# Mecanismos

$n$: número de participantes

$A$: conjunto de alternativas

$v_i : A \to \mathbb{R}$ valoração das alternativas para $i$

$V_i \subseteq \mathbb{R}^A$: conjunto das possíveis valorações de $i$

Mecanismo: função de escolha social $f : V_1 \times \cdots \times V_n \to A$ e vetor de preços $p_1, \ldots, p_n$ que cada participante paga, onde $p_i : V_1 \times \cdots \times V_n \to \mathbb{R}$.

Mecanismo $(f, p)$ é à prova de estratégia se, para todo $i$, e todo $v_1, \ldots, v_n$ e $v_i'$, para $a = f(v_{-i}, v_i)$ e $a' = f(v_{-i}, v_i')$, vale que $v_i(a) - p_i(v_{-i}, v_i) \geq v_i(a') - p_i(v_{-i}, v_i')$.

O valor $v_i(a) - p_i(v_1, \ldots, v_n)$ é a utilidade de $i$ para $v_1, \ldots, v_n$.

# Caracterização direta

Mecanismo $(f, p)$ é à prova de estratégia se, para todo $i$, e todo $v_1, \ldots, v_n$ e $v_i'$, para $a = f(v_{-i}, v_i)$ e $a' = f(v_{-i}, v_i')$, vale que $v_i(a) - p_i(v_{-i}, v_i) \geq v_i(a') - p_i(v_{-i}, v_i')$.

Proposição: Um mecanismo é à prova de estratégia sse satisfaz as seguintes condições para todo $i$ e $v_{-i}$:

(a) Para todo $a \in A$, existe preço $p_a$ tq $p_i(v_i, v_{-i}) = p_a$ para todo $v_i$ com $f(v_i, v_{-i}) = a$.

(b) Para todo $v_i$, $f(v_i, v_{-i}) \in \arg\max\{v_i(a) - p_a\}$, onde o $\max$ é sobre alternativas da imagem de $f(\cdot, v_{-i})$.

Prova feita na aula.

# Mecanismos VCG e regra de Clarke

Mecanismo $(f, p)$ é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to I\!R$ tq
  $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Pagamentos de Clarke: Se $a = f(v_1, \ldots, v_n)$,

$$p_i(v_1, \ldots, v_n) = \max_b \sum_{j \neq i} v_j(b) - \sum_{j \neq i} v_j(a).$$

Propriedades:

- Mecanismo é (ex-post) individualmente racional se $u_i \geq 0$ para todo $i$.
- Mecanismo não tem transferências positivas se $p_i \geq 0$ para todo $i$.

# Mecanismos VCG

Mecanismo $(f, p)$ é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \rightarrow I\!R$ tq $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

# Mecanismos VCG

Mecanismo $(f, p)$ é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to I\!R$ tq $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Sabemos que mecanismos VCG são à prova de estratégia.

# Mecanismos VCG

Mecanismo $(f, p)$ é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$ tq $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Sabemos que mecanismos VCG são à prova de estratégia.

Vamos mostrar basicamente que
qualquer mecanismo à prova de estratégia
que maximize o bem-estar social é VCG.

# Unicidade dos preços

Proposição: Um mecanismo é à prova de estratégia sse satisfaz as seguintes condições para todo $i$ e $v_{-i}$:

(a) Para todo $a \in A$, existe preço $p_a$ tq $p_i(v_i, v_{-i}) = p_a$ para todo $v_i$ com $f(v_i, v_{-i}) = a$.

(b) Para todo $v_i$, $f(v_i, v_{-i}) \in \arg\max\{v_i(a) - p_a\}$, onde o $\max$ é sobre alternativas da imagem de $f(\cdot, v_{-i})$.

Teorema: Se cada $V_i$ é conexo no espaço Euclideano e $(f, p)$ é à prova de estratégia, então qq mecanismo $(f, p')$ é à prova de estratégia sse existem $h_i : V_{-i} \rightarrow I\!R$ tq $p'_i(v_1, \ldots, v_n) = p_i(v_1, \ldots, v_n) + h_i(v_{-i})$ para toda $v_1, \ldots, v_n$.

Prova feita na aula.