Notação e definições

n: número de eleitores

A: conjunto de alternativas (os candidatos)

L: conjunto de permutações de A (ordens de preferência)

Cada eleitor i associado a um $\succ_i$ em L.

Função de bem-estar social: $F : L^n \rightarrow L$

F é unânime se $F(\succ, \ldots, \succ) = \succ$ para todo $\succ$ em L.

Eleitor i é ditador em F se

$$F(\succ_1, \ldots, \succ_n) = \succ_i \text{ para todos } \succ_1, \ldots, \succ_n \text{ em } L.$$

F é uma ditadura se há um ditador em F.

Teorema de Arrow

F: função de bem-estar social

F é unânime se $F(\succ, \ldots, \succ) = \succ$ para todo $\succ \in L$.

Eleitor i é ditador para F se

$$F(\succ_1, \ldots, \succ_n) = \succ_i \text{ para todos } \succ_1, \ldots, \succ_n \text{ em } L.$$

F é uma ditadura se há um ditador para F.

F é independente de alternativas irrelevantes se
$\succ = F(\succ_1, \ldots, \succ_n)$ e $\succ' = F(\succ'_1, \ldots, \succ'_n)$ então
$a \succ_i b$ sse $a \succ'_i b$ para todo i implica que $a \succ b$ sse $a \succ' b$.

Teorema de Arrow

F: função de bem-estar social

F é unânime se $F(\succ, \ldots, \succ) = \succ$ para todo $\succ \in L$.

Eleitor i é ditador para F se

$$F(\succ_1, \ldots, \succ_n) = \succ_i \text{ para todos } \succ_1, \ldots, \succ_n \text{ em } L.$$

F é uma ditadura se há um ditador para F.

F é independente de alternativas irrelevantes se
$\succ = F(\succ_1, \ldots, \succ_n)$ e $\succ' = F(\succ'_1, \ldots, \succ'_n)$ então
$a \succ_i b$ sse $a \succ'_i b$ para todo i implica que $a \succ b$ sse $a \succ' b$.

Teorema de Arrow: Toda função de bem-estar social sobre A com $|A| \geq 3$ que satisfaz unanimidade e independência de alternativas irrelevantes é uma ditadura.

Prova do Teorema de Arrow

Um eleitor é pivotal se pode fazer um candidato ir da base até o topo da ordem resultante $\succ$.

Prova do Teorema de Arrow

Um eleitor é pivotal se pode fazer um candidato ir da base até o topo da ordem resultante $\succ$.

Duas partes:

- existe um eleitor que é pivotal
- tal eleitor é um ditador

Prova do Teorema de Arrow

Um eleitor é pivotal se pode fazer um candidato ir da base até o topo da ordem resultante $\succ$.

Duas partes:

- existe um eleitor que é pivotal
- tal eleitor é um ditador

Seja b um candidato qualquer.

Se b está na base ou no topo de cada uma das ordens, então b está na base ou no topo de $\succ$.

Prova do Teorema de Arrow

Um eleitor é pivotal se pode fazer um candidato ir da base até o topo da ordem resultante $\succ$.

Duas partes:

- existe um eleitor que é pivotal
- tal eleitor é um ditador

Seja b um candidato qualquer.

Se b está na base ou no topo de cada uma das ordens, então b está na base ou no topo de $\succ$.

Suponha que não é esse o caso.
Ou seja, existem a e c em A tais que $a \succ b$ e $b \succ c$.

Existe eleitor pivotal

Seja b um candidato qualquer.

Se b está na base ou no topo de cada uma das ordens, então b está na base ou no topo de $\succ$.

Suponha que não é esse o caso.
Ou seja, existem a e c em A tais que $a \succ b$ e $b \succ c$.

Existe eleitor pivotal

Seja b um candidato qualquer.

Se b está na base ou no topo de cada uma das ordens, então b está na base ou no topo de $\succ$.

Suponha que não é esse o caso.
Ou seja, existem a e c em A tais que $a \succ b$ e $b \succ c$.

Por transitividade, $a \succ c$.

Existe eleitor pivotal

Seja b um candidato qualquer.

Se b está na base ou no topo de cada uma das ordens, então b está na base ou no topo de $\succ$.

Suponha que não é esse o caso.
Ou seja, existem a e c em A tais que $a \succ b$ e $b \succ c$.

Por transitividade, $a \succ c$.

Ponha c acima de a em todas as ordens.

Isso não tira b dos extremos, logo mantem a ordem relativa entre a e b e entre b e c para todos os eleitores.

Existe eleitor pivotal

Seja b um candidato qualquer.

Se b está na base ou no topo de cada uma das ordens, então b está na base ou no topo de $\succ$.

Suponha que não é esse o caso.
Ou seja, existem a e c em A tais que $a \succ b$ e $b \succ c$.

Por transitividade, $a \succ c$.

Ponha c acima de a em todas as ordens.

Isso não tira b dos extremos, logo mantem a ordem relativa entre a e b e entre b e c para todos os eleitores.

Mas, então $c \succ_i a$ para todo eleitor i,
e portanto $c \succ a$, uma contradição.

Existe eleitor pivotal

Seja b um candidato qualquer.

Se b está na base ou no topo de cada uma das ordens, então b está na base ou no topo de $\succ$.

Existe eleitor pivotal

Seja b um candidato qualquer.

Se b está na base ou no topo de cada uma das ordens, então b está na base ou no topo de $\succ$.

Comece com b na base de todas as ordens.

Neste caso, b está na base de $\succ$.

Existe eleitor pivotal

Seja b um candidato qualquer.

Se b está na base ou no topo de cada uma das ordens, então b está na base ou no topo de $\succ$.

Comece com b na base de todas as ordens.

Neste caso, b está na base de $\succ$.

Em uma a uma das ordens, mova b da base para o topo.

Ao final, b estará no topo de $\succ$.

Existe eleitor pivotal

Seja b um candidato qualquer.

Se b está na base ou no topo de cada uma das ordens, então b está na base ou no topo de $\succ$.

Comece com b na base de todas as ordens.

Neste caso, b está na base de $\succ$.

Em uma a uma das ordens, mova b da base para o topo.

Ao final, b estará no topo de $\succ$.

Seja $n^* = n(b)$ o eleitor cuja mudança fez b deixar de estar na base de $\succ$.

Existe eleitor pivotal

Seja b um candidato qualquer.

Se b está na base ou no topo de cada uma das ordens, então b está na base ou no topo de $\succ$.

Comece com b na base de todas as ordens.

Neste caso, b está na base de $\succ$.

Em uma a uma das ordens, mova b da base para o topo.

Ao final, b estará no topo de $\succ$.

Seja $n^* = n(b)$ o eleitor cuja mudança fez b deixar de estar na base de $\succ$.

Vamos mostrar que n^* é pivotal.

Existe eleitor pivotal

Seja b um candidato qualquer.

Se b está na base ou no topo de cada uma das ordens, então b está na base ou no topo de $\succ$.

Comece com b na base de todas as ordens (inclusive de $\succ$).

Em uma a uma das ordens, mova b da base para o topo. (Ao final, b estará no topo de $\succ$.)

$n^* = n(b)$: eleitor cuja mudança fez b sair da base de $\succ$.

Existe eleitor pivotal

Seja b um candidato qualquer.

Se b está na base ou no topo de cada uma das ordens, então b está na base ou no topo de $\succ$.

Comece com b na base de todas as ordens (inclusive de $\succ$).

Em uma a uma das ordens, mova b da base para o topo. (Ao final, b estará no topo de $\succ$.)

$n^* = n(b)$: eleitor cuja mudança fez b sair da base de $\succ$.

Como b está na base ou topo de cada lista, está na base ou topo de $\succ$.
Logo após n^* fazer sua mudança, b foi então para o topo.

Existe eleitor pivotal

Seja b um candidato qualquer.

Se b está na base ou no topo de cada uma das ordens, então b está na base ou no topo de $\succ$.

Comece com b na base de todas as ordens (inclusive de $\succ$).

Em uma a uma das ordens, mova b da base para o topo. (Ao final, b estará no topo de $\succ$.)

$n^* = n(b)$: eleitor cuja mudança fez b sair da base de $\succ$.

Como b está na base ou topo de cada lista, está na base ou topo de $\succ$. Logo após n^* fazer sua mudança, b foi então para o topo.

Ou seja, n^* faz b ir da base ao topo, e portanto é pivotal.

Prova do Teorema de Arrow

Um eleitor é pivotal se pode fazer um candidato ir da base até o topo da ordem resultante $\succ$.

Duas partes:

- existe um eleitor que é pivotal
- tal eleitor é um ditador

Prova do Teorema de Arrow

Duas partes:

- existe um eleitor que é pivotal
- tal eleitor é um ditador

Prova do Teorema de Arrow

Duas partes:

- existe um eleitor que é pivotal
- tal eleitor é um ditador

Primeiro, vamos mostrar que n^* define a ordem entre a e c, para quaisquer a e c distintos de b.

Prova do Teorema de Arrow

Duas partes:

- existe um eleitor que é pivotal
- tal eleitor é um ditador

Primeiro, vamos mostrar que n^* define a ordem entre a e c, para quaisquer a e c distintos de b.

Seja I a sequência de ordens imediatamente antes de n^* fazer sua mudança, e II de imediatamente depois.

Prova do Teorema de Arrow

Duas partes:

- existe um eleitor que é pivotal
- tal eleitor é um ditador

Primeiro, vamos mostrar que n^* define a ordem entre a e c, para quaisquer a e c distintos de b.

Seja I a sequência de ordens imediatamente antes de n^* fazer sua mudança, e II de imediatamente depois.

Seja III obtida de II onde n^* põe a acima de b, e os demais eleitores mudam a ordem de a e c arbitrariamente.

Prova do Teorema de Arrow

Duas partes:

- existe um eleitor que é pivotal
- tal eleitor é um ditador

Primeiro, vamos mostrar que n^* define a ordem entre a e c, para quaisquer a e c distintos de b.

Seja I a sequência de ordens imediatamente antes de n^* fazer sua mudança, e II de imediatamente depois.

Seja III obtida de II onde n^* põe a acima de b, e os demais eleitores mudam a ordem de a e c arbitrariamente.

Na ordem resultante, $a \succ b \succ c$, pois a ordem relativa de a e b está como em I e b está na base para I, e de b e c está como em II e b está no topo para II.

Prova do Teorema de Arrow

Duas partes:

- existe um eleitor que é pivotal
- tal eleitor é um ditador

Mostramos que n^* define a ordem entre a e c, para quaisquer a e c distintos de b.

Prova do Teorema de Arrow

Duas partes:

- existe um eleitor que é pivotal
- tal eleitor é um ditador

Mostramos que n^* define a ordem entre a e c, para quaisquer a e c distintos de b.

Segundo, vamos mostrar que n^* define a ordem também entre a e b, para qualquer a distinto de b.

Prova do Teorema de Arrow

Duas partes:

- existe um eleitor que é pivotal
- tal eleitor é um ditador

Mostramos que n^* define a ordem entre a e c, para quaisquer a e c distintos de b.

Segundo, vamos mostrar que n^* define a ordem também entre a e b, para qualquer a distinto de b.

Seja c um outro candidato, e coloque c no lugar de b na construção inicial, obtendo $n' = n(c)$.

Prova do Teorema de Arrow

Duas partes:

- existe um eleitor que é pivotal
- tal eleitor é um ditador

Mostramos que n^* define a ordem entre a e c, para quaisquer a e c distintos de b.

Segundo, vamos mostrar que n^* define a ordem também entre a e b, para qualquer a distinto de b.

Seja c um outro candidato, e coloque c no lugar de b na construção inicial, obtendo $n' = n(c)$.

Pelo acima, n' decide ordem de a e b. Mas n^* decide ordem de a e b de I para II, logo $n' = n^*$, concluindo a prova.

Leilões de Vickrey

Considere um leilão de um único item.

Leilão do primeiro preço:
Cada participante dá um lance em um envelope.
Ganha o maior lance, e paga este valor pelo item.

Leilões de Vickrey

Considere um leilão de um único item.

Leilão do primeiro preço:
Cada participante dá um lance em um envelope.
Ganha o maior lance, e paga este valor pelo item.

Desvantagem: induz compradores a não declararem o valor real, mas um valor menor.

Leilões de Vickrey

Considere um leilão de um único item.

Leilão do primeiro preço:
Cada participante dá um lance em um envelope.
Ganha o maior lance, e paga este valor pelo item.

Desvantagem: induz compradores a não declararem o valor real, mas um valor menor.

Leilão inglês

Leilões de Vickrey

Considere um leilão de um único item.

Leilão do primeiro preço:
Cada participante dá um lance em um envelope.
Ganha o maior lance, e paga este valor pelo item.

Desvantagem: induz compradores a não declararem o valor real, mas um valor menor.

Leilão inglês

Leilão de segundo preço (ou leilões de Vickrey):
Cada comprador dá um lance em um envelope.
Ganha o maior lance, e paga o segundo maior lance.

Leilões de Vickrey

Considere um leilão de um único item.

Leilão do primeiro preço:
Cada participante dá um lance em um envelope.
Ganha o maior lance, e paga este valor pelo item.

Desvantagem: induz compradores a não declararem o valor real, mas um valor menor.

Leilão inglês

Leilão de segundo preço (ou leilões de Vickrey):
Cada comprador dá um lance em um envelope.
Ganha o maior lance, e paga o segundo maior lance.

Vantagem: induz compradores a declararem o valor real.

Mecanismos

n: número de participantes

A: conjunto de alternativas

Mecanismos

n: número de participantes

A: conjunto de alternativas

$v_i : A \rightarrow I\!R$ valoração das alternativas para i

Mecanismos

n: número de participantes

A: conjunto de alternativas

$v_i : A \to \mathbb{R}$ valoração das alternativas para i

$V_i \subseteq \mathbb{R}^A$: conjunto das possíveis valorações de i

Mecanismos

n: número de participantes

A: conjunto de alternativas

$v_i : A \to \mathbb{R}$ valoração das alternativas para i

$V_i \subseteq \mathbb{R}^A$: conjunto das possíveis valorações de i

Mecanismo: função de escolha social $f : V_1 \times \cdots \times V_n \to A$ e vetor de preços $p_1, \ldots, p_n$ que cada participante paga, onde $p_i : V_1 \times \cdots \times V_n \to \mathbb{R}$.

Mecanismos

n: número de participantes

A: conjunto de alternativas

$v_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ valoração das alternativas para i

$V_i \subseteq \mathbb{R}^A$: conjunto das possíveis valorações de i

Mecanismo: função de escolha social $f : V_1 \times \cdots \times V_n \rightarrow A$ e vetor de preços $p_1, \ldots, p_n$ que cada participante paga, onde $p_i : V_1 \times \cdots \times V_n \rightarrow \mathbb{R}$.

Mecanismo (f, p) é à prova de estratégia se, para todo i, e todo $v_1, \ldots, v_n$ e v'_i, para $a = f(v_{-i}, v_i)$ e $a' = f(v_{-i}, v'_i)$, vale que $v_i(a) - p_i(v_{-i}, v_i) \geq v_i(a') - p_i(v_{-i}, v'_i)$.

(incentivo-compatível $=$ à prova de estratégia)

Mecanismos

n: número de participantes

A: conjunto de alternativas

$v_i : A \to I\!R$ valoração das alternativas para i

$V_i \subseteq I\!R^A$: conjunto das possíveis valorações de i

Mecanismo: função de escolha social $f : V_1 \times \cdots \times V_n \to A$ e vetor de preços $p_1, \ldots, p_n$ que cada participante paga, onde $p_i : V_1 \times \cdots \times V_n \to I\!R$.

Mecanismo (f, p) é à prova de estratégia se, para todo i, e todo $v_1, \ldots, v_n$ e v'_i, para $a = f(v_{-i}, v_i)$ e $a' = f(v_{-i}, v'_i)$, vale que $v_i(a) - p_i(v_{-i}, v_i) \geq v_i(a') - p_i(v_{-i}, v'_i)$.

O valor $v_i(a) - p_i(v_1, \ldots, v_n)$ é a utilidade de i para $v_1, \ldots, v_n$.

Exemplo

Leilão de Vickrey:
Cada comprador dá um lance em um envelope.
Ganha o maior lance, e paga o segundo maior lance.

Exemplo

Leilão de Vickrey:
Cada comprador dá um lance em um envelope.
Ganha o maior lance, e paga o segundo maior lance.

n: número de compradores

$A = [n]$ (ganhador)

Lance: valor v_i.

Exemplo

Leilão de Vickrey:
Cada comprador dá um lance em um envelope.
Ganha o maior lance, e paga o segundo maior lance.

n: número de compradores

$A = [n]$ (ganhador)

Lance: valor v_i.

Ganhador: a tal que $v_a = \max\{v_i : i \in [n]\}$.

Exemplo

Leilão de Vickrey:
Cada comprador dá um lance em um envelope.
Ganha o maior lance, e paga o segundo maior lance.

n: número de compradores

$A = [n]$ (ganhador)

Lance: valor v_i.

Ganhador: a tal que $v_a = \max\{v_i : i \in [n]\}$.

Preços: para cada i em $[n]$, $p_i(a) = 0$ se $i \neq a$ e $p_a(a) = v_b$, onde $v_b = \max\{v_i : i \in [n], i \neq a\}$ (segundo maior lance).

Exemplo

Leilão de Vickrey:
Cada comprador dá um lance em um envelope.
Ganha o maior lance, e paga o segundo maior lance.

n: número de compradores

$A = [n]$ (ganhador)

Lance: valor v_i.

Ganhador: a tal que $v_a = \max\{v_i : i \in [n]\}$.

Preços: para cada i em $[n]$, $p_i(a) = 0$ se $i \neq a$ e $p_a(a) = v_b$, onde $v_b = \max\{v_i : i \in [n], i \neq a\}$ (segundo maior lance).

É à prova de estratégia ou não?

Exemplo: Leilão de Vickrey

n: número de compradores
$A = [n]$ (ganhador)
Lance: valor v_i.

Ganhador: a tal que $v_a = \max\{v_i : i \in [n]\}$.

Preços: para cada i em $[n]$, $p_i(a) = 0$ se $i \neq a$ e $p_a(a) = v_b$, onde $v_b = \max\{v_i : i \in [n], i \neq a\}$ (segundo maior lance).

É à prova de estratégia ou não?

Exemplo: Leilão de Vickrey

n: número de compradores
$A = [n]$ (ganhador)
Lance: valor v_i.

Ganhador: a tal que $v_a = \max\{v_i : i \in [n]\}$.

Preços: para cada i em $[n]$, $p_i(a) = 0$ se $i \neq a$ e $p_a(a) = v_b$, onde $v_b = \max\{v_i : i \in [n], i \neq a\}$ (segundo maior lance).

É à prova de estratégia ou não?

Seja v'_i um lance distinto de v_i e a' o ganhador para v_{-i}, v'_i.

Exemplo: Leilão de Vickrey

n: número de compradores
$A = [n]$ (ganhador)
Lance: valor v_i.

Ganhador: a tal que $v_a = \max\{v_i : i \in [n]\}$.

Preços: para cada i em $[n]$, $p_i(a) = 0$ se $i \neq a$ e $p_a(a) = v_b$, onde $v_b = \max\{v_i : i \in [n], i \neq a\}$ (segundo maior lance).

É à prova de estratégia ou não?

Seja v_i' um lance distinto de v_i e a' o ganhador para v_{-i}, v_i'.

Vamos mostrar que $v_i(a) - p_i(v_{-i}, v_i) \geq v_i(a') - p_i(v_{-i}, v_i')$.

Exemplo: Leilão de Vickrey

n: número de compradores
$A = [n]$ (ganhador)
Lance: valor v_i.

Ganhador: a tal que $v_a = \max\{v_i : i \in [n]\}$.

Preços: para cada i em $[n]$, $p_i(a) = 0$ se $i \neq a$ e $p_a(a) = v_b$, onde $v_b = \max\{v_i : i \in [n], i \neq a\}$ (segundo maior lance).

É à prova de estratégia ou não?

Seja v_i' um lance distinto de v_i e a' o ganhador para v_{-i}, v_i'.

Vamos mostrar que $v_i(a) - p_i(v_{-i}, v_i) \geq v_i(a') - p_i(v_{-i}, v_i')$.

Divida em dois casos: $v_i' \geq v_i$ e $v_i' \leq v_i$.

Exemplo: Leilão de Vickrey

n: número de compradores
$A = [n]$ (ganhador)
Lance: valor v_i.

Ganhador: a tal que $v_a = \max\{v_i : i \in [n]\}$.

Preços: para cada i em $[n]$, $p_i(a) = 0$ se $i \neq a$ e $p_a(a) = v_b$,
onde $v_b = \max\{v_i : i \in [n], i \neq a\}$ (segundo maior lance).

É à prova de estratégia ou não?

Seja v_i' um lance distinto de v_i e a' o ganhador para v_{-i}, v_i'.

Vamos mostrar que $v_i(a) - p_i(v_{-i}, v_i) \geq v_i(a') - p_i(v_{-i}, v_i')$.

Divida em dois casos: $v_i' \geq v_i$ e $v_i' \leq v_i$.

(continua ganhando ou passa a ganhar com utilidade negativa,
ou continua ganhando com mesma utilidade ou deixa de ganhar,
passando a utilidade zero).

Mecanismos VCG

Lembre-se que $\sum_i v_i(a)$ é o chamado bem-estar social.

Mecanismos VCG

Lembre-se que $\sum_i v_i(a)$ é o chamado bem-estar social.

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$ tq $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Mecanismos VCG

Lembre-se que $\sum_i v_i(a)$ é o chamado bem-estar social.

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$ tq $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Observações:

O mecanismo maximiza bem-estar social.

Mecanismos VCG

Lembre-se que $\sum_i v_i(a)$ é o chamado bem-estar social.

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \rightarrow \mathbb{R}$ tq $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Observações:

O mecanismo maximiza bem-estar social.

Note que o $p_i(v_1, \ldots, v_n)$ não depende do valor v_i.

Mecanismos VCG

Lembre-se que $\sum_i v_i(a)$ é o chamado bem-estar social.

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \rightarrow I\!R$ tq
  $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Observações:

O mecanismo maximiza bem-estar social.

Note que o $p_i(v_1, \ldots, v_n)$ não depende do valor v_i.

Portanto i, para minimizar o seu preço, pode apenas escolher v_i de modo que $\sum_{j \neq i} v_j(a)$ seja máximo

Mecanismos VCG

Lembre-se que $\sum_i v_i(a)$ é o chamado bem-estar social.

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \rightarrow I\!R$ tq
  $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Observações:

O mecanismo maximiza bem-estar social.

Note que o $p_i(v_1, \ldots, v_n)$ não depende do valor v_i.

Portanto i, para minimizar o seu preço, pode apenas escolher v_i de modo que $\sum_{j \neq i} v_j(a)$ seja máximo (já que a escolha de v_i afeta o $a = f(v_1, \ldots, v_n)$).

Mecanismos VCG

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \dots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \dots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to I\!R$ tq $p_i(v_1, \dots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \dots, v_n$.

Mecanismos VCG

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to I\!R$ tq $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Teorema: O mecanismo VCG é à prova de estratégia.

Mecanismos VCG

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$ tq $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Teorema: O mecanismo VCG é à prova de estratégia.

Prova: Fixe i, $v_1, \ldots, v_n$ e v_i' e $a = f(v_{-i}, v_i)$ e $a' = f(v_{-i}, v_i')$.

Precisamos mostrar que u_i é tão alta quanto u_i',
onde $u_i = v_i(a) - p_i(v_{-i}, v_i)$ e $u_i' = v_i(a') - p_i(v_{-i}, v_i')$.

Mecanismos VCG

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \rightarrow I\!R$ tq $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Teorema: O mecanismo VCG é à prova de estratégia.

Prova: Fixe i, $v_1, \ldots, v_n$ e v'_i e $a = f(v_{-i}, v_i)$ e $a' = f(v_{-i}, v'_i)$.

Precisamos mostrar que u_i é tão alta quanto u'_i, onde $u_i = v_i(a) - p_i(v_{-i}, v_i)$ e $u'_i = v_i(a') - p_i(v_{-i}, v'_i)$.

Mas $u_i = v_i(a) - h_i(v_{-i}) + \sum_{j \neq i} v_j(a) = \sum_j v_j(a) - h_i(v_{-i})$.

Mecanismos VCG

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$ tq $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Teorema: O mecanismo VCG é à prova de estratégia.

Prova: Fixe i, $v_1, \ldots, v_n$ e v'_i e $a = f(v_{-i}, v_i)$ e $a' = f(v_{-i}, v'_i)$.

Precisamos mostrar que u_i é tão alta quanto u'_i, onde $u_i = v_i(a) - p_i(v_{-i}, v_i)$ e $u'_i = v_i(a') - p_i(v_{-i}, v'_i)$.

Mas $u_i = v_i(a) - h_i(v_{-i}) + \sum_{j \neq i} v_j(a) = \sum_j v_j(a) - h_i(v_{-i})$.

Similarmente, $u'_i = \sum_j v_j(a') - h_i(v_{-i})$.

Mecanismos VCG

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to I\!R$ tq $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Teorema: O mecanismo VCG é à prova de estratégia.

Prova: Fixe i, $v_1, \ldots, v_n$ e v_i' e $a = f(v_{-i}, v_i)$ e $a' = f(v_{-i}, v_i')$.

Precisamos mostrar que u_i é tão alta quanto u_i',
onde $u_i = v_i(a) - p_i(v_{-i}, v_i)$ e $u_i' = v_i(a') - p_i(v_{-i}, v_i')$.

Mas $u_i = v_i(a) - h_i(v_{-i}) + \sum_{j \neq i} v_j(a) = \sum_j v_j(a) - h_i(v_{-i})$.

Similarmente, $u_i' = \sum_j v_j(a') - h_i(v_{-i})$.

Como a é tq $\sum_j v_j(a)$ é máxima, declarar v_i é ótimo para i.

Aula que vem

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \rightarrow I\!R$ tq $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Aula que vem

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to I\!R$ tq $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Como escolher as funções h_i?

Aula que vem

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$ tq $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Como escolher as funções h_i?

Regra de Clarke:

Tome $h_i(v_{-i}) = \max_{b \in A} \sum_{j \neq i} v_j(b)$ para todo i.

Aula que vem

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max\{\sum_i v_i(a) : a \in A\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$ tq
  $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, para todo $v_1, \ldots, v_n$.

Como escolher as funções h_i?

Regra de Clarke:

Tome $h_i(v_{-i}) = \max_{b \in A} \sum_{j \neq i} v_j(b)$ para todo i.

Resulta em $p_i(v_1, \ldots, v_n) = \max_b \sum_{j \neq i} v_j(b) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$,
onde $a = f(v_1, \ldots, v_n)$.