Teoria dos Jogos Algorítmica
Departamento de Ciência da Computação
IME-USP
Notas do Seminário:
Cap. 13 Profit Maximization in Mechanism Design

Luis Gustavo Rocha Vianna - NUSP:5947238
Prof.^{a} Cristina Gomes Fernandes

8 de julho de 2013

Maximização do Lucro no Design de Mecanismos

Durante as aulas, estudamos design de mecanismos objetivando a implementação de uma escolha social, especialmente buscando maximizar o bem-estar social. Nestas notas, porém, vamos considerar o problema de design de mecanismo sobre uma perspectiva diferente, buscando maximizar o lucro do mecanismo.

Iremos estudar o design de mecanismos para o leilões, buscando maximizar o lucro do leiloeiro. Em nosso modelo, um leilão é um problema com n agentes, que estão interessados em conjuntos de serviços e um leiloeiro, que pode prover os serviços aos agentes. Vamos considerar apenas agentes de parâmetro único, isto é, cada agente tem apenas um valor real v_i que representa sua valoração, caso o leiloeiro atender seu pedido. Assumimos ainda que as valorações são normalizadas de forma que não ser atendido fornece valor 0 para qualquer agente. Um mecanismo recebe apostas $\vec{b}$ dos agentes, representando suas valorações, e produz uma alocação dos serviços, $\vec{x}$ e preços $\vec{p}$, de forma que $x_i = 1$ se e somente se o agente i é atendido e p_i é o preço pago pelo agente i por esse serviço. Consideramos que a utilidade do agente i é $u_i = x_i v_i - p_i$. Logo, o objetivo do agente é escolher sua aposta de modo a ser atendido e minimizar o preço.

Para representar de modo geral as relações entre os serviços consideramos que existe um custo $c(\vec{x}) \in \mathbb{R}$ associado a cada alocação $\vec{x}$ e que o leiloeiro deverá pagar para esse custo, de modo que o lucro do leiloeiro será

$$L = \sum_i p_i - c(\vec{x}).$$

Assim, nosso objetivo será encontrar um mecanismo que seja a prova de estratégia e que maximize o lucro do leiloeiro.

Outras considerações além disso sobre o mecanismo são as seguintes:

- O leilão é individualmente racional, ou seja, $x_i = 1 \to p_i \leq v_i$. Comparamos com a valoração real v_i pois supomos que o agente pode recusar o serviço se tiver utilidade negativa.
- Não há transferências positivas, ou seja, $x_i = 0 \to p_i = 0$.

Para ilustrar um pouco a generalidade desse modelo, seguem as formulações de alguns dos leilões já estudados como leilões com agentes de parâmetro único:

- Leilões de um único item. Fazendo $c(\vec{x}) = 0$ se $||\vec{x}||_1 \leq 1$ e $c(\vec{x}) = \infty$ se $||\vec{x}||_1 \geq 2$. Vimos que nesse caso leilões de segundo preço são a prova de estratégia e maximizam o bem-estar social.

- Leilões Combinatórios com agentes de objetivo único. Cada agente tem valor v_i pelo conjunto S_i. Fazendo $c(\vec{x}) = 0$ se $\forall i, j, S_i \cap S_j \neq \emptyset \rightarrow x_i x_j = 0$ e $c(\vec{x}) = \infty$ caso contrário.

Nosso modelo de mecanismo além disso permite que o mecanismo seja aleatório, neste caso:

- $x_i(\vec{b})$ é a probabilidade de i ser atendido.

- $p_i(\vec{b})$ é o custo esperado para o agente i.

- $u_i(\vec{b})$ é a utilidade esperada para o agente i.

Para mecanismos aleatórios a condição de ser a prova de estratégia se torna a de ser a prova de estratégia em esperança. Um mecanismo é a prova de estratégia em esperança se e somente se $\forall$ i, v_i, b_i, e $\vec{b}_{-i}$, a utilidade esperada de i ao declarar sua valoração correta é máxima, ou seja,

$$u_i(v_i, \vec{b}_{-i}) \geq u_i(b_i, \vec{b}_{-i}).$$

Para caracterizar os mecanismos a prova de estratégia utilizamos o teorema da seção 5.6 do capitulo 9[1]: Um mecanismo é a prova de estratégia em esperança se, e somente se, para cada i e $\vec{b}_{-i}$:

- $x_i(b_i, \vec{b}_{-i})$ é monotonicamente não decrescente.

- $p_i(b_i, \vec{b}_{-i}) = b_i x_i(b_i, \vec{b}_{-i}) - \int_0^{b_i} x_i(z, \vec{b}_{-i}) dz$.

Segundo este teorema, para um mecanismo a prova de estratégias, a função de alocação $\vec{x}(b_i, \vec{b_{-i}})$ determina o preço $p_i(b_i)$, logo para especificar um mecanismo é apenas necessário descrever a alocação. Especificamente, qualquer mecanismo determinístico a prova de estratégias é determinado por n funções $t_i(\vec{b_{-i}})$, onde $x_i(b_i, \vec{b_{-i}}) = 1 \Leftrightarrow b_i \geq t_i(\vec{b_{-i}})$

Mercados para a Maximização dos Lucros

Iremos considerar três abordagens para o problema de design de mecanismos ótimos:

- Mecanismos Ótimos Bayesianos: No caso de leilões com distribuição a priori conhecida para os parâmetros dos agentes, como é típico na abordagem usada na Economia;

- Aproximações sem conhecimento a priori de mecanismos Ótimos: Soluções aproximadas onde apesar de a distribuição das valorações dos agentes ser desconhecida a priori, pode-se aproxima-la através da informação obtida nas apostas;

- Mecanismos Ótimos sem conhecimento a priori: Soluções sem suposições sobre a distribuição das valorações ou o tamanho do mercado, com a definição de otimalidade relativa, já que sem conhecimento das distribuições não há mecanismo que gere lucro ótimo para todas possibilidades.

1 Design de Mecanismos Ótimos Bayesianos

Para obter soluções ótimas bayesianas é suposto que o leiloeiro, e logo o mecanismo, conhece as distribuições F_i das valorações v_i de cada jogador. Nesse caso iremos mostra que existe um algoritmo que maximiza o lucro esperado do leiloeiro.

Para exemplificar um leilão com esse conhecimento, vamos considerar o leilão de único item, com dois jogadores e valorações uniformes em $[0, 1]$. Nesse caso, $c(\vec{x}) = 0$ se aloca o item a zero ou um dos jogadores e $c(x) = \infty$ se aloca aos dois.

Para esse problema são conhecidas duas soluções que maximizam o bem estar social em esperança:

- Leilão de primeiro preço, se $i = argmax(b_a, b_b)$, $x_i = 1$ e $p_i = b_i$, $x_j = 0$ e $p_j = 0$ para outro jogador.

- Leilão de segundo preço, se $i = argmax(b_a, b_b)$, $x_i = 1$ e $p_i = min(b_a, b_b)$, $x_j = 0$ e $p_j = 0$ para outro jogador.

No entanto queremos avaliar quanto esses mecanismos são eficientes em relação ao lucro do leiloeiro.

Para o leilão de primeiro preço, um equilíbrio bayesiano para os jogadores é apostar $b_i = \frac{v_i}{2}$.(Descrito na seção 6.4 do capítulo 9[1]). Nesse caso, o lucro esperado do leiloeiro é $\mathbb{E}\left[\max(\frac{v_a}{2}, \frac{v_b}{2})\right] = \frac{1}{3}$

Para o leilão de segundo preço, $b_i = v_i$ é uma estratégia dominante e o lucro esperado é $\mathbb{E}\left[\min(v_a, v_b)\right] = \frac{1}{3}$.

No entanto, existe uma solução com lucro esperado maior. Definimos o Leilão de Vickrey com preço de reserva r, VA_r vende o item para o maior apostador que aposte mais que r ou fica com o item caso não haja lances maiores a r, nesse caso sempre que o item é alocado o preço pago é pelo menos r.

O leilão $VA_{1/2}$ não maximiza o bem-estar social, mas tem lucro esperado $\frac{5}{12}$, inclusive é o ótimo bayesiano para este problema.

Valorações Virtuais e Excedente Virtual

Agora iremos definir propriedades em função das distribuições conhecidas para descrever o algoritmo que encontra o mecanismo Ótimo Bayesiano. Definiremos quantidades virtuais cuja maximização é equivalentes a maximização do lucro, logo elas são utilizadas para obter a solução ótima.

Denotamos $F_i(z)$ a função de distribuição da valoração v_i de um jogador i e $f_i = \frac{d}{dz}F_i(z)$ a função de densidade dessa distribuição.

Agora definiremos a valoração virtual de um agente:

$$\phi_i(v_i) = v_i - \frac{1 - F_i(v_i)}{f_i(v_i)}.$$

Agora e dadas todas valorações v_i, definimos o excedente virtual de uma alocação $\vec{x}$, que corresponde a soma das valorações virtuais obtidas pelos agentes numa alocação menos o custo da alocação:

$$EV(\vec{x}) = \sum_i \phi_i(v_i)x_i - c(\vec{x}).$$

O lucro esperado é de um mecanismo é $M = \mathbb{E}_{\vec{v}}\left[\sum_i p_i(\vec{v}) - c(\vec{x}(\vec{v}))\right]$.

Iremos utilizar que do modo que as valorações virtuais foram definidas, para cada jogador i e $\vec{b}_{-i}$ fixo, vale que

$$\mathbb{E}_{b_i}\left[p_i(b_i)\right] = \mathbb{E}_{b_i}\left[\phi_i(b_i)x_i(b_i)\right].$$

A seguir demonstramos esta propriedade, removendo o indíce i das variáveis por se tratar sempre desse jogador:

$$\mathbb{E}_b\left[p(b)\right] = \int_0^\infty p(b)f(b)db.$$

Utilizando a fórmula para o preço de um mecanismo a prova de estratégia:

$$\mathbb{E}_b\left[p(b)\right] = \int_0^\infty bx(b)f(b)db - \int_{b=0}^\infty \int_{z=0}^b x(z)f(b)dzdb$$

Trocando a ordem das integrais no segundo termo:

$$\mathbb{E}_b\left[p(b)\right] = \int_0^\infty bx(b)f(b)db - \int_{z=0}^\infty x(z)\int_{b=z}^\infty f(b)dbdz$$

$$\mathbb{E}_b\left[p(b)\right] = \int_0^\infty bx(b)f(b)db - \int_{z=0}^\infty x(z)[1-F(z)]dz$$

$$\mathbb{E}_b\left[p(b)\right] = \int_{b=0}^\infty x(b)f(b)\left[b - \frac{1-F(b)}{f(b)}\right]db$$

$$\mathbb{E}_b\left[p(b)\right] = \int_{b=0}^\infty x(b)f(b)\phi(b)db = \mathbb{E}_b\left[\phi(b)x(b\right]$$

Assim temos que para mecanismos a prova de estratégia o lucro esperado é:

$$M = \mathbb{E}_{\vec{v}}\left[\sum_i \phi_i(v_i)x_i(\vec{v}) - c(\vec{x}(\vec{v}))\right].$$

Portanto, mecanismos que maximizam o excedente virtual também maximizam o lucro. No entanto, falta observar quando um mecanismo que maximiza o excedente virtual é a prova de estratégia, ou seja, gera alocação $\vec{x}$ monotônica.

Lembrando que a regra do mecanismo VCG é a prova de estratégia pois maximiza o excedente real $\sum_i v_i x_i - c(\vec{x})$, a maximização do excedente virtual produz alocação monotônica se as valorações virtuais $\phi_i(v_i)$ forem monotônicas.

Mecanismo de Myerson

Assim finalmente podemos definir o mecanismo que encontra soluções Ótimas Bayesianas, o Mecanismo de Myerson $Mye_{\vec{F}}(\vec{b})$:

1. Dadas apostas $\vec{b}$ e distribuições $\vec{F}$, calcule "apostas virtuais": $b'_i = \phi_i(b_i)$.
2. Execute VCG nas apostas virtuais para obter alocações $\vec{x}'$ e preços $\vec{p}'$.
3. Produz resultado $\vec{x} = \vec{x}'$ e preços $\vec{p}$ tq $p_i = \phi_i^{-1}(p'_i)$.

Vamos exemplificar o funcionamento do mecanismo de Myerson para o leilão de único item. Nesse leilão e mecanismo que maximiza o excedente (real ou virtual) é o que dá o item para o maior apostador ou fica com o item se nenhuma aposta for positiva.

Se as apostas são positivas o item é sempre alocado, mas no caso do excedente virtual, uma aposta positiva pode corresponder a uma aposta virtual negativa, logo o mecanismo pode decidir não alocar o item.

O pagamento é tal que se 1 vence paga o menor preço que poderia ter apostado para continuar vencendo, ou seja, $p_1 = inf\{b : \phi_1(b) \geq \phi_2(b_2) \wedge \phi_1(b) \geq 0\}$.

Supondo os agentes com distribuições i.i.d, $F_1 = F_2 = F$, nesse caso $p_1 = \max(b_2, \phi^{-1}(0))$.

Assim, concluímos para o leilão de único item e 2 jogadores com distribuições independentes e iguais, que o mecanismo ótimo é o leilão de Vickrey com preço de reserva $\phi^{-1}(0)$, $VA_{\phi^{-1}(0)}$.

No exemplo que vimos, $v_i \sim U[0,1]$. $F(z) = z$ e $f(z) = 1$, logo $\phi(z) = 2z - 1$. $\phi^{-1}(0) = \frac{1}{2}$. Portanto $VA_{1/2}$ é o mecanismo ótimo.

Aproximações do Design Ótimo Bayesiano sem Priori

Quando não podemos considerar que a distribuição das valorações dos agentes é conhecida, não podemos encontrar uma solução Bayes ótima, porém se o mercado é suficientemente grande as apostas dos jogadores permitem inferir distribuições e há mecanismos que aproximam o mecanismo ótimo bayesiano.

Inicialmente definimos a distribuição inferida a partir de apostas. De um vetor $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ a distribuição empírica $F_{\vec{b}}$ é tal que $X \sim F_{\vec{b}}$, $Pr[X > z] = \frac{n_z}{n}$, onde $n_z = \#\{i|b_i > z\}$

Utilizaremos essas distribuições empíricas como aproximações das distribuições reais (desconhecidas) e podemos aplicar uma versão aproximada do mecanismo de Myerson, Mecanismo empírico de Myerson com amostragem (ME):

1. Separe as amostras em dois grupos $\vec{b'}$ e $\vec{b''}$.

2. Obtenha as distribuições empíricas $F' = F_{\vec{b'}}$ e $F'' = F_{\vec{b''}}$

3. Simule $Mye_{F''}(\vec{b'})$ e $Mye_{F'}(\vec{b''})$.

Os resultados de cada i são os produzidos nas simulações que não utilizaram sua aposta b_i logo o mecanismo ainda é a prova de estratégias. Porém, como ainda combina resultados de simulações pode gerar resultados impossíveis, $(c(\vec{x}) = \infty)$.

No entanto, para muitos jogadores, mercados grandes a distribuição estimada se aproxima da verdadeira e o algoritmo com amostragem obtém bons resultados no caso médio.

Otimalidade Sem Priori

Em mercados pequenos, o teorema de convergência do mecanismo ME não vale e não é esperado que resultados baseados em estimar a priori possam ser eficientes. Lembrando que um mecanismo a prova de estratégia deve selecionar valores t_i que independem da valoração v_i de cada agente, é impossível ter um mecanismo que seja ótimo para qualquer entrada, sempre haverá um conjunto de apostas onde outro mecanismo à prova de estratégias obtém lucro maior.

Nessas situações é desejado encontrar mecanismos cujo lucro fique próximo de uma função de modelo de lucro $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. A taxa competitiva de um mecanismo A, em relação a um modelo de lucro é definida por:

$$\beta = sup_{\vec{v}} \frac{G(\vec{v})}{A(\vec{v})}.$$

Dada a função de modelo de lucro, G, o objetivo é encontrar um mecanismo que minimize a taxa competitiva, denominado mecanismo ótimo competitivo para G.

Os modelos de lucro são funções que podem se basear nos valores verdadeiros v_i e por isso muitos modelos são capazes de descrever lucros assintoticamente melhores que qualquer mecanismo. Nesse caso um problema interessante é encontrar os modelos de lucro de maior lucro que possuem mecanismos competitivos que podem ser implementados.

Conclusão

Do ponto de vista da teoria dos jogos algorítmica, o problema de maximização de lucros é diferente da maximização do bem-estar social principalmente por depender do conhecimento disponível ao mecanismo sobre as valorações dos agentes. No caso genérico onde as distribuições são desconhecidas a eficiência dos mecanismos é limitada por essa incerteza e a eficiência pratica dos mecanismos é comparada com modelos de lucro que supõe conhecimento das distribuições. Para problemas onde a distribuição é conhecida existe um algoritmo, o Mecanismo de Myerson, que produz corretamente a alocação que maximiza o lucro. Além disso, para mercados grandes onde a distribuição é conhecida é possível se obter soluções aproximadas utilizando a distribuição das apostas como representante da distribuição dos agentes (considerando que os agentes são parte de uma mesma população).

Referências

[1] Noam Nisan, Tim Roughgarden, Eva Tardos, and Vijay V. Vazirani. *Algorithmic Game Theory*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2007.