Jogo de conexão global

Seja $G = (V, E)$ um digrafo com custo c_e para cada e em E.

Jogo de conexão global

Seja $G = (V, E)$ um digrafo com custo c_e para cada e em E.

k jogadores, cada um com um par de vértices (s_i, t_i).

Jogo de conexão global

Seja $G = (V, E)$ um digrafo com custo c_e para cada e em E.

k jogadores, cada um com um par de vértices (s_i, t_i).

Estratégia do jogador i: caminho de s_i a t_i em G.

Jogo de conexão global

Seja $G = (V, E)$ um digrafo com custo c_e para cada e em E.

k jogadores, cada um com um par de vértices (s_i, t_i).

Estratégia do jogador i: caminho de s_i a t_i em G.

custo para i do vetor de estratégias $S = (P_1, \ldots, P_k)$:

$$\mathrm{custo}_i(S) \;=\; \sum_{e \in P_i} \frac{c_e}{k_e},$$

onde k_e é o número de caminhos em S que usam e.

Jogo de conexão global

Seja $G = (V, E)$ um digrafo com custo c_e para cada e em E.

k jogadores, cada um com um par de vértices (s_i, t_i).

Estratégia do jogador i: caminho de s_i a t_i em G.

custo para i do vetor de estratégias $S = (P_1, \ldots, P_k)$:

$$\mathrm{custo}_i(S) \;=\; \sum_{e \in P_i} \frac{c_e}{k_e},$$

onde k_e é o número de caminhos em S que usam e.

Custo social $\mathrm{cs}(S)$: soma do custo das arestas em $\cup_i P_i$.

Problema de Steiner Generalizado

Seja $G = (V, E)$ um digrafo com custo c_e para cada e em E, e pares de vértices (s_i, t_i), para $i = 1, \ldots, k$.

Problema de Steiner Generalizado

Seja $G = (V, E)$ um digrafo com custo c_e para cada e em E, e pares de vértices (s_i, t_i), para $i = 1, \ldots, k$.

Problema: Encontrar um subgrafo de G de custo mínimo que contém um caminho de s_i a t_i, para $i = 1, \ldots, k$.

Problema de Steiner Generalizado

Seja $G = (V, E)$ um digrafo com custo c_e para cada e em E, e pares de vértices (s_i, t_i), para $i = 1, \ldots, k$.

Problema: Encontrar um subgrafo de G de custo mínimo que contém um caminho de s_i a t_i, para $i = 1, \ldots, k$.

Esse problema é NP-difícil, mas
é com ele que vamos comparar o custo dos equilíbrios.

Problema de Steiner Generalizado

Seja $G = (V, E)$ um digrafo com custo c_e para cada e em E, e pares de vértices (s_i, t_i), para $i = 1, \dots, k$.

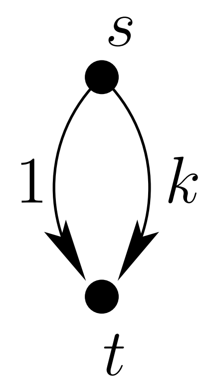
Problema: Encontrar um subgrafo de G de custo mínimo que contém um caminho de s_i a t_i, para $i = 1, \dots, k$.

Esse problema é NP-difícil, mas
é com ele que vamos comparar o custo dos equilíbrios.

Ou seja, o custo social ótimo do jogo é o custo da solução do correspondente problema de Steiner generalizado.

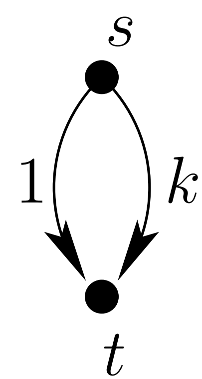
Exemplo

k jogadores, todos com o mesmo s e t.



Exemplo

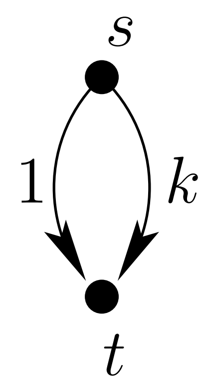
k jogadores, todos com o mesmo s e t.



Ótimo: todos pela aresta de custo 1.

Exemplo

k jogadores, todos com o mesmo s e t.

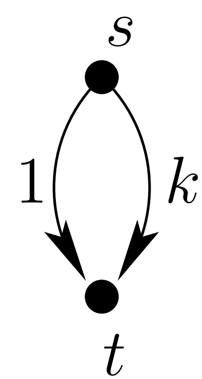


Ótimo: todos pela aresta de custo 1.

Isso é um equilíbrio: $\mathrm{PoE} = 1$

Exemplo

k jogadores, todos com o mesmo s e t.



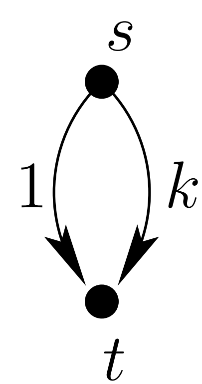
Ótimo: todos pela aresta de custo 1.

Isso é um equilíbrio: $\mathrm{PoE} = 1$

Outro equilíbrio: todos pela aresta de custo k...

Exemplo

k jogadores, todos com o mesmo s e t.



Ótimo: todos pela aresta de custo 1.

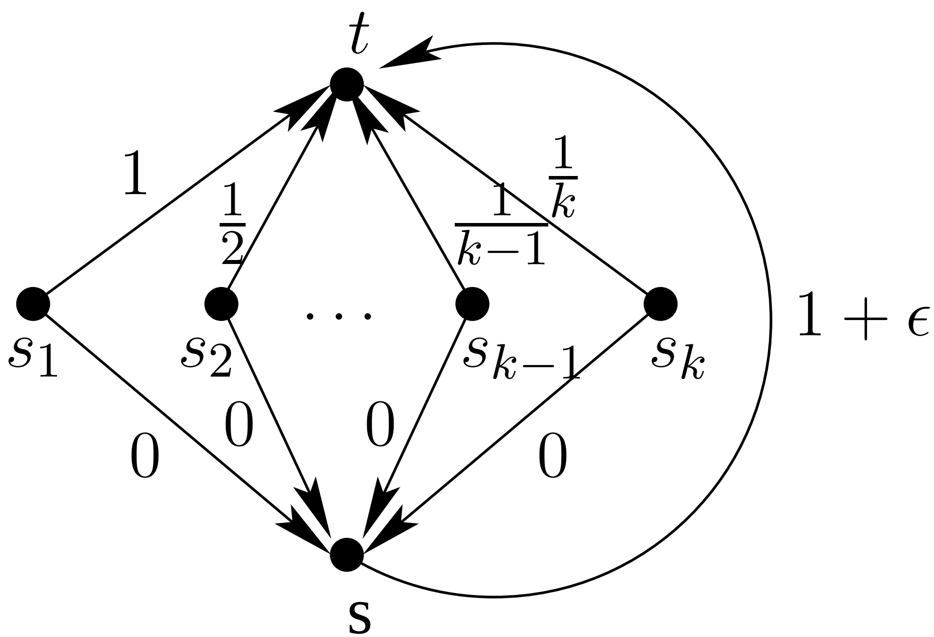
Isso é um equilíbrio: $\text{PoE} = 1$

Outro equilíbrio: todos pela aresta de custo k...

$\text{PoA} = k$

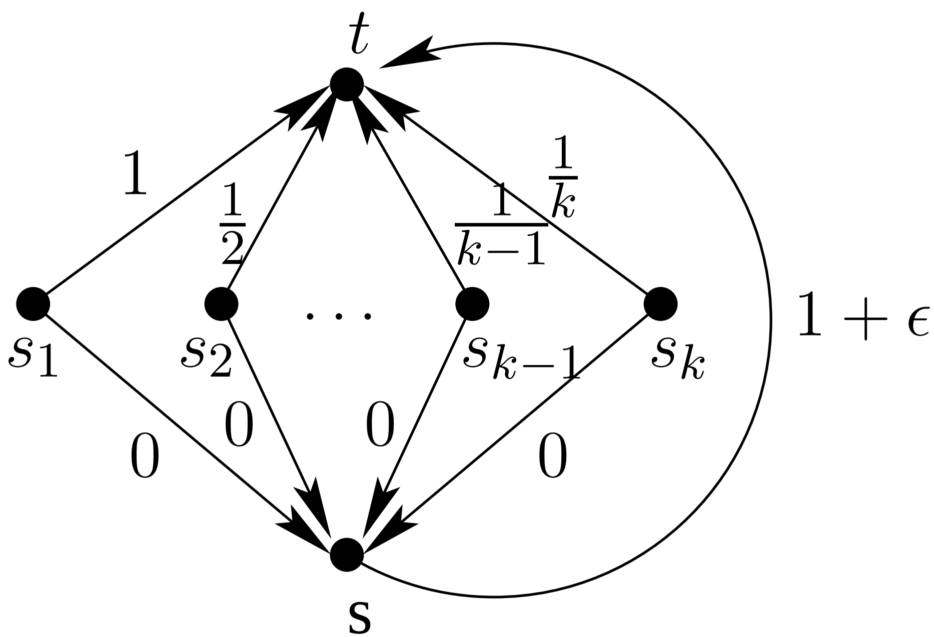
Exemplo

k jogadores, todos com o mesmo t.



Exemplo

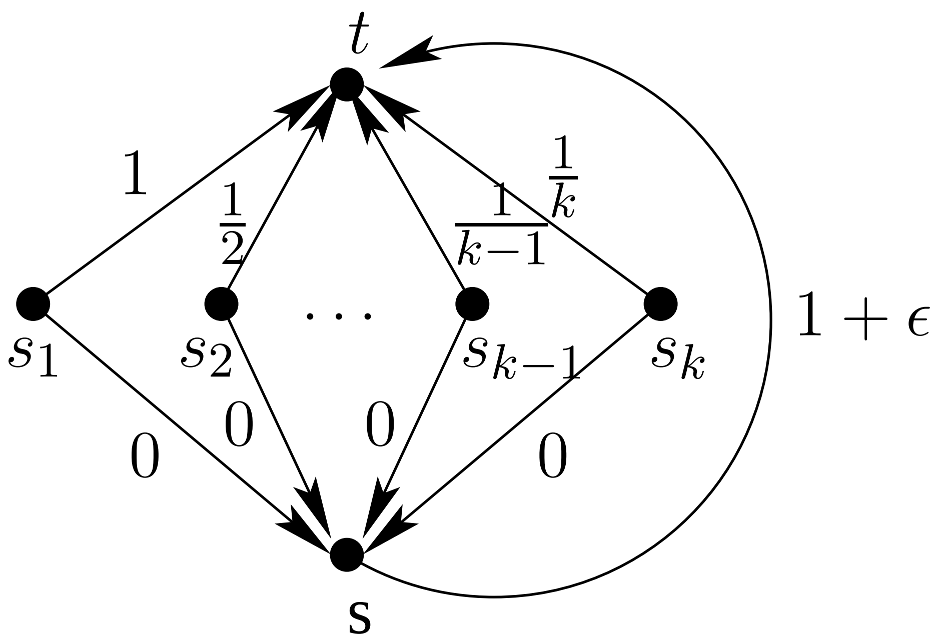
k jogadores, todos com o mesmo t.



Ótimo: todos por s, a um custo total de $1 + \epsilon$.

Exemplo

k jogadores, todos com o mesmo t.

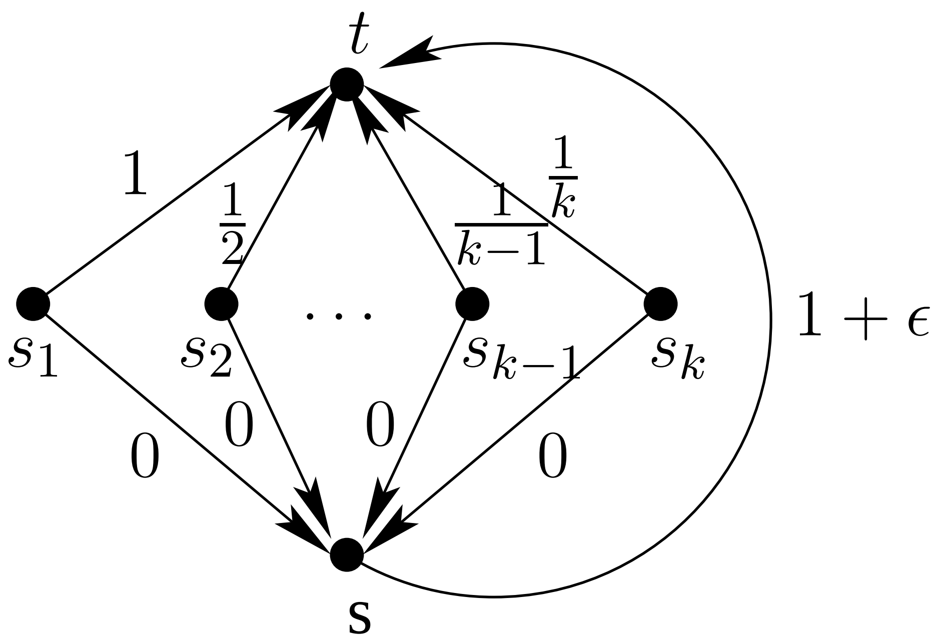


Ótimo: todos por s, a um custo total de $1 + \epsilon$.

Mas isso não é um equilíbrio: k está insatisfeito.

Exemplo

k jogadores, todos com o mesmo t.



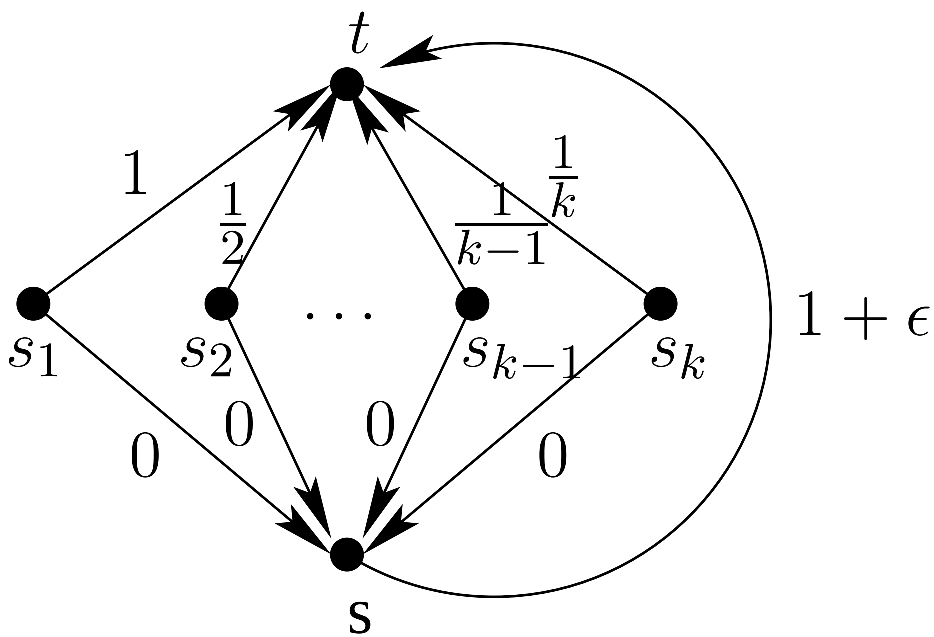
Ótimo: todos por s, a um custo total de $1 + \epsilon$.

Mas isso não é um equilíbrio: k está insatisfeito.

Único equilíbrio: todos diretamente para t...

Exemplo

k jogadores, todos com o mesmo t.



Ótimo: todos por s, a um custo total de $1+\epsilon$.

Mas isso não é um equilíbrio: k está insatisfeito.

Único equilíbrio: todos diretamente para t...

$\mathrm{cs} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} = H_k$ e portanto $\mathrm{PoE} = \mathrm{PoA} = H_k$.

Nesta aula

Teorema: Qualquer instância do jogo de conexão global tem um equilíbrio puro.

Nesta aula

Teorema: Qualquer instância do jogo de conexão global tem um equilíbrio puro.

Teorema: O preço da estabilidade do jogo de conexão global com k jogadores é no máximo H_k.

Nesta aula

Teorema: Qualquer instância do jogo de conexão global tem um equilíbrio puro.

Teorema: O preço da estabilidade do jogo de conexão global com k jogadores é no máximo H_k.

A prova destes resultados usa função potencial.

Nesta aula

Teorema: Qualquer instância do jogo de conexão global tem um equilíbrio puro.

Teorema: O preço da estabilidade do jogo de conexão global com k jogadores é no máximo H_k.

A prova destes resultados usa função potencial.

A prova é mais geral, para jogos de potencial.

Função Potencial

Seja $G = (V, E)$ um digrafo com custo c_e para cada e em E, e os pares de vértices (s_i, t_i) dos jogadores $i = 1, \ldots, k$.

Função Potencial

Seja $G = (V, E)$ um digrafo com custo c_e para cada e em E, e os pares de vértices (s_i, t_i) dos jogadores $i = 1, \ldots, k$.

Seja $S = (P_1, \ldots, P_k)$ um vetor de estratégias.

Seja k_e o número de caminhos em S que usam e.

Função Potencial

Seja $G = (V, E)$ um digrafo com custo c_e para cada e em E, e os pares de vértices (s_i, t_i) dos jogadores $i = 1, \ldots, k$.

Seja $S = (P_1, \ldots, P_k)$ um vetor de estratégias.

Seja k_e o número de caminhos em S que usam e.

Para cada aresta e, defina $\psi_e(S) \; = \; c_e \, H_{k_e}$.

Função Potencial

Seja $G = (V, E)$ um digrafo com custo c_e para cada e em E, e os pares de vértices (s_i, t_i) dos jogadores $i = 1, \ldots, k$.

Seja $S = (P_1, \ldots, P_k)$ um vetor de estratégias.

Seja k_e o número de caminhos em S que usam e.

Para cada aresta e, defina $\psi_e(S) \; = \; c_e \, H_{k_e}$.

Seja $\psi(S) \; = \; \sum_e \psi_e(S)$.

Função Potencial

Seja $G = (V, E)$ um digrafo com custo c_e para cada e em E, e os pares de vértices (s_i, t_i) dos jogadores $i = 1, \ldots, k$.

Seja $S = (P_1, \ldots, P_k)$ um vetor de estratégias.

Seja k_e o número de caminhos em S que usam e.

Para cada aresta e, defina $\psi_e(S) \; = \; c_e \, H_{k_e}$.

Seja $\psi(S) \; = \; \sum_e \psi_e(S)$.

Lema: $\mathrm{custo}(S) \; \leq \; \psi(S) \; \leq \; H_k \, \mathrm{custo}(S)$.

Função Potencial

Seja $G = (V, E)$ um digrafo com custo c_e para cada e em E, e os pares de vértices (s_i, t_i) dos jogadores $i = 1, \ldots, k$.

Seja $S = (P_1, \ldots, P_k)$ um vetor de estratégias.

Seja k_e o número de caminhos em S que usam e.

Para cada aresta e, defina $\psi_e(S) \ = \ c_e \, H_{k_e}$.

Seja $\psi(S) \ = \ \sum_e \psi_e(S)$.

Lema: $\mathrm{custo}(S) \ \leq \ \psi(S) \ \leq \ H_k \, \mathrm{custo}(S)$.

Prova: Para cada e em S, $\psi_e(S) \geq c_e$ e $\psi_e(S) \leq c_e \, H_k$.

Função Potencial Exata

Para cada aresta e, defina $\psi_e(S) \;=\; c_e\, H_{k_e}$.

Seja $\psi(S) \;=\; \sum_e \psi_e(S)$.

Lema: $\text{custo}(S) \;\leq\; \psi(S) \;\leq\; H_k\, \text{custo}(S).$

Função Potencial Exata

Para cada aresta e, defina $\psi_e(S) \; = \; c_e \, H_{k_e}$.

Seja $\psi(S) \; = \; \sum_e \psi_e(S)$.

Lema: $\mathrm{custo}(S) \; \leq \; \psi(S) \; \leq \; H_k \, \mathrm{custo}(S)$.

Lema: Seja $P'_i \neq P_i$ um caminho alternativo para i e seja $S' = (S_{-i}, P'_i)$. Então $\psi(S) - \psi(S') \; = \; \mathrm{custo}_i(S) - \mathrm{custo}_i(S')$.

Função Potencial Exata

Para cada aresta e, defina $\psi_e(S) = c_e H_{k_e}$.

Seja $\psi(S) = \sum_e \psi_e(S)$.

Lema: $\text{custo}(S) \leq \psi(S) \leq H_k \, \text{custo}(S)$.

Lema: Seja $P_i' \neq P_i$ um caminho alternativo para i e seja $S' = (S_{-i}, P_i')$. Então $\psi(S) - \psi(S') = \text{custo}_i(S) - \text{custo}_i(S')$.

Uma função potencial com tal propriedade é dita exata.

Função Potencial Exata

Para cada aresta e, defina $\psi_e(S) \ = \ c_e \, H_{k_e}$.

Seja $\psi(S) \ = \ \sum_e \psi_e(S)$.

Lema: $\mathrm{custo}(S) \ \leq \ \psi(S) \ \leq \ H_k \, \mathrm{custo}(S)$.

Lema: Seja $P'_i \neq P_i$ um caminho alternativo para i e seja $S' = (S_{-i}, P'_i)$. Então $\psi(S) - \psi(S') \ = \ \mathrm{custo}_i(S) - \mathrm{custo}_i(S')$.

Uma função potencial com tal propriedade é dita exata.

Ou similarmente tq $\psi(S) - \psi(S') \ = \ u_i(S') - u_i(S)$.

Função Potencial Exata

Lema: Seja $P_i' \neq P_i$ um caminho alternativo para i e seja $S' = (S_{-i}, P_i')$. Então $\psi(S) - \psi(S') \; = \; \mathrm{custo}_i(S) - \mathrm{custo}_i(S')$.

Função Potencial Exata

Lema: Seja $P'_i \neq P_i$ um caminho alternativo para i e seja $S' = (S_{-i}, P'_i)$. Então $\psi(S) - \psi(S') \ = \ \mathrm{custo}_i(S) - \mathrm{custo}_i(S')$.

Prova:

Se e está em ambos P_i e P'_i ou em nenhum, $\psi_e(S) = \psi_e(S')$.

Função Potencial Exata

Lema: Seja $P_i' \neq P_i$ um caminho alternativo para i e seja $S' = (S_{-i}, P_i')$. Então $\psi(S) - \psi(S') \;=\; \mathrm{custo}_i(S) - \mathrm{custo}_i(S')$.

Prova:

Se e está em ambos P_i e P_i' ou em nenhum, $\psi_e(S) = \psi_e(S')$.

Se $e \in P_i \setminus P_i'$, $\psi_e(S') = \psi_e(S) - \dfrac{c_e}{k_e}$, e i deixou de pagar $\frac{c_e}{k_e}$.

Função Potencial Exata

Lema: Seja $P'_i \neq P_i$ um caminho alternativo para i e seja $S' = (S_{-i}, P'_i)$. Então $\psi(S) - \psi(S') \; = \; \mathrm{custo}_i(S) - \mathrm{custo}_i(S')$.

Prova:

Se e está em ambos P_i e P'_i ou em nenhum, $\psi_e(S) = \psi_e(S')$.

Se $e \in P_i \setminus P'_i$, $\psi_e(S') = \psi_e(S) - \dfrac{c_e}{k_e}$, e i deixou de pagar $\frac{c_e}{k_e}$.

Se $e \in P'_i \setminus P_i$, $\psi_e(S') = \psi_e(S) + \dfrac{c_e}{k_e+1}$, e i paga $\frac{c_e}{k_e+1}$ a mais.

Função Potencial Exata

Lema: Seja $P_i' \neq P_i$ um caminho alternativo para i e seja $S' = (S_{-i}, P_i')$. Então $\psi(S) - \psi(S') \; = \; \mathrm{custo}_i(S) - \mathrm{custo}_i(S')$.

Prova:

Se e está em ambos P_i e P_i' ou em nenhum, $\psi_e(S) = \psi_e(S')$.

Se $e \in P_i \setminus P_i'$, $\psi_e(S') = \psi_e(S) - \dfrac{c_e}{k_e}$, e i deixou de pagar $\frac{c_e}{k_e}$.

Se $e \in P_i' \setminus P_i$, $\psi_e(S') = \psi_e(S) + \dfrac{c_e}{k_e+1}$, e i paga $\frac{c_e}{k_e+1}$ a mais.

Assim sendo $\psi(S) - \psi(S') \; = \; \mathrm{custo}_i(S) - \mathrm{custo}_i(S')$.

Jogos de Potencial

Jogo de potencial: jogo que admite uma função potencial.

Jogos de Potencial

Jogo de potencial: jogo que admite uma função potencial.

Lema anterior: jogos de conexão global são de potencial.

Jogos de Potencial

Jogo de potencial: jogo que admite uma função potencial.

Lema anterior: jogos de conexão global são de potencial.

Jogos de congestionamento:

Dados n, um conjunto E de recursos, uma função $c_e : \{1, \ldots, n\} \rightarrow Z^+$, cada um dos n jogadores tem como estratégias subconjuntos de E.

Jogos de Potencial

Jogo de potencial: jogo que admite uma função potencial.

Lema anterior: jogos de conexão global são de potencial.

Jogos de congestionamento:

Dados n, um conjunto E de recursos, uma função $c_e : \{1, \ldots, n\} \to Z^+$, cada um dos n jogadores tem como estratégias subconjuntos de E.

O custo de i dado o vetor de estratégias $S = (S_1, \ldots, S_n)$ é

$$\sum_{e \in S_i} c_e(\ell_e(S)),$$

onde $\ell_e(S)$ é o número de conjuntos de S contendo e.

Jogos de Potencial

Jogo de potencial: jogo que admite uma função potencial.

Jogos de Potencial

Jogo de potencial: jogo que admite uma função potencial.

Todo jogo de potencial finito tem um equilíbrio puro:

Jogos de Potencial

Jogo de potencial: jogo que admite uma função potencial.

Todo jogo de potencial finito tem um equilíbrio puro:

Seja S tal que $\psi(S)$ é mínimo.

Jogos de Potencial

Jogo de potencial: jogo que admite uma função potencial.

Todo jogo de potencial finito tem um equilíbrio puro:

Seja S tal que $\psi(S)$ é mínimo.

S é um equilíbrio pois,

$\psi(S) \leq \psi(S')$ para todo $S' = (S_{-i}, S'_i)$.

Jogos de Potencial

Jogo de potencial: jogo que admite uma função potencial.

Todo jogo de potencial finito tem um equilíbrio puro:

Seja S tal que $\psi(S)$ é mínimo.

S é um equilíbrio pois,

$\psi(S) \leq \psi(S')$ para todo $S' = (S_{-i}, S'_i)$.

Logo, $u_i(S') \leq u_i(S)$ para todo $S' = (S_{-i}, S'_i)$.

Jogos de Potencial

Jogo de potencial: jogo que admite uma função potencial.

Jogos de congestionamento:

Dados n, conjunto E, funções c_e para cada e em E, e vetor de estratégias $S = (S_1, \ldots, S_n)$, o custo de i para S é $\sum_{e \in S_i} c_e(\ell_e(S))$, onde $\ell_e(S)$ é o número de conjuntos de S contendo e.

Jogos de Potencial

Jogo de potencial: jogo que admite uma função potencial.

Jogos de congestionamento:

Dados n, conjunto E, funções c_e para cada e em E, e vetor de estratégias $S = (S_1, \ldots, S_n)$, o custo de i para S é $\sum_{e \in S_i} c_e(\ell_e(S))$, onde $\ell_e(S)$ é o número de conjuntos de S contendo e.

Rosenthal (1973) provou que todo jogo de congestionamento é um jogo de potencial.

Jogos de Potencial

Jogo de potencial: jogo que admite uma função potencial.

Jogos de congestionamento:

Dados n, conjunto E, funções c_e para cada e em E, e vetor de estratégias $S = (S_1, \ldots, S_n)$, o custo de i para S é $\sum_{e \in S_i} c_e(\ell_e(S))$, onde $\ell_e(S)$ é o número de conjuntos de S contendo e.

Rosenthal (1973) provou que
todo jogo de congestionamento é um jogo de potencial.

Monderer e Shapley (1996) provaram o inverso:
para todo jogo de potencial, há um jogo de congestionamento com a mesma função potencial.

Preço da Estabilidade

Teorema: Se, para um jogo de potencial com potencial ψ, existem números A e B tais que

$$\frac{\mathrm{custo}(S)}{A} \leq \psi(S) \leq B\,\mathrm{custo}(S).$$

para todo vetor de estratégias S, então $\mathrm{PoE} \leq AB$.

Preço da Estabilidade

Teorema: Se, para um jogo de potencial com potencial ψ, existem números A e B tais que

$$\frac{\mathrm{custo}(S)}{A} \leq \psi(S) \leq B\,\mathrm{custo}(S).$$

para todo vetor de estratégias S, então $\mathrm{PoE} \leq AB$.

Prova: Seja S tq $\psi(S)$ é mínimo e S^* com custo mínimo.

Preço da Estabilidade

Teorema: Se, para um jogo de potencial com potencial ψ, existem números A e B tais que

$$\frac{\mathrm{custo}(S)}{A} \leq \psi(S) \leq B\,\mathrm{custo}(S).$$

para todo vetor de estratégias S, então $\mathrm{PoE} \leq AB$.

Prova: Seja S tq $\psi(S)$ é mínimo e S^* com custo mínimo.

Por hipótese,

$$\frac{\mathrm{custo}(S)}{A} \;\leq\; \psi(S) \;\leq\; \psi(S^*) \;\leq\; B\,\mathrm{custo}(S^*).$$

Preço da Estabilidade

Teorema: Se, para um jogo de potencial com potencial ψ, existem números A e B tais que

$$\frac{\text{custo}(S)}{A} \leq \psi(S) \leq B\,\text{custo}(S).$$

para todo vetor de estratégias S, então $\text{PoE} \leq AB$.

Prova: Seja S tq $\psi(S)$ é mínimo e S^* com custo mínimo.

Por hipótese,

$$\frac{\text{custo}(S)}{A} \;\leq\; \psi(S) \;\leq\; \psi(S^*) \;\leq\; B\,\text{custo}(S^*).$$

Logo $\text{custo}(S) \leq AB\,\text{custo}(S^*)$.

Preço da Estabilidade

Teorema: Se, para um jogo de potencial com potencial ψ, existem números A e B tais que

$$\frac{\text{custo}(S)}{A} \leq \psi(S) \leq B\,\text{custo}(S).$$

para todo vetor de estratégias S, então $\text{PoE} \leq AB$.

Preço da Estabilidade

Teorema: Se, para um jogo de potencial com potencial ψ, existem números A e B tais que

$$\frac{\mathrm{custo}(S)}{A} \leq \psi(S) \leq B\,\mathrm{custo}(S).$$

para todo vetor de estratégias S, então $\mathrm{PoE} \leq AB$.

Para jogos de conexão global com k jogadores, vale

Lema: $\mathrm{custo}(S) \ \leq \ \psi(S) \ \leq \ H_k\,\mathrm{custo}(S).$

Preço da Estabilidade

Teorema: Se, para um jogo de potencial com potencial ψ, existem números A e B tais que

$$\frac{\mathrm{custo}(S)}{A} \leq \psi(S) \leq B\,\mathrm{custo}(S).$$

para todo vetor de estratégias S, então $\mathrm{PoE} \leq AB$.

Para jogos de conexão global com k jogadores, vale

Lema: $\mathrm{custo}(S) \;\leq\; \psi(S) \;\leq\; H_k\,\mathrm{custo}(S).$

Portanto, $\mathrm{PoE} \leq H_k$.

Tempo de convergência

Política de melhor resposta converge para um equilíbrio.

Tempo de convergência

Política de melhor resposta converge para um equilíbrio.

Mas quanto tempo leva?

Tempo de convergência

Política de melhor resposta converge para um equilíbrio.

Mas quanto tempo leva?

É possível calcular S tq $\psi(S)$ é mínimo eficientemente?

Tempo de convergência

Política de melhor resposta converge para um equilíbrio.

Mas quanto tempo leva?

É possível calcular S tq $\psi(S)$ é mínimo eficientemente?

Problemas de otimização local (PLS)

Tempo de convergência

Política de melhor resposta converge para um equilíbrio.

Mas quanto tempo leva?

É possível calcular S tq $\psi(S)$ é mínimo eficientemente?

Problemas de otimização local (PLS)

Exemplo: Dada uma fórmula booleana SAT, com peso nas cláusulas, encontrar uma atribuição local ótima.

Tempo de convergência

Política de melhor resposta converge para um equilíbrio.

Mas quanto tempo leva?

É possível calcular S tq $\psi(S)$ é mínimo eficientemente?

Problemas de otimização local (PLS)

Exemplo: Dada uma fórmula booleana SAT, com peso nas cláusulas, encontrar uma atribuição local ótima.

Custo de uma atribuição: peso das cláusulas insatisfeitas.

Atribuição ótima local: Mudar o valor de uma única variável não aumenta o peso das cláusulas satisfeitas.

Tempo de convergência

Política de melhor resposta converge para um equilíbrio.

Mas quanto tempo leva?

É possível calcular S tq $\psi(S)$ é mínimo eficientemente?

Problemas de otimização local (PLS)

Exemplo: Dada uma fórmula booleana SAT, com peso nas cláusulas, encontrar uma atribuição local ótima.

Custo de uma atribuição: peso das cláusulas insatisfeitas.

Atribuição ótima local: Mudar o valor de uma única variável não aumenta o peso das cláusulas satisfeitas.

Esse é PLS-completo.

Complexidade computacional

Problemas de otimização local (PLS)

Dada uma fórmula booleana SAT, com peso nas cláusulas, encontrar uma atribuição local ótima.

Complexidade computacional

Problemas de otimização local (PLS)

Dada uma fórmula booleana SAT, com peso nas cláusulas, encontrar uma atribuição local ótima.

Jogos de congestionamento estão em PLS.

Complexidade computacional

Problemas de otimização local (PLS)

Dada uma fórmula booleana SAT, com peso nas cláusulas, encontrar uma atribuição local ótima.

Jogos de congestionamento estão em PLS.

Redução do SAT:

Instância: k variáveis $x_1, \ldots, x_k$
n cláusulas $C_1, \ldots, C_n$ com pesos $w_1, \ldots, w_n$.

Complexidade computacional

Problemas de otimização local (PLS)

Dada uma fórmula booleana SAT, com peso nas cláusulas, encontrar uma atribuição local ótima.

Jogos de congestionamento estão em PLS.

Redução do SAT:

Instância: k variáveis $x_1, \ldots, x_k$
n cláusulas $C_1, \ldots, C_n$ com pesos $w_1, \ldots, w_n$.

Jogo de congestionamento: k jogadores

Estratégias para i:
conjunto de cláusulas satisfeitas por $x_i \leftarrow$ VERDADE ou
conjunto de cláusulas satisfeitas por $x_i \leftarrow$ FALSO.

Redução do SAT

Dada uma fórmula booleana SAT, com peso nas cláusulas, encontrar uma atribuição local ótima.

Instância: k variáveis $x_1, \ldots, x_k$
n cláusulas $C_1, \ldots, C_n$ com pesos $w_1, \ldots, w_n$.

Jogo de congestionamento: k jogadores

Estratégias para i:
conjunto de cláusulas satisfeitas por $x_i \leftarrow$ VERDADE ou
conjunto de cláusulas satisfeitas por $x_i \leftarrow$ FALSO.

Seja A uma atribuição (vetor de estratégias).
Seja k_j o número de literais falsos por A em C_j.

Redução do SAT

Dada uma fórmula booleana SAT, com peso nas cláusulas, encontrar uma atribuição local ótima.

Instância: k variáveis $x_1, \ldots, x_k$
n cláusulas $C_1, \ldots, C_n$ com pesos $w_1, \ldots, w_n$.

Jogo de congestionamento: k jogadores

Estratégias para i:
conjunto de cláusulas satisfeitas por $x_i \leftarrow$ VERDADE ou
conjunto de cláusulas satisfeitas por $x_i \leftarrow$ FALSO.

Seja A uma atribuição (vetor de estratégias).
Seja k_j o número de literais falsos por A em C_j.

$$c_e(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } k_j < |C_j| \\ w_j & \text{se } k_j = |C_j| \end{cases}$$

Redução do SAT

Dada uma fórmula booleana SAT, com peso nas cláusulas, encontrar uma atribuição local ótima.

Instância: k variáveis $x_1, \ldots, x_k$
n cláusulas $C_1, \ldots, C_n$ com pesos $w_1, \ldots, w_n$.

Jogo de congestionamento: k jogadores

Estratégias para i:
conjunto de cláusulas satisfeitas por $x_i \leftarrow$ VERDADE ou
conjunto de cláusulas satisfeitas por $x_i \leftarrow$ FALSO.

Seja A uma atribuição (vetor de estratégias).
Seja k_j o número de literais falsos por A em C_j.
Seja $c_e(A) = 0$ se $k_j < |C_j|$ e $c_e(A) = w_j$ caso contrário.

Redução do SAT

Dada uma fórmula booleana SAT, com peso nas cláusulas, encontrar uma atribuição local ótima.

Instância: k variáveis $x_1, \ldots, x_k$
n cláusulas $C_1, \ldots, C_n$ com pesos $w_1, \ldots, w_n$.

Jogo de congestionamento: k jogadores

Estratégias para i:
conjunto de cláusulas satisfeitas por $x_i \leftarrow$ VERDADE ou
conjunto de cláusulas satisfeitas por $x_i \leftarrow$ FALSO.

Seja A uma atribuição (vetor de estratégias).
Seja k_j o número de literais falsos por A em C_j.
Seja $c_e(A) = 0$ se $k_j < |C_j|$ e $c_e(A) = w_j$ caso contrário.

A é um equilíbrio sse é uma atribuição local ótima.

Regras de divisões de custo

De volta ao jogo de conexão global:

Regras de divisões de custo

De volta ao jogo de conexão global:

Consideramos a divisão uniforme do custo da aresta.

Regras de divisões de custo

De volta ao jogo de conexão global:

Consideramos a divisão uniforme do custo da aresta.

Existem regras mais razoáveis?

Com PoE melhor?

Para as quais seja fácil determinar equilíbrio?

Regras de divisões de custo

De volta ao jogo de conexão global:

Consideramos a divisão uniforme do custo da aresta.

Existem regras mais razoáveis?

Com PoE melhor?

Para as quais seja fácil determinar equilíbrio?

Projeto de mecanismos

Regras de divisões de custo

Vetor de estratégias $S = (S_1, \ldots, S_n)$

$J_e := \{i : e \in S_i\}$ (jogadores que usam e)

Regras de divisões de custo

Vetor de estratégias $S = (S_1, \ldots, S_n)$

$J_e := \{i : e \in S_i\}$ (jogadores que usam e)

Condições sobre as regras

- justa: $\mathrm{custo}_e(i, S) = 0$ se $i \in J_e$.
- balanceada com orçamento: $\sum_i \mathrm{custo}_e(i, S) = c_e$.

Regras de divisões de custo

Vetor de estratégias $S = (S_1, \ldots, S_n)$

$J_e := \{i : e \in S_i\}$ (jogadores que usam e)

Condições sobre as regras

- justa: $\mathrm{custo}_e(i, S) = 0$ se $i \in J_e$.
- balanceada com orçamento: $\sum_i \mathrm{custo}_e(i, S) = c_e$.

Esquema de divisão distraído (*oblivious*):

$\mathrm{custo}_e(i, S)$ depende apenas de c_e e J_e.

Regras de divisões de custo

Vetor de estratégias $S = (S_1, \ldots, S_n)$

$J_e := \{i : e \in S_i\}$ (jogadores que usam e)

Condições sobre as regras

- justa: $\mathrm{custo}_e(i, S) = 0$ se $i \in J_e$.
- balanceada com orçamento: $\sum_i \mathrm{custo}_e(i, S) = c_e$.

Esquema de divisão distraído (*oblivious*):

$\mathrm{custo}_e(i, S)$ depende apenas de c_e e J_e.

Teorema: Existe esquema de divisão não oblívio em que o jogo de conexão global com $t_i = t$ para todo i tem preço da anarquia é no máximo 2.

Regras de divisões de custo

Vetor de estratégias $S = (S_1, \ldots, S_n)$

$J_e := \{i : e \in S_i\}$ (jogadores que usam e)

Condições sobre as regras

- justa: $\text{custo}_e(i, S) = 0$ se $i \in J_e$.
- balanceada com orçamento: $\sum_i \text{custo}_e(i, S) = c_e$.

Esquema de divisão distraído (*oblivious*):

$\text{custo}_e(i, S)$ depende apenas de c_e e J_e.

Teorema: Existe esquema de divisão não oblívio em que o jogo de conexão global com $t_i = t$ para todo i tem preço da anarquia é no máximo 2.