        seja D_i uma demanda de i para os preços p_i
    se $D_i = \emptyset$ para todo i
        então devolva T e p
    para cada $i \in L$ tq $D_i \neq \emptyset$ **faça**
        $p_i(D_i) \leftarrow p_i(D_i) + \epsilon$

Leilão de preços ascendentes de itens

PREÇOSASCENDENTES (m, n)

para $j \leftarrow 1$ **até** m e $S \subseteq [m]$ **faça** $p_i(S) \leftarrow 0$
repita
    encontre alocação $T = (T_1, \ldots, T_n)$ que maximiza lucro do leiloeiro com $p_i(T_i) > 0$ para todo $T_i \neq \emptyset$.
    $L \leftarrow \{i : T_i = \emptyset\}$ ▷ perdedores
    para cada $i \in L$ **faça**
        seja D_i uma demanda de i para os preços p_i
    se $D_i = \emptyset$ para todo i
        então devolva T e p
    para cada $i \in L$ tq $D_i \neq \emptyset$ **faça**
        $p_i(D_i) \leftarrow p_i(D_i) + \epsilon$

ϵ-demanda para i: conjunto D tq
$v_i(D) - p_i(D) \leq v_i(S) - p_i(S) - \epsilon$ para todo $S \subseteq [m]$.

Leilão de preços ascendentes de itens

PREÇOSASCENDENTES (m, n)

```
para j ← 1 até m e S ⊆ [m] faça p_i(S) ← 0
repita
    encontre alocação T = (T_1, ..., T_n) que maximiza
    lucro do leiloeiro com p_i(T_i) > 0 para todo T_i ≠ ∅.
    L ← {i : T_i = ∅}        ▷ perdedores
    para cada i ∈ L faça
        seja D_i uma demanda de i para os preços p_i
    se D_i = ∅ para todo i
        então devolva T e p
    para cada i ∈ L tq D_i ≠ ∅ faça
        p_i(D_i) ← p_i(D_i) + ε
```

ϵ-demanda para i: conjunto D tq

$v_i(D) - p_i(D) \leq v_i(S) - p_i(S) - \epsilon$ para todo $S \subseteq [m]$.

Equilíbrio ϵ-competitivo: cada i recebe ϵ-demanda.

Leilão de preços ascendentes de itens

PREÇOSASCENDENTES (m, n)

para $j \leftarrow 1$ **até** m e $S \subseteq [m]$ **faça** $p_i(S) \leftarrow 0$
repita
  encontre alocação $T = (T_1, \ldots, T_n)$ que maximiza lucro do leiloeiro com $p_i(T_i) > 0$ para todo $T_i \neq \emptyset$.
  $L \leftarrow \{i : T_i = \emptyset\}$ $\triangleright$ perdedores
  para cada $i \in L$ **faça**
    seja D_i uma demanda de i para os preços p_i
  se $D_i = \emptyset$ para todo i
    então devolva T e p
  para cada $i \in L$ tq $D_i \neq \emptyset$ **faça**
    $p_i(D_i) \leftarrow p_i(D_i) + \epsilon$

ϵ-demanda para i: conjunto D tq
$v_i(D) - p_i(D) \leq v_i(S) - p_i(S) - \epsilon$ para todo $S \subseteq [m]$.
Equilíbrio ϵ-competitivo: cada i recebe ϵ-demanda.
O algoritmo termina com um equilíbrio ϵ-competitivo.