Algoritmos de Aproximação

Segundo Semestre de 2012

Cobertura por conjuntos

Instância:

- conjunto base finito E
- coleção $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ de subconjuntos de E
- custo $c_j > 0$ para cada S_j em $\mathcal{S}$

Objetivo: encontrar cobertura $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ de E de custo mínimo.

Cobertura por conjuntos

Instância:

- conjunto base finito E
- coleção $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ de subconjuntos de E
- custo $c_j > 0$ para cada S_j em $\mathcal{S}$

Objetivo: encontrar cobertura $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ de E de custo mínimo.

Programa linear inteiro equivalente:

Dados E, $\mathcal{S}$ e c, encontrar x que

minimize $\sum_j c_j x_j$

sujeito a $\sum_{j:e \in S_j} x_j \geq 1$ para cada e em E

$x_j \in \{0, 1\}$ para $j = 1, \ldots, m$.

Relaxação linear e seu dual

Primal: Dados E, $\mathcal{S}$ e c, encontrar x que

minimize $\sum_j c_j \, x_j$

sujeito a $\sum_{j : e \in S_j} x_j \geq 1$ para cada e em E

$x_j \geq 0$ para $j = 1, \ldots, m$

Relaxação linear e seu dual

Primal: Dados E, $\mathcal{S}$ e c, encontrar x que

minimize $\sum_j c_j x_j$
sujeito a $\sum_{j:e\in S_j} x_j \geq 1$ para cada e em E
$x_j \geq 0$ para $j = 1, \ldots, m$

Dual: Dados E, $\mathcal{S}$ e c, encontrar y que

maximize $\sum_e y_e$
sujeito a $\sum_{e\in S_j} y_e \leq c_j$ para $j = 1, \ldots, m$
$y_e \geq 0$ para cada $e \in E$

Relaxação linear e seu dual

Primal: Dados E, $\mathcal{S}$ e c, encontrar x que

minimize $\sum_j c_j\, x_j$
sujeito a $\sum_{j : e \in S_j} x_j \geq 1$ para cada e em E
$x_j \geq 0$ para $j = 1, \ldots, m$

Dual: Dados E, $\mathcal{S}$ e c, encontrar y que

maximize $\sum_e y_e$
sujeito a $\sum_{e \in S_j} y_e \leq c_j$ para $j = 1, \ldots, m$
$y_e \geq 0$ para cada $e \in E$

Teorema Fraco de Dualidade: Quaisquer que sejam x primal-viável e y dual-viável, vale que $\sum_e y_e \leq \sum_j c_j\, x_j$.

Relaxação linear e seu dual

Primal: Dados E, $\mathcal{S}$ e c, encontrar x que

minimize $\sum_j c_j\, x_j$
sujeito a $\sum_{j:e\in S_j} x_j \geq 1$ para cada e em E
$x_j \geq 0$ para $j = 1, \ldots, m$

Dual: Dados E, $\mathcal{S}$ e c, encontrar y que

maximize $\sum_e y_e$
sujeito a $\sum_{e\in S_j} y_e \leq c_j$ para $j = 1, \ldots, m$
$y_e \geq 0$ para cada $e \in E$

Teorema Forte de Dualidade: Se x^* é solução ótima do primal e y^* é solução ótima do dual, então $\sum_e y_e^* = \sum_j c_j\, x_j^*$.

Algoritmo guloso

GULOSO $(E, \mathcal{S}, c)$ $\qquad \triangleright\ \mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$

$I \leftarrow \emptyset$

para $j \leftarrow 1$ **até** m **faça** $\hat{S}_j \leftarrow S_j$

enquanto I não é uma cobertura **faça**

    $k \leftarrow \arg\min\{\frac{c_j}{|\hat{S}_j|}$: j é tal que $\hat{S}_j \neq \emptyset\}$

    $I \leftarrow I \cup \{k\}$

    para $j \leftarrow 1$ **até** m **faça**

        $\hat{S}_j \leftarrow \hat{S}_j \setminus S_k$

devolva I

Algoritmo guloso

GULOSO $(E, \mathcal{S}, c)$ $\quad \triangleright\ \mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$

$I \leftarrow \emptyset$

para $j \leftarrow 1$ **até** m **faça** $\hat{S}_j \leftarrow S_j$

enquanto I não é uma cobertura **faça**

$\quad k \leftarrow \arg\min\{\frac{c_j}{|\hat{S}_j|} : j$ é tal que $\hat{S}_j \neq \emptyset\}$

$\quad I \leftarrow I \cup \{k\}$

$\quad$ **para** $j \leftarrow 1$ **até** m **faça**

$\quad\quad \hat{S}_j \leftarrow \hat{S}_j \setminus S_k$

devolva I

Consumo de tempo polinomial, sem resolução de PL!

Algoritmo guloso

GULOSO $(E, \mathcal{S}, c)$ $\qquad \triangleright\ \mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$

$I \leftarrow \emptyset$
para $j \leftarrow 1$ **até** m **faça** $\hat{S}_j \leftarrow S_j$
enquanto I não é uma cobertura **faça**
  $k \leftarrow \arg\min\{\frac{c_j}{|\hat{S}_j|} : j$ é tal que $\hat{S}_j \neq \emptyset\}$
  $I \leftarrow I \cup \{k\}$
  para $j \leftarrow 1$ **até** m **faça**
    $\hat{S}_j \leftarrow \hat{S}_j \setminus S_k$
devolva I

Consumo de tempo polinomial, sem resolução de PL!

Claro que I é uma cobertura.

Algoritmo guloso

GULOSO $(E, \mathcal{S}, c)$ $\quad \triangleright\ \mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$

$I \leftarrow \emptyset$

para $j \leftarrow 1$ **até** m **faça** $\hat{S}_j \leftarrow S_j$

enquanto I não é uma cobertura **faça**

  $k \leftarrow \arg\min\{\frac{c_j}{|\hat{S}_j|} : j$ é tal que $\hat{S}_j \neq \emptyset\}$

  $I \leftarrow I \cup \{k\}$

  para $j \leftarrow 1$ **até** m **faça**

    $\hat{S}_j \leftarrow \hat{S}_j \setminus S_k$

devolva I

Consumo de tempo polinomial, sem resolução de PL!

Claro que I é uma cobertura.

Teorema: GULOSO é uma H_n-aproximação, onde $n = |E|$.
Prova feita na aula.

Análise pelo método dual-fitting

GULOSO $(E, \mathcal{S}, c)$ $\quad\triangleright\ \mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$

$I \leftarrow \emptyset$
para $j \leftarrow 1$ **até** m **faça** $\hat{S}_j \leftarrow S_j$
enquanto I não é uma cobertura **faça**
    $k \leftarrow \arg\min\{\frac{c_j}{|\hat{S}_j|} : j$ é tal que $\hat{S}_j \neq \emptyset\}$
    $I \leftarrow I \cup \{k\}$
    para $j \leftarrow 1$ **até** m **faça**
        $\hat{S}_j \leftarrow \hat{S}_j \setminus S_k$
devolva I

Claro que I é uma cobertura.

Teorema: GULOSO é uma H_g-aproximação, onde $g = \max_j |S_j|$.

A prova usa o método dual-fitting...

Análise pelo método dual-fitting

GULOSO $(E, \mathcal{S}, c)$ $\qquad \triangleright\ \mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$

$I \leftarrow \emptyset$
para $j \leftarrow 1$ **até** m **faça** $\hat{S}_j \leftarrow S_j$
enquanto I não é uma cobertura **faça**
  $k \leftarrow \arg\min\{\frac{c_j}{|\hat{S}_j|} : j$ é tal que $\hat{S}_j \neq \emptyset\}$
  $I \leftarrow I \cup \{k\}$
  $\triangleright$ para cada e em $\hat{S}_k$ faça $y_e \leftarrow c_k/|\hat{S}_k|$
  para $j \leftarrow 1$ **até** m **faça** $\hat{S}_j \leftarrow \hat{S}_j \setminus S_k$
devolva I

Teo: GULOSO é uma H_g-aproximação, onde $g = \max_j |S_j|$.

Análise pelo método dual-fitting

```
GULOSO (E, 𝒮, c)        ▷ 𝒮 = {S_1, ..., S_m}
    I ← ∅
    para j ← 1 até m faça Ŝ_j ← S_j
    enquanto I não é uma cobertura faça
        k ← arg min{ c_j / |Ŝ_j| : j é tal que Ŝ_j ≠ ∅ }
        I ← I ∪ {k}
         ▷ para cada e em Ŝ_k faça y_e ← c_k/|Ŝ_k|
        para j ← 1 até m faça Ŝ_j ← Ŝ_j \ S_k
    devolva I
```

Teo: GULOSO é uma H_g-aproximação, onde $g = \max_j |S_j|$.

Prova: Note que $c(I) = \sum_{k \in I} c_k = \sum_{e \in E} y_e$.

Análise pelo método dual-fitting

GULOSO $(E, \mathcal{S}, c)$ $\quad \triangleright\ \mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$

$I \leftarrow \emptyset$

para $j \leftarrow 1$ **até** m **faça** $\hat{S}_j \leftarrow S_j$

enquanto I não é uma cobertura **faça**

$\quad k \leftarrow \arg\min\{\frac{c_j}{|\hat{S}_j|} : j$ é tal que $\hat{S}_j \neq \emptyset\}$

$\quad I \leftarrow I \cup \{k\}$

$\quad \triangleright$ para cada e em $\hat{S}_k$ faça $y_e \leftarrow c_k/|\hat{S}_k|$

$\quad$ **para** $j \leftarrow 1$ **até** m **faça** $\hat{S}_j \leftarrow \hat{S}_j \setminus S_k$

devolva I

Teo: GULOSO é uma H_g-aproximação, onde $g = \max_j |S_j|$.

Prova: Note que $c(I) = \sum_{k \in I} c_k = \sum_{e \in E} y_e$.
Para cada e em E, defina $y'_e = y_e / H_g$.
Vamos mostrar que $\sum_{e \in S_j} y'_e \leq c_j$ para cada j.

Análise pelo método dual-fitting

enquanto I não é uma cobertura **faça**
    $k \leftarrow \arg\min\{\frac{c_j}{|\hat{S}_j|} : j$ é tal que $\hat{S}_j \neq \emptyset\}$
    $I \leftarrow I \cup \{k\}$
    $\triangleright$ para cada e em $\hat{S}_k$ faça $y_e \leftarrow c_k/|\hat{S}_k|$
    para $j \leftarrow 1$ **até** m **faça** $\hat{S}_j \leftarrow \hat{S}_j \setminus S_k$

Teo: GULOSO é uma H_g-aproximação, onde $g = \max_j |S_j|$.

Prova: Note que $c(I) = \sum_{k \in I} c_k = \sum_{e \in E} y_e$.
Para cada e em E, defina $y'_e = y_e/H_g$.
Se $\sum_{e \in S_j} y'_e \leq c_j$ para cada j, então y' é dual-viável e

Análise pelo método dual-fitting

enquanto I não é uma cobertura **faça**

$\quad k \leftarrow \arg\min\{\frac{c_j}{|\hat{S}_j|} : j$ é tal que $\hat{S}_j \neq \emptyset\}$

$\quad I \leftarrow I \cup \{k\}$

$\quad \triangleright$ para cada e em $\hat{S}_k$ faça $y_e \leftarrow c_k/|\hat{S}_k|$

$\quad$ **para** $j \leftarrow 1$ **até** m **faça** $\hat{S}_j \leftarrow \hat{S}_j \setminus S_k$

Teo: GULOSO é uma H_g-aproximação, onde $g = \max_j |S_j|$.

Prova: Note que $c(I) = \sum_{k \in I} c_k = \sum_{e \in E} y_e$.
Para cada e em E, defina $y'_e = y_e / H_g$.
Se $\sum_{e \in S_j} y'_e \leq c_j$ para cada j, então y' é dual-viável e

$$c(I) = \sum_{k \in I} c_k = \sum_{e \in E} y_e = H_g \sum_{e \in E} y'_e \leq H_g \, \mathrm{opt}.$$

Análise pelo método dual-fitting

Fix j, com $1 \leq j \leq m$, e seja $a_i = |\hat{S}_j|$ no início da iteração i.

Análise pelo método dual-fitting

Fix j, com $1 \leq j \leq m$, e seja $a_i = |\hat{S}_j|$ no início da iteração i.

Seja $A_i = \hat{S}_j \cup \hat{S}_k$ na linha 5 da iteração i
(ou seja, A_i são os elementos de S_j cobertos na iteração i).

Análise pelo método dual-fitting

Fix j, com $1 \leq j \leq m$, e seja $a_i = |\hat{S}_j|$ no início da iteração i.

Seja $A_i = \hat{S}_j \cup \hat{S}_k$ na linha 5 da iteração i
(ou seja, A_i são os elementos de S_j cobertos na iteração i).

Note que $|A_i| = a_i - a_{i+1}$.

Análise pelo método dual-fitting

Fix j, com $1 \leq j \leq m$, e seja $a_i = |\hat{S}_j|$ no início da iteração i.

Seja $A_i = \hat{S}_j \cup \hat{S}_k$ na linha 5 da iteração i
(ou seja, A_i são os elementos de S_j cobertos na iteração i).

Note que $|A_i| = a_i - a_{i+1}$.

Seja t a última iteração em que $a_i > 0$. Então

$$\sum_{e \in S_j} y'_e = \sum_{i=1}^{t} \sum_{e \in A_i} y'_e \leq \sum_{i=1}^{t} |A_i| \frac{c_j}{a_i},$$

onde a desigualdade vale pois o k que entrou em I na iteração i tem custo médio mínimo, e j é um dos candidatos a entrar em I e tem custo médio c_j/a_i na iteração i.

Análise pelo método dual-fitting

Fix j, com $1 \le j \le m$, e seja $a_i = |\hat{S}_j|$ no início da iteração i.

Seja $A_i = \hat{S}_j \cup \hat{S}_k$ na linha 5 da iteração i
(ou seja, A_i são os elementos de S_j cobertos na iteração i).
Note que $|A_i| = a_i - a_{i+1}$.

Seja t a última iteração em que $a_i > 0$. Então

$$\begin{aligned}
\sum_{e \in S_j} y'_e &= \sum_{i=1}^{t} \sum_{e \in A_i} y'_e \le \sum_{i=1}^{t} |A_i| \frac{c_j}{H_g\, a_i} \\
&= \frac{c_j}{H_g} \sum_{i=1}^{t} \frac{a_i - a_{i+1}}{a_i} \le \frac{c_j}{H_g} \sum_{i=1}^{|S_j|} \frac{1}{i} \\
&= \frac{c_j\, H_{|S_j|}}{H_g} \le c_j, \quad \text{pois } g = \max_j |S_j|.
\end{aligned}$$

Resultados de inaproximabiilidade

Teorema: Se existe uma $b \ln n$-aproximação para o SET COVER para alguma constante $b < 1$, então existe um algoritmo $\mathrm{O}(n^{\mathrm{O}(\lg \lg n)})$ para cada problema NP-completo.

Resultados de inaproximabiilidade

Teorema: Se existe uma $b \ln n$-aproximação para o SET COVER para alguma constante $b < 1$, então existe um algoritmo $\mathrm{O}(n^{\mathrm{O}(\lg \lg n)})$ para cada problema NP-completo.

Teorema: Existe uma constante $b > 0$ tal que, se existir uma $b \ln n$-aproximação para o SET COVER, então P $=$ NP.

Resultados de inaproximabiilidade

Teorema: Se existe uma $b \ln n$-aproximação para o SET COVER para alguma constante $b < 1$, então existe um algoritmo $\mathrm{O}(n^{\mathrm{O}(\lg \lg n)})$ para cada problema NP-completo.

Teorema: Existe uma constante $b > 0$ tal que, se existir uma $b \ln n$-aproximação para o SET COVER, então P $=$ NP.

Estes dois resultados valem para o caso sem pesos (ou seja, $c_j = 1$ para todo j).

Resultados de inaproximabiilidade

Teorema: Se existe uma α-aproximação para o VERTEX COVER com $\alpha < 10\sqrt{5} - 21 \approx 1{,}36$, então P $=$ NP.

Resultados de inaproximabiilidade

Teorema: Se existe uma α-aproximação para o VERTEX COVER com $\alpha < 10\sqrt{5} - 21 \approx 1{,}36$, então P $=$ NP.

A conjectura do *Unique Games* fala que um certo problema conhecido como *Unique Games* é NP-difícil.

Teorema: Assumindo a conjectura do Unique Games, se existe uma α-aproximação para o VERTEX COVER para uma constante $\alpha < 2$, então P $=$ NP.