Teoria dos Jogos Algorítmica
Maximização de Lucros no Design de Mecanismos

Luis Gustavo Rocha Vianna

Instituto de Matemática e Estatística – IME
Universidade de São Paulo – USP

Introdução

- Design de mecanismos visto no curso focou no design de mecanismos para funções de escolha social, especialmente para a maximização do bem-estar social.
- Agora, no entanto, teremos outro objetivo, a maximização do lucro.
- Em economia, esse problema é chamado de design de mecanismos ótimos.

Maximização do lucro em Leilões

Leilões com agentes de parâmetro único:

- n agentes com um objetivo único.
- Cada agente tem valoração v_i pelo bem/serviço desejado.
- Mecanismo recebe lances $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ e produz resultado $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e preços $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$.
- $x_i = 1$ se agente i é atendido e $x_i = 0$ caso contrário
- Utilidade dos agentes é $u_i = v_i * x_i - p_i$.
- Em geral, o custo de produzir um resultado é $c(\boldsymbol{x})$
- Lucro do leiloeiro é: $\sum_i p_i - c(\boldsymbol{x})$.

Maximização de lucro em Leilões

O leilão é individualmente racional, $x_i = 1 \rightarrow p_i < v_i$.
E não há transferências positivas, $x_i = 0 \rightarrow p_i = 0$.

Estudaremos o problema de encontrar mecanismos, ou seja, funções: $\boldsymbol{b} \longrightarrow (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$, que maximizem o lucro do leiloeiro e sejam a prova de estratégia para os agentes.

Alguns dos leilões já estudados são leilões com agentes de parâmetro único:

- Leilões de um único item. Fazendo $c(\boldsymbol{x}) = 0$ se $||\boldsymbol{x}||_1 \leq 1$ e $c(\boldsymbol{x}) = \infty$ se $||\boldsymbol{x}||_1 \geq 2$. Vimos que nesse caso leilões de segundo preço são a prova de estratégia e maximizam o bem-estar social.
- Leilões Combinatórios com agentes de objetivo único. Cada agente tem valor v_i pelo conjunto S_i. Fazendo $c(\boldsymbol{x}) = 0$ se $\forall i, j, S_i \cap S_j \neq \varnothing \rightarrow x_i x_j = 0$ e $c(\boldsymbol{x}) = \infty$ caso contrário.

Mecanismos Aleatórios

Em geral, consideramos também mecanismos aleatórios, neste caso:

- $x_i(\boldsymbol{b})$ é a probabilidade de i ser atendido.
- $p_i(\boldsymbol{b})$ é o custo esperado para o agente i.
- $u_i(\boldsymbol{b})$ é a utilidade esperada para o agente i.

Um mecanismo é a prova de estratégia em esperança sse $\forall\ i$, v_i, b_i, e $\boldsymbol{b}_{-i}$, a utilidade esperada de i ao declarar sua valoração correta é máxima.

$$u_i(v_i, \boldsymbol{b}_{-i}) \geq u_i(b_i, \boldsymbol{b}_{-i})$$

Um mecanismo é a prova de estratégia em esperança sse, para cada i e $\boldsymbol{b}_{-i}$:

- $x_i(b_i, \boldsymbol{b}_{-i})$ é monotonicamente não decrescente.
- $p_i(b_i, \boldsymbol{b}_{-i}) = b_i x_i(b_i, \boldsymbol{b}_{-i}) - \int_0^{b_i} x_i(z, \boldsymbol{b}_{-i}) dz$.

Por este teorema, a regra de alocação $\boldsymbol{x}(.)$ de um mecanismo determina os preços para um mecanismo a prova de estratégias, reduzindo o problema a encontrar alocações que maximizem o lucro induzido.

No caso particular de um mecanismo determinístico, a monotonicidade de $x(b_i)$ implica que, fixo $\boldsymbol{b}_{-i}$:

- Existe uma constante t_i tal que $b_i > t_i \rightarrow x(b_i) = 1$ e $b_i < t_i \rightarrow x(b_i) = 0$
- $p(b_i) = b_i - \int_{t_i}^{b_i} 1 dz = t_i$

Portanto, qualquer mecanismo determinístico a prova de estratégias é determinado por n funções $t_i(\boldsymbol{b_{-i}})$.

Mercados para a Maximização dos Lucros

Iremos considerar três abordagens para o problema de design de mecanismos ótimos:

- Leilões com distribuição a priori conhecida para os parâmetros dos agentes, como é típico na abordagem usada na Economia;
- Soluções aproximadas onde apesar de desconhecida a priori dependendo do tamanho dos mercado elas se aproximam da eficiência ótima;
- Soluções sem suposições sobre a priori ou o tamanho do mercado, com a definição de otimalidade relativa, já que sem conhecimento das distribuicões não há mecanismo que gere lucro ótimo para todas possibilidades.

Design de Mecanismos Ótimos Bayesianos

Consideraremos agora o problema do leilão com n jogadores de parâmetro único. Supondo que o leiloeiro conhece as distribuições F_i das valorações v_i de cada jogador.

Exemplo: Leilão de um item

- 2 jogadores, a e b.
- v_a e v_b distribuídas uniformemente em $[0, 1]$.
- $c(\boldsymbol{x}) = 0$ se aloca o item a zero ou um dos jogadores e $c(x_a = x_b = 1) = \infty$

Soluções que maximizam o bem estar social em esperança:

- Leilão de primeiro preço, se $i = argmax(b_a, b_b)$, $x_i = 1$ e $p_i = b_i$, $x_j = 0$ e $p_j = 0$ para outro jogador.
- Leilão de segundo preço, se $i = argmax(b_a, b_b)$, $x_i = 1$ e $p_i = min(b_a, b_b)$, $x_j = 0$ e $p_j = 0$ para outro jogador.

Leilão de um item: Lucro

Para o leilão de primeiro preço, um equilíbrio bayesiano para os jogadores é apostar $b_i = \frac{v_i}{2}$
Nesse caso, o lucro esperado do leiloeiro é $\mathbb{E}\left[\max(\frac{v_a}{2}, \frac{v_b}{2})\right] = \frac{1}{3}$
Para o leilão de segundo preço, $b_i = v_i$ é uma estratégia dominante e o lucro esperado é $\mathbb{E}\left[\min(v_a, v_b)\right] = \frac{1}{3}$

No entanto, existe uma solução com lucro esperado maior, o Leilão de Vickrey com preço de reserva r, VA_r vende o item para o maior apostador que aposte mais que r ou fica com o item caso não haja lances maiores a r.
O leilão $VA_{1/2}$ não maximiza o bem-estar social, mas tem lucro esperado $\frac{5}{12}$

Valorações Virtuais e Excedente Virtual

Denotamos $F_i(z)$ a função de distribuição da valoração v_i de um jogador i e $f_i = \frac{d}{dz}F_i(z)$ a função de densidade dessa distribuição.

Agora definiremos a valoração virtual:

$$\phi_i(v_i) = v_i - \frac{1 - F_i(v_i)}{f_i(v_i)}.$$

Agora e dadas todas valorações v_i, definimos o excedente virtual:

$$virtualSurplus(\boldsymbol{x}) = \sum_i \phi_i(v_i)x_i - c(\boldsymbol{x}).$$

Lucro Esperado e Excedente Virtual

O lucro esperado é $M = \mathbb{E}_{\boldsymbol{v}}\left[\sum_i p_i(\boldsymbol{v}) - c(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{v}))\right]$.
Vamos mostrar que num mecanismo a prova de estratégia, para cada jogador i e $\boldsymbol{b}_{-i}$ fixo, vale que

$$\mathbb{E}_{b_i}\left[p_i(b_i)\right] = \mathbb{E}_{b_i}\left[\phi_i(b_i)x_i(b_i)\right].$$

Assim temos que para mecanismos a prova de estratégia:

$$M = \mathbb{E}_{\boldsymbol{v}}\left[\sum_i \phi_i(v_i)x_i(\boldsymbol{v}) - c(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{v}))\right].$$

Portanto, mecanismos que maximizam o excedente virtual também maximizam o lucro.

Maximização do Excedente Virtual

Vimos que o mecanismo a prova de estratégia que maximiza o excedente virtual é o mecanismo ótimo.

No entanto, falta observar quando um mecanismo que maximiza o excedente virtual é a prova de estratégia, ou seja, gera alocação $\boldsymbol{x}$ monotônica.

Lembrando que a regra do mecanismo VCG é a prova de estratégia pois maximiza o excedente real $\sum_i v_i x_i - c(\boldsymbol{x})$, a maximização do excedente virtual produz alocação monotônica se as valorações virtuais $\phi_i(v_i)$ forem monotônicas.

Mecanismo de Myerson

Mecanismo de Myerson $Mye_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{b})$:

1. Dadas apostas $\boldsymbol{b}$ e distribuições $\boldsymbol{F}$, calcule “apostas virtuais”: $b'_i = \phi_i(b_i)$.
2. Execute VCG nas apostas virtuais para obter alocações $\boldsymbol{x}'$ e preços $\boldsymbol{p}'$.
3. Produz resultado $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$ e preços $\boldsymbol{p}$ tq $p_i = \phi_i^{-1}(p'_i)$.

Aplicando o Mecanismo de Myerson

Para o leilão de único item, o mecanismo que maximiza o excedente é dá o item para o maior apostador ou fica com o item se nenhuma aposta for positiva.

No caso do excedente virtual, uma aposta positiva pode corresponder a uma aposta virtual negativa, logo o mecanismo pode decidir não alocar o item.

O pagamento é tal que se 1 vence
$p_1 = inf\{b : \phi_1(b) \geq \phi_2(b_2) \wedge \phi_1(b) \geq 0\}$.
Se $F_1 = F_2 = F$, $p_1 = \max(b_2, \phi^{-1}(0))$.

Aplicando o Mecanismo de Myerson

Assim, concluímos para o leilão de único item e 2 jogadores com distribuições independentes e iguais, que o mecanismo ótimo é o leilão de Vickrey com preço de reserva $\phi^{-1}(0)$, $VA_{\phi^{-1}(0)}$.

No exemplo que vimos, $v_i \sim U[0,1]$.
$F(z) = z$ e $f(z) = 1$, logo $\phi(z) = 2z - 1$.
$\phi^{-1}(0) = \frac{1}{2}$. Portanto $VA_{1/2}$ é o mecanismo ótimo.

Aplicando o Mecanismo de Myerson

Outro exemplo interessante é na venda de bens digitais, onde $c(\boldsymbol{x}) = 0 \forall \boldsymbol{x}$

Neste caso o preço determinado pelo excedente real seria 0, e no caso do excedente virtual é $\phi^{-1}(0)$, a solução de:

$$b - \frac{1 - F(b)}{f(b)} = 0$$

Este preço é o preço ótimo, que corresponde a $argmax_z z(1 - F(z))$.

Aproximações do Design Ótimo Bayesiano sem Priori

A suposição de priori conhecida faz sentido para mercados grandes e inclusive nos quais é possível inferir distribuições a partir das apostas dos agentes.

De um vetor $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ a distribuição empírica $F_{\boldsymbol{b}}$ é tal que $X \sim F_{\boldsymbol{b}}$, $Pr[X > z] = \frac{n_z}{n}$, onde $n_z = \#\{i | b_i > z\}$

Mecanismo de Myerson Empírico

O Mecanismo empírico de Myerson (ME), para uma entrada $\boldsymbol{b}$:

Para cada jogador i

1. Obtenha a distribuição empírica $F_{\boldsymbol{b}_{-i}}$
2. Simule $Mye_{F_{\boldsymbol{b}_{-i}}}(\boldsymbol{b})$ obtendo $\boldsymbol{x}^{(i)}$ e $\boldsymbol{p}^{(i)}$.

Produz resultado $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{p}$ tal que $x_i = \boldsymbol{x}_i^{(i)}$ e $p_i = \boldsymbol{p}_i^{(i)}$

Como $Mye_{F_{\boldsymbol{b}_{-i}}}(\boldsymbol{b})$ é simulação de Mye e i não pode manipular $F_{\boldsymbol{b}_{-i}}$, esse mecanismo é a prova de estratégias.

Mecanismo de Myerson Empírico

O mecanismo ME combina resultados de simulações diferentes de Mye_F, por isso pode gerar alocações impossíveis $(c(\boldsymbol{x}) = \infty)$.

Além disso, queremos saber quanto adequadas são as alocações possíveis produzidas em termos de maximização dos lucros.

Para mercados grandes é esperado que $F_{\boldsymbol{b}_{-i}}$ se aproxime da distribuição F desconhecida e por tanto o resultado do mecanismo se aproxime do mecanismo de Myerson.

Mecanismo de Myerson Empírico

O mecanismo de ME pode gerar resultados muito ruins por encontrar preços ótimos diferentes nas distribuições $\boldsymbol{b}_{-i}$ de cada agente.

Exemplo no leilão de bens digitais:

- 100 agentes, 10 com aposta 10\$ e 90 com aposta 1\$.
- ME então decide os preços ótimos para cada $\boldsymbol{b}_{-i}$.
- Se $b_i = 1\$$, $\boldsymbol{b}_{-i}$ tem 89 apostas de 1\$ e 10 de 10\$, então o preço ótimo é $opt(\boldsymbol{b}_{-i}) = \$10$, e i tem sua aposta rejeitada.
- Se $b_i = 10\$$, $\boldsymbol{b}_{-i}$ tem 90 apostas de 1\$ e 9 de 10\$, então o preço ótimo é $opt(\boldsymbol{b}_{-i}) = \$1$, e i é aceito por apenas 1\$.

Este resultado tem lucro de apenas 10\$, quando o máximo seria 100\$

Mecanismo de Myerson Empírico com amostragem

O Mecanismo empírico de Myerson (ME) com amostragem, para uma entrada $\boldsymbol{b}$:

1. Separe as amostras em dois grupos $\boldsymbol{b}'$ e $\boldsymbol{b}''$.
2. Obtenha as distribuições empíricas $F' = F_{\boldsymbol{b}'}$ e $F'' = F_{\boldsymbol{b}''}$
3. Simule $Mye_{F''}(\boldsymbol{b}')$ e $Mye_{F'}(\boldsymbol{b}'')$.

Os resultados de cada i são os produzidos nas simulações que não utilizaram sua aposta b_i logo o mecanismo ainda é a prova de estratégias. Porém, como ainda combina resultados de simulações pode gerar resultados impossíveis.

Mecanismo de Myerson Empírico com amostragem

Apesar poder gerar resultados impossíveis, a etapa de amostragem aleatória permite que ele obtenha bons resultados esperados.

Para o leilão digital, com lances $\boldsymbol{b}$ tais que $b_i \in [1, h]$, o lucro esperado do mecanismo ME com amostragem converge para o ótimo para venda de preço único conforme o número de agentes aumenta.

Taxas de convergência

Para o leilão de bens digitais, definindo Q o conjunto de preços possíveis.
Para $q \in Q$, definimos $q(b_i) =$ q se $b_i > q$ e $q(b_i) = 0$ caso contrário.
$q(\boldsymbol{b}) = \sum_i q(b_i)$ e $opt_Q(\boldsymbol{b}) = argmax_{q \in Q} q(\boldsymbol{b})$ e $OPT_Q(\boldsymbol{b}) = \max_{q \in Q} q(\boldsymbol{b})$

Taxas de convergência

Para Q, $\boldsymbol{b}$ e h, com $q(b_i) < h \; \forall q, i$ e $OPT_Q(\boldsymbol{b}) \geq \frac{8h}{\epsilon^2} ln\left(\frac{2|Q|}{\delta}\right)$, o lucro do ME com amostragem é ao menos $(1 - \epsilon)OPT_Q(\boldsymbol{b})$ com probabilidade $(1 - \delta)$.

Como as apostas são limitadas por h o limite inferior no lucro ótimo é também um limite inferior no tamanho de mercado necessário para soluções ϵ-ótimas.

Otimalidade Sem Priori

Em mercados pequenos, o teorema de convergência do mecanismo ME não vale e não é esperado que resultados baseados em estimar a priori possam ser eficientes.

Lembrando que um mecanismo a prova de estratégia deve selecionar valores t_i que independem da valoração v_i de cada agente, é impossível ter um mecanismo que seja ótimo para qualquer entrada, sempre haverá um conjunto de apostas onde outro mecanismo aprova de estratégias obtém lucro maior.

Otimalidade Sem Priori

Nessas situações é desejado encontrar mecanismos cujo lucro fique próximo de uma função de modelo de lucro $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

A taxa competitiva de um mecanismo A, em relação a um modelo de lucro é definida por:

$$\beta = sup_{\mathbf{v}} \frac{G(\mathbf{v})}{A(\mathbf{v})}.$$

Dada a função de modelo de lucro, G, o objetivo é encontrar um mecanismo que minimize a taxa competitiva, denominado mecanismo ótimo competitivo para G.

Otimalidade Sem Priori

Os modelos de lucro são funções que podem se basear nos valores verdadeiros v_i e por isso muitos modelos estão além de fatores constantes para qualquer mecanismo.

No leilão de bens digitais, o lucro máximo quando todo comprador que vence paga sua valoração ou o lucro máximo atingível com um preço constante são modelos de lucros para os quais não há mecanismo competitivo.

Um modelo para o qual existem algoritmos competitivos, inclusive o ME com amostragem é o seguinte:

$$\mathbb{F}^{(2)}(\boldsymbol{v}) = \max_{i \geq 2} i v_{(i)},$$

onde $v_{(i)}$ é a i-ésima maior valoração.

Referência

Noam Nisan, Tim Roughgarden, Eva Tardos, and Vijay V. Vazirani.
Algorithmic Game Theory.
Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2007.