Notação e definições

n: número de eleitores

A: conjunto de alternativas (os candidatos)

L: conjunto de permutações de A (ordens de preferência)

Cada eleitor i associado a um $\succ_i$ em L.

Função de bem-estar social: $F : L^n \rightarrow L$

F é unânime se $F(\succ, \ldots, \succ) \ = \ \succ$ para todo $\succ$ em L.

Eleitor i é ditador em F se

$$F(\succ_1, \ldots, \succ_n) \ = \ \succ_i \text{ para todos } \succ_1, \ldots, \succ_n \text{ em } L.$$

F é uma ditadura se há um ditador em F.

Teorema de Arrow

F: função de bem-estar social

F é unânime se $F(\succ, \ldots, \succ) = \succ$ para todo $\succ \in L$.

Eleitor i é ditador para F se

$$F(\succ_1, \ldots, \succ_n) = \succ_i \text{ para todos } \succ_1, \ldots, \succ_n \text{ em } L.$$

F é uma ditadura se há um ditador para F.

F é independente de alternativas irrelevantes se $\succ = F(\succ_1, \ldots, \succ_n)$ e $\succ' = F(\succ'_1, \ldots, \succ'_n)$ então $a \succ_i b$ sse $a \succ'_i b$ para todo i implica que $a \succ b$ sse $a \succ' b$.

Teorema de Arrow

F: função de bem-estar social

F é unânime se $F(\succ, \ldots, \succ) = \succ$ para todo $\succ \in L$.

Eleitor i é ditador para F se

$$F(\succ_1, \ldots, \succ_n) = \succ_i \text{ para todos } \succ_1, \ldots, \succ_n \text{ em } L.$$

F é uma ditadura se há um ditador para F.

F é independente de alternativas irrelevantes se
$\succ = F(\succ_1, \ldots, \succ_n)$ e $\succ' = F(\succ'_1, \ldots, \succ'_n)$ então
$a \succ_i b$ sse $a \succ'_i b$ para todo i implica que $a \succ b$ sse $a \succ' b$.

Teorema de Arrow: Toda função de bem-estar social sobre A com $|A| \geq 3$ que satisfaz unanimidade e independência de alternativas irrelevantes é uma ditadura.

Prova do Teorema de Arrow

Teorema de Arrow: Toda função de bem-estar social F sobre A com $|A| \geq 3$ que satisfaz unanimidade e independência de alternativas irrelevantes é uma ditadura.

Um eleitor é pivotal se pode fazer um candidato ir da base até o topo da ordem resultante $\succ$.

Prova do Teorema de Arrow

Teorema de Arrow: Toda função de bem-estar social F sobre A com $|A| \geq 3$ que satisfaz unanimidade e independência de alternativas irrelevantes é uma ditadura.

Um eleitor é pivotal se pode fazer um candidato ir da base até o topo da ordem resultante $\succ$.

Duas partes:

- existe um eleitor que é pivotal (aula passada)
- um eleitor pivotal é ditador

Prova do Teorema de Arrow

Teorema de Arrow: Toda função de bem-estar social F sobre A com $|A| \geq 3$ que satisfaz unanimidade e independência de alternativas irrelevantes é uma ditadura.

Um eleitor é pivotal se pode fazer um candidato ir da base até o topo da ordem resultante $\succ$.

Duas partes:

- existe um eleitor que é pivotal (aula passada)
- um eleitor pivotal é ditador

Queremos mostrar que, para algum i pivotal,

$$\succ_i \;= F(\succ_1, \ldots, \succ_n) \text{ para todas } \succ_1, \ldots, \succ_n.$$

Segunda parte da prova

Fixe $\succ_1, \ldots, \succ_n$, e seja $\succ\ = F(\succ_1, \ldots, \succ_n)$.

Para cada b, seja $n(b)$ o eleitor pivotal obtido de b e denote por $\succ^b$ a ordem $\succ_j$ onde $j = n(b)$.

Segunda parte da prova

Fixe $\succ_1, \ldots, \succ_n$, e seja $\succ \; = F(\succ_1, \ldots, \succ_n)$.

Para cada b, seja $n(b)$ o eleitor pivotal obtido de b e denote por $\succ^b$ a ordem $\succ_j$ onde $j = n(b)$.

Vamos mostrar que $\succ \; = \; \succ^b$ para algum b.

Segunda parte da prova

Fixe $\succ_1, \ldots, \succ_n$, e seja $\succ\ = F(\succ_1, \ldots, \succ_n)$.

Para cada b, seja $n(b)$ o eleitor pivotal obtido de b e denote por $\succ^b$ a ordem $\succ_j$ onde $j = n(b)$.

Vamos mostrar que $\succ\ =\ \succ^b$ para algum b.

Fixe b e sejam a e c distintos de b tais que $a \succ^b c$.

Segunda parte da prova

Fixe $\succ_1, \ldots, \succ_n$, e seja $\succ\ = F(\succ_1, \ldots, \succ_n)$.

Para cada b, seja $n(b)$ o eleitor pivotal obtido de b
e denote por $\succ^b$ a ordem $\succ_j$ onde $j = n(b)$.

Vamos mostrar que $\succ\ =\ \succ^b$ para algum b.

Fixe b e sejam a e c distintos de b tais que $a \succ^b c$.

Coloque b no topo em $\succ_1, \ldots, \succ_{j-1}$ e
na base em $\succ_j, \ldots, \succ_n$.

Então b está na base da ordem de F para tais ordens.

Segunda parte da prova

Fixe $\succ_1, \ldots, \succ_n$, e seja $\succ \; = F(\succ_1, \ldots, \succ_n)$.

Para cada b, seja $n(b)$ o eleitor pivotal obtido de b
e denote por $\succ^b$ a ordem $\succ_j$ onde $j = n(b)$.

Vamos mostrar que $\succ \; = \; \succ^b$ para algum b.

Fixe b e sejam a e c distintos de b tais que $a \succ^b c$.

Coloque b no topo em $\succ_1, \ldots, \succ_{j-1}$ e
na base em $\succ_j, \ldots, \succ_n$.

Então b está na base da ordem de F para tais ordens.

Coloque c abaixo de b nas ordens de 1 a j, de modo que c passe para a base da ordem de F para tais ordens.

Segunda parte da prova

Fixe $\succ_1, \ldots, \succ_n$, e seja $\succ \; = F(\succ_1, \ldots, \succ_n)$.

Para cada b, seja $n(b)$ o eleitor pivotal obtido de b e denote por $\succ^b$ a ordem $\succ_j$ onde $j = n(b)$.

Vamos mostrar que $\succ \; = \; \succ^b$ para algum b.

Fixe b e sejam a e c distintos de b tais que $a \succ^b c$.

Coloque b no topo em $\succ_1, \ldots, \succ_{j-1}$ e
na base em $\succ_j, \ldots, \succ_n$.

Então b está na base da ordem de F para tais ordens.

Coloque c abaixo de b nas ordens de 1 a j, de modo que c passe para a base da ordem de F para tais ordens.

Note que a ordem entre a e c se manteve em toda $\succ_i$, logo $a \succ c$.

Segunda parte da prova

Fixe $\succ_1, \ldots, \succ_n$, e seja $\succ\ = F(\succ_1, \ldots, \succ_n)$.

Para cada b, seja $n(b)$ o eleitor pivotal obtido de b e denote por $\succ^b$ a ordem $\succ_j$ onde $j = n(b)$.

Resumo: $\succ$ coincide com $\succ^b$ exceto possivelmente por b.

Segunda parte da prova

Fixe $\succ_1, \ldots, \succ_n$, e seja $\succ \; = F(\succ_1, \ldots, \succ_n)$.

Para cada b, seja $n(b)$ o eleitor pivotal obtido de b e denote por $\succ^b$ a ordem $\succ_j$ onde $j = n(b)$.

Resumo: $\succ$ coincide com $\succ^b$ exceto possivelmente por b.

Logo, se existem b e b' tq $\succ^b \; = \; \succ^{b'}$, então $\succ \; = \; \succ^b \; = \; \succ^{b'}$.

Segunda parte da prova

Fixe $\succ_1, \ldots, \succ_n$, e seja $\succ \; = F(\succ_1, \ldots, \succ_n)$.

Para cada b, seja $n(b)$ o eleitor pivotal obtido de b e denote por $\succ^b$ a ordem $\succ_j$ onde $j = n(b)$.

Resumo: $\succ$ coincide com $\succ^b$ exceto possivelmente por b.

Logo, se existem b e b' tq $\succ^b \; = \; \succ^{b'}$, então $\succ \; = \; \succ^b \; = \; \succ^{b'}$.

Senão, derivamos uma contradição:

Segunda parte da prova

Fixe $\succ_1, \ldots, \succ_n$, e seja $\succ \; = F(\succ_1, \ldots, \succ_n)$.

Para cada b, seja $n(b)$ o eleitor pivotal obtido de b
e denote por $\succ^b$ a ordem $\succ_j$ onde $j = n(b)$.

Resumo: $\succ$ coincide com $\succ^b$ exceto possivelmente por b.

Logo, se existem b e b' tq $\succ^b \; = \; \succ^{b'}$, então $\succ \; = \; \succ^b \; = \; \succ^{b'}$.

Senão, derivamos uma contradição:

Tome $\succ^a$ com $b \succ^a c$,
$\succ^c$ com $a \succ^c b$, e
$\succ^b$ com $c \succ^b a$.

$\succ$ não pode concordar com as três.

Mecanismos

n: número de participantes

A: conjunto de alternativas

$v_i : A \to \mathbb{R}$ valoração das alternativas para i

$V_i \subseteq \mathbb{R}^A$: conjunto das possíveis valorações de i

Mecanismos

n: número de participantes

A: conjunto de alternativas

$v_i : A \rightarrow I\!R$ valoração das alternativas para i

$V_i \subseteq I\!R^A$: conjunto das possíveis valorações de i

Mecanismo: função de escolha social $f : V_1 \times \cdots \times V_n \rightarrow A$ e vetor de preços $p_1, \ldots, p_n$ que cada participante paga, onde $p_i : V_1 \times \cdots \times V_n \rightarrow I\!R$.

Mecanismos

n: número de participantes

A: conjunto de alternativas

$v_i : A \to \mathbb{R}$ valoração das alternativas para i

$V_i \subseteq \mathbb{R}^A$: conjunto das possíveis valorações de i

Mecanismo: função de escolha social $f : V_1 \times \cdots \times V_n \to A$ e vetor de preços $p_1, \ldots, p_n$ que cada participante paga, onde $p_i : V_1 \times \cdots \times V_n \to \mathbb{R}$.

Mecanismo (f, p) é à prova de estratégia se, para todo i, e todo $v_1, \ldots, v_n$ e v_i', para $a = f(v_{-i}, v_i)$ e $a' = f(v_{-i}, v_i')$, vale que $v_i(a) - p_i(v_{-i}, v_i) \geq v_i(a') - p_i(v_{-i}, v_i')$.

(incentivo-compatível $=$ à prova de estratégia)

Mecanismos

n: número de participantes

A: conjunto de alternativas

$v_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ valoração das alternativas para i

$V_i \subseteq \mathbb{R}^A$: conjunto das possíveis valorações de i

Mecanismo: função de escolha social $f : V_1 \times \cdots \times V_n \rightarrow A$ e vetor de preços $p_1, \ldots, p_n$ que cada participante paga, onde $p_i : V_1 \times \cdots \times V_n \rightarrow \mathbb{R}$.

Mecanismo (f, p) é à prova de estratégia se, para todo i, e todo $v_1, \ldots, v_n$ e v'_i, para $a = f(v_{-i}, v_i)$ e $a' = f(v_{-i}, v'_i)$, vale que $v_i(a) - p_i(v_{-i}, v_i) \geq v_i(a') - p_i(v_{-i}, v'_i)$.

O valor $v_i(a) - p_i(v_1, \ldots, v_n)$ é a utilidade de i para $v_1, \ldots, v_n$.

Mecanismos VCG

Lembre-se que $\sum_i v_i(a)$ é o chamado bem-estar social.

Mecanismos VCG

Lembre-se que $\sum_i v_i(a)$ é o chamado bem-estar social.

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \rightarrow I\!R$ tq $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Mecanismos VCG

Lembre-se que $\sum_i v_i(a)$ é o chamado bem-estar social.

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \rightarrow \mathbb{R}$ tq $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Observações:

O mecanismo maximiza o bem-estar social.

Mecanismos VCG

Lembre-se que $\sum_i v_i(a)$ é o chamado bem-estar social.

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to I\!R$ tq $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Observações:

O mecanismo maximiza o bem-estar social.

Note que o $p_i(v_1, \ldots, v_n)$ não depende do valor v_i.

Mecanismos VCG

Lembre-se que $\sum_i v_i(a)$ é o chamado bem-estar social.

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \rightarrow I\!R$ tq $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Observações:

O mecanismo maximiza o bem-estar social.

Note que o $p_i(v_1, \ldots, v_n)$ não depende do valor v_i.

Portanto i, para minimizar o seu preço, pode apenas escolher v_i de modo que $\sum_{j \neq i} v_j(a)$ seja máximo

Mecanismos VCG

Lembre-se que $\sum_i v_i(a)$ é o chamado bem-estar social.

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to I\!R$ tq $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Observações:

O mecanismo maximiza o bem-estar social.

Note que o $p_i(v_1, \ldots, v_n)$ não depende do valor v_i.

Portanto i, para minimizar o seu preço, pode apenas escolher v_i de modo que $\sum_{j \neq i} v_j(a)$ seja máximo (já que a escolha de v_i afeta o $a = f(v_1, \ldots, v_n)$).

Mecanismos VCG

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \rightarrow I\!R$ tq $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Mecanismos VCG

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$ tq $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Teorema: O mecanismo VCG é à prova de estratégia.

Mecanismos VCG

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \rightarrow \mathbb{R}$ tq
  $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Teorema: O mecanismo VCG é à prova de estratégia.

Prova: Fixe i, $v_1, \ldots, v_n$ e v'_i e $a = f(v_{-i}, v_i)$ e $a' = f(v_{-i}, v'_i)$.

Precisamos mostrar que u_i é tão alta quanto u'_i,
onde $u_i = v_i(a) - p_i(v_{-i}, v_i)$ e $u'_i = v_i(a') - p_i(v_{-i}, v'_i)$.

Mecanismos VCG

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$ tq $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Teorema: O mecanismo VCG é à prova de estratégia.

Prova: Fixe i, $v_1, \ldots, v_n$ e v'_i e $a = f(v_{-i}, v_i)$ e $a' = f(v_{-i}, v'_i)$.

Precisamos mostrar que u_i é tão alta quanto u'_i, onde $u_i = v_i(a) - p_i(v_{-i}, v_i)$ e $u'_i = v_i(a') - p_i(v_{-i}, v'_i)$.

Mas $u_i = v_i(a) - h_i(v_{-i}) + \sum_{j \neq i} v_j(a) = \sum_j v_j(a) - h_i(v_{-i})$.

Mecanismos VCG

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \dots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \dots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to I\!R$ tq $p_i(v_1, \dots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \dots, v_n$.

Teorema: O mecanismo VCG é à prova de estratégia.

Prova: Fixe i, $v_1, \dots, v_n$ e v'_i e $a = f(v_{-i}, v_i)$ e $a' = f(v_{-i}, v'_i)$.

Precisamos mostrar que u_i é tão alta quanto u'_i, onde $u_i = v_i(a) - p_i(v_{-i}, v_i)$ e $u'_i = v_i(a') - p_i(v_{-i}, v'_i)$.

Mas $u_i = v_i(a) - h_i(v_{-i}) + \sum_{j \neq i} v_j(a) = \sum_j v_j(a) - h_i(v_{-i})$.

Similarmente, $u'_i = \sum_j v_j(a') - h_i(v_{-i})$.

Mecanismos VCG

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$ tq $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Teorema: O mecanismo VCG é à prova de estratégia.

Prova: Fixe i, $v_1, \ldots, v_n$ e v'_i e $a = f(v_{-i}, v_i)$ e $a' = f(v_{-i}, v'_i)$.

Precisamos mostrar que u_i é tão alta quanto u'_i, onde $u_i = v_i(a) - p_i(v_{-i}, v_i)$ e $u'_i = v_i(a') - p_i(v_{-i}, v'_i)$.

Mas $u_i = v_i(a) - h_i(v_{-i}) + \sum_{j \neq i} v_j(a) = \sum_j v_j(a) - h_i(v_{-i})$.

Similarmente, $u'_i = \sum_j v_j(a') - h_i(v_{-i})$.

Como a é tq $\sum_j v_j(a)$ é máxima, declarar v_i é ótimo para i.

Regra de Clarke

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$ tq $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Regra de Clarke

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \rightarrow \mathbb{R}$ tq $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Como escolher as funções h_i?

Regra de Clarke

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to I\!R$ tq $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Como escolher as funções h_i?

Regra de Clarke:

Tome $h_i(v_{-i}) = \max_{b \in A} \sum_{j \neq i} v_j(b)$ para todo i.

Regra de Clarke

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to I\!R$ tq $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Como escolher as funções h_i?

Regra de Clarke:

Tome $h_i(v_{-i}) = \max_{b \in A} \sum_{j \neq i} v_j(b)$ para todo i.

Resulta em $p_i(v_1, \ldots, v_n) = \max_b \sum_{j \neq i} v_j(b) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, onde $a = f(v_1, \ldots, v_n)$.

Regra de Clarke

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to I\!R$ tq $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Regra de Clarke:

Tome $h_i(v_{-i}) = \max_{b \in A} \sum_{j \neq i} v_j(b)$ para todo i.

Resulta em $p_i(v_1, \ldots, v_n) = \max_b \sum_{j \neq i} v_j(b) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, onde $a = f(v_1, \ldots, v_n)$.

Regra de Clarke

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to I\!R$ tq $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Regra de Clarke:

Tome $h_i(v_{-i}) = \max_{b \in A} \sum_{j \neq i} v_j(b)$ para todo i.

Resulta em $p_i(v_1, \ldots, v_n) = \max_b \sum_{j \neq i} v_j(b) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, onde $a = f(v_1, \ldots, v_n)$.

O preço de i é a diferença entre o bem-estar social ótimo sem i, e o bem-estar social com i sem a sua parcela $v_i(a)$.

Exemplo

Leilão de Vickrey:
Cada comprador dá um lance em um envelope.
Ganha o maior lance, e paga o segundo maior lance.

n: número de compradores
$A = [n]$ (ganhador)
Lance: valor v_i.

Exemplo

Leilão de Vickrey:
Cada comprador dá um lance em um envelope.
Ganha o maior lance, e paga o segundo maior lance.

n: número de compradores
$A = [n]$ (ganhador)
Lance: valor v_i.

Ganhador: a tal que $v_a = \max\{v_i : i \in [n]\}$.

Exemplo

Leilão de Vickrey:
Cada comprador dá um lance em um envelope.
Ganha o maior lance, e paga o segundo maior lance.

n: número de compradores
$A = [n]$ (ganhador)
Lance: valor v_i.

Ganhador: a tal que $v_a = \max\{v_i : i \in [n]\}$.

Clarke: $p_i(v_1, \ldots, v_n) = \max_b \sum_{j \neq i} v_j(b) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$

Exemplo

Leilão de Vickrey:
Cada comprador dá um lance em um envelope.
Ganha o maior lance, e paga o segundo maior lance.

n: número de compradores
$A = [n]$ (ganhador)
Lance: valor v_i.

Ganhador: a tal que $v_a = \max\{v_i : i \in [n]\}$.

Clarke: $p_i(v_1, \dots, v_n) = \max_b \sum_{j \neq i} v_j(b) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$

Preços:
Se $i \neq a$, então $\max_b \sum_{j \neq i} v_j(b) = v_a$ e $\sum_{j \neq i} v_j(a) = v_a(a)$, ou seja, $p_i = 0$.

Exemplo

Leilão de Vickrey:
Cada comprador dá um lance em um envelope.
Ganha o maior lance, e paga o segundo maior lance.

n: número de compradores
$A = [n]$ (ganhador)
Lance: valor v_i.

Ganhador: a tal que $v_a = \max\{v_i : i \in [n]\}$.

Clarke: $p_i(v_1, \ldots, v_n) = \max_b \sum_{j \neq i} v_j(b) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$

Preços:
Se $i \neq a$, então $\max_b \sum_{j \neq i} v_j(b) = v_a$ e $\sum_{j \neq i} v_j(a) = v_a(a)$, ou seja, $p_i = 0$.
Se $i = a$, então $\sum_{j \neq i} v_j(a) = 0$ e $\max_b \sum_{j \neq i} v_j(b) = v_s$ onde v_s é o segundo maior lance, ou seja, $p_i = v_s$.

Transferência de dinheiro

As funções h_i controlam a transferência de dinheiro: quem paga para quem.

Transferência de dinheiro

As funções h_i controlam a transferência de dinheiro:
quem paga para quem.

Poderíamos tomar $h_i = 0$ para todo i,
mas nesse caso o leiloeiro pagaria aos participantes.

Transferência de dinheiro

As funções h_i controlam a transferência de dinheiro:
quem paga para quem.

Poderíamos tomar $h_i = 0$ para todo i,
mas nesse caso o leiloeiro pagaria aos participantes.

Propriedades interessantes:

- Um mecanismo é (ex-post) individualmente racional se a utilidade de todos os participantes é não-negativa, ou seja, se $v_i(f(v_1, \ldots, v_n)) - p_i(v_1, \ldots, v_n) \geq 0$ para todo i.

Transferência de dinheiro

As funções h_i controlam a transferência de dinheiro:
quem paga para quem.

Poderíamos tomar $h_i = 0$ para todo i,
mas nesse caso o leiloeiro pagaria aos participantes.

Propriedades interessantes:

- Um mecanismo é (ex-post) individualmente racional se a utilidade de todos os participantes é não-negativa, ou seja, se $v_i(f(v_1, \ldots, v_n)) - p_i(v_1, \ldots, v_n) \geq 0$ para todo i.
- Um mecanismo não tem transferências positivas se nenhum participante recebe dinheiro, ou seja, $p_i(v_1, \ldots, v_n) \geq 0$ para todo $v_1, \ldots, v_n$ e i.

Transferência de dinheiro

Propriedades interessantes:

- Um mecanismo é (ex-post) individualmente racional se a utilidade de todos os participantes é não-negativa, ou seja, se $v_i(f(v_1, \ldots, v_n)) - p_i(v_1, \ldots, v_n) \geq 0$ para todo i.
- Um mecanismo não tem transferências positivas se nenhum participante recebe dinheiro, ou seja, $p_i(v_1, \ldots, v_n) \geq 0$ para todo $v_1, \ldots, v_n$ e i.

Transferência de dinheiro

Propriedades interessantes:

- Um mecanismo é (ex-post) individualmente racional se a utilidade de todos os participantes é não-negativa, ou seja, se $v_i(f(v_1,\ldots,v_n)) - p_i(v_1,\ldots,v_n) \geq 0$ para todo i.
- Um mecanismo não tem transferências positivas se nenhum participante recebe dinheiro, ou seja, $p_i(v_1,\ldots,v_n) \geq 0$ para todo $v_1,\ldots,v_n$ e i.

Regra de Clarke:

$$p_i(v_1,\ldots,v_n) = \max_b \sum_{j\neq i} v_j(b) - \sum_{j\neq i} v_j(a)$$

Transferência de dinheiro

Propriedades interessantes:

- Um mecanismo é (ex-post) individualmente racional se a utilidade de todos os participantes é não-negativa, ou seja, se $v_i(f(v_1,\ldots,v_n)) - p_i(v_1,\ldots,v_n) \geq 0$ para todo i.
- Um mecanismo não tem transferências positivas se nenhum participante recebe dinheiro, ou seja, $p_i(v_1,\ldots,v_n) \geq 0$ para todo $v_1,\ldots,v_n$ e i.

Regra de Clarke:

$$p_i(v_1,\ldots,v_n) = \max_b \sum_{j\neq i} v_j(b) - \sum_{j\neq i} v_j(a)$$

Fácil ver que garante que $p_i \geq 0$ para todo i.

Transferência de dinheiro

Lema: Mecanismo VCG com pagamento de Clarke não tem transferências positivas e, se $v_i(a) \geq 0$ para todo $v_i \in V_i$ e $a \in A$, tal mecanismo é individualmente racional.

Transferência de dinheiro

Lema: Mecanismo VCG com pagamento de Clarke não tem transferências positivas e, se $v_i(a) \geq 0$ para todo $v_i \in V_i$ e $a \in A$, tal mecanismo é individualmente racional.

Prova: Como já observado, claro que

$$p_i(v_1, \ldots, v_n) = \max_b \sum_{j \neq i} v_j(b) - \sum_{j \neq i} v_j(a) \geq 0.$$

Transferência de dinheiro

Lema: Mecanismo VCG com pagamento de Clarke não tem transferências positivas e, se $v_i(a) \geq 0$ para todo $v_i \in V_i$ e $a \in A$, tal mecanismo é individualmente racional.

Prova: Como já observado, claro que

$$p_i(v_1, \dots, v_n) = \max_b \sum_{j \neq i} v_j(b) - \sum_{j \neq i} v_j(a) \geq 0.$$

Seja $a = f(v_1, \dots, v_n)$ e $p_i = p_i(v_1, \dots, v_n)$. Então

Transferência de dinheiro

Lema: Mecanismo VCG com pagamento de Clarke não tem transferências positivas e, se $v_i(a) \geq 0$ para todo $v_i \in V_i$ e $a \in A$, tal mecanismo é individualmente racional.

Prova: Como já observado, claro que

$$p_i(v_1, \ldots, v_n) = \max_b \sum_{j \neq i} v_j(b) - \sum_{j \neq i} v_j(a) \geq 0.$$

Seja $a = f(v_1, \ldots, v_n)$ e $p_i = p_i(v_1, \ldots, v_n)$. Então

$$\begin{aligned} v_i(a) - p_i &= v_i(a) - \max_b \sum_{j \neq i} v_j(b) + \sum_{j \neq i} v_j(a) \\ &= \sum_j v_j(a) - \max_b \sum_{j \neq i} v_j(b) \\ &\geq \sum_j v_j(a) - \max_b \sum_j v_j(b) \quad \text{pois } v_i(b) \geq 0 \\ &\geq 0 \quad \text{pois } a \in \arg\max\{\textstyle\sum_i v_i(a') : a' \in A\} \end{aligned}$$

Transferência de dinheiro

Lema: Mecanismo VCG com pagamento de Clarke não tem transferências positivas e, se $v_i(a) \geq 0$ para todo $v_i \in V_i$ e $a \in A$, tal mecanismo é individualmente racional.

Com valorações negativas (ou seja, custos), regra de Clarke não funciona bem, mas há similares que funcionam.

Transferência de dinheiro

Lema: Mecanismo VCG com pagamento de Clarke não tem transferências positivas e, se $v_i(a) \geq 0$ para todo $v_i \in V_i$ e $a \in A$, tal mecanismo é individualmente racional.

Com valorações negativas (ou seja, custos), regra de Clarke não funciona bem, mas há similares que funcionam.

Basta adaptar a ideia para o valor ganho ser a diferença causada aos outros participantes pela participação de i.

Transferência de dinheiro

Lema: Mecanismo VCG com pagamento de Clarke não tem transferências positivas e, se $v_i(a) \geq 0$ para todo $v_i \in V_i$ e $a \in A$, tal mecanismo é individualmente racional.

Com valorações negativas (ou seja, custos), regra de Clarke não funciona bem, mas há similares que funcionam.

Basta adaptar a ideia para o valor ganho ser a diferença causada aos outros participantes pela participação de i.

Vamos mostrar que mecanismos à prova de estratégia que maximizam o bem-estar social são VCG.

Exercício

Seguindo uma sugestão do Lucas, na segunda parte da prova do Teorema de Arrow, mostre que existe um único eleitor pivotal.

Deduza então que esse único eleitor pivotal é ditador.