Algoritmos de Aproximação

Segundo Semestre de 2012

Aula passada

MAX SAT: Dadas cláusulas $C_1, \ldots, C_m$ sobre $x_1, \ldots, x_n$, e pesos $w_j \geq 0$ para cada C_j, encontrar uma atribuição para $x_1, \ldots, x_n$ que maximize o peso das cláusulas satisfeitas.

Aula passada

MAX SAT: Dadas cláusulas $C_1, \ldots, C_m$ sobre $x_1, \ldots, x_n$, e pesos $w_j \geq 0$ para cada C_j, encontrar uma atribuição para $x_1, \ldots, x_n$ que maximize o peso das cláusulas satisfeitas.

Variáveis para a formulação linear inteira do MAX SAT:
y_i: vale 1 se a variável x_i é VERDADE, 0 caso contrário.
z_j: vale 1 se a cláusula C_j está satisfeita, 0 caso contrário.

Aula passada

MAX SAT: Dadas cláusulas $C_1, \ldots, C_m$ sobre $x_1, \ldots, x_n$, e pesos $w_j \geq 0$ para cada C_j, encontrar uma atribuição para $x_1, \ldots, x_n$ que maximize o peso das cláusulas satisfeitas.

Variáveis para a formulação linear inteira do MAX SAT:
y_i: vale 1 se a variável x_i é VERDADE, 0 caso contrário.
z_j: vale 1 se a cláusula C_j está satisfeita, 0 caso contrário.

P_j: conjunto dos índices dos literais positivos de C_j
N_j: conjunto dos índices dos literais negativos de C_j

Aula passada

MAX SAT: Dadas cláusulas $C_1, \ldots, C_m$ sobre $x_1, \ldots, x_n$, e pesos $w_j \geq 0$ para cada C_j, encontrar uma atribuição para $x_1, \ldots, x_n$ que maximize o peso das cláusulas satisfeitas.

Variáveis para a formulação linear inteira do MAX SAT:
y_i: vale 1 se a variável x_i é VERDADE, 0 caso contrário.
z_j: vale 1 se a cláusula C_j está satisfeita, 0 caso contrário.

P_j: conjunto dos índices dos literais positivos de C_j
N_j: conjunto dos índices dos literais negativos de C_j

Formulação inteira: encontrar y e z que

maximizem $\sum_{j=1}^{m} w_j z_j$

sujeitos a $\sum_{i \in P_j} y_i + \sum_{i \in N_j} (1 - y_i) \geq z_j$ para cada j

$y_i \in \{0, 1\}$ para cada i

$0 \leq z_j \leq 1$ para cada j.

Arredondamento probabilístico linear

P_j/N_j: índices dos literais positivos/negativos de C_j

Relaxação linear: encontrar y e z que

maximizem $\sum_{j=1}^{m} w_j z_j$

sujeitos a $\sum_{i \in P_j} y_i + \sum_{i \in N_j} (1 - y_i) \geq z_j$ para cada j

$0 \leq y_i \leq 1$ para cada i

$0 \leq z_j \leq 1$ para cada j.

Arredondamento probabilístico linear

P_j / N_j: índices dos literais positivos/negativos de C_j

Relaxação linear: encontrar y e z que

maximizem $\sum_{j=1}^{m} w_j z_j$

sujeitos a $\sum_{i \in P_j} y_i + \sum_{i \in N_j} (1 - y_i) \geq z_j$ para cada j

$0 \leq y_i \leq 1$ para cada i

$0 \leq z_j \leq 1$ para cada j.

ArredLP(n, m, C)

resolva o LP acima, obtendo y^* e z^*

para $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**

  $r \leftarrow$ RANDOM$(0, 1)$ $\triangleright$ número aleatório em $[0, 1)$

  se $r < y_i^*$

    então $x_i \leftarrow$ V

    senão $x_i \leftarrow$ F

devolva x

Arredondamento probabilístico não-linear

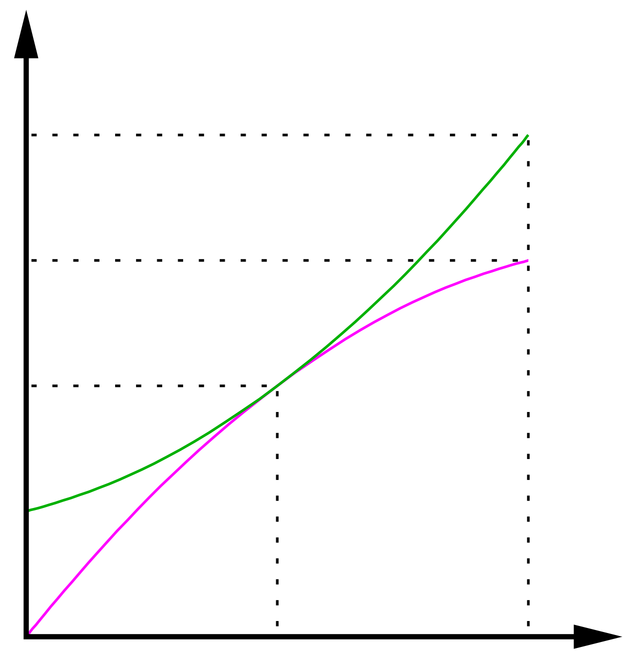
$f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ função tal que, para todo x em [0,1],

$$1 - 4^{-x} \;\leq\; f(x) \;\leq\; 4^{x-1}.$$

Arredondamento probabilístico não-linear

$f : [0,1] \rightarrow [0,1]$ função tal que, para todo x em [0,1],

$$1 - 4^{-x} \;\leq\; f(x) \;\leq\; 4^{x-1}.$$



Arredondamento probabilístico não-linear

$f : [0,1] \rightarrow [0,1]$ função tal que, para todo x em [0,1],

$$1 - 4^{-x} \;\leq\; f(x) \;\leq\; 4^{x-1}.$$

ArredLPNL(n, m, C)

```
resolva o LP acima, obtendo y* e z*
para i ← 1 até n faça
      r ← Random(0, 1)      ▷ número aleatório em [0, 1)
      se r < f(y*_i)
            então x_i ← V
            senão x_i ← F
devolva x
```

Arredondamento probabilístico não-linear

$f : [0,1] \to [0,1]$ função tal que, para todo x em [0,1],

$$1 - 4^{-x} \;\leq\; f(x) \;\leq\; 4^{x-1}.$$

ArredLPNL(n, m, C)
1 resolva o LP acima, obtendo y^* e z^*
2 **para** $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**
3 $r \leftarrow$ RANDOM$(0,1)$ $\triangleright$ número aleatório em $[0,1)$
4 **se** $r < f(y^*_i)$
5 **então** $x_i \leftarrow$ V
6 **senão** $x_i \leftarrow$ F
7 **devolva** x

O que podemos provar sobre este algoritmo?

Arredondamento probabilístico não-linear

$$\begin{aligned}
\Pr[C_j \text{ não é satisfeita}] &= \prod_{i \in P_j} (1 - f(y_i^*)) \prod_{i \in N_j} f(y_i^*) \\
&\leq \prod_{i \in P_j} 4^{-y_i^*} \prod_{i \in N_j} 4^{y_i^*-1} \\
&= 4^{-\left(\sum_{i \in P_j} y_i^* + \sum_{i \in N_j} (1-y_i^*)\right)} \\
&\leq 4^{-z_j^*}.
\end{aligned}$$

Arredondamento probabilístico não-linear

$$\begin{aligned}
\Pr[C_j \text{ não é satisfeita}] &= \prod_{i \in P_j} (1 - f(y_i^*)) \prod_{i \in N_j} f(y_i^*) \\
&\leq \prod_{i \in P_j} 4^{-y_i^*} \prod_{i \in N_j} 4^{y_i^* - 1} \\
&= 4^{-\left(\sum_{i \in P_j} y_i^* + \sum_{i \in N_j} (1 - y_i^*)\right)} \\
&\leq 4^{-z_j^*}.
\end{aligned}$$

A função $g(z) = 1 - 4^{-z}$ é côncava em $[0, 1]$. Então

Arredondamento probabilístico não-linear

$$\begin{aligned}
\Pr[C_j \text{ não é satisfeita}] &= \prod_{i \in P_j} (1 - f(y_i^*)) \prod_{i \in N_j} f(y_i^*) \\
&\leq \prod_{i \in P_j} 4^{-y_i^*} \prod_{i \in N_j} 4^{y_i^* - 1} \\
&= 4^{-\left(\sum_{i \in P_j} y_i^* + \sum_{i \in N_j} (1 - y_i^*)\right)} \\
&\leq 4^{-z_j^*}.
\end{aligned}$$

A função $g(z) = 1 - 4^{-z}$ é côncava em $[0, 1]$. Então

$$\Pr[C_j \text{ é satisfeita}] \;\geq\; 1 - 4^{-z_j^*} \;\geq\; \frac{3}{4}\, z_j^*.$$

Arredondamento probabilístico não-linear

$$\begin{aligned}
\Pr[C_j \text{ não é satisfeita}] &= \prod_{i \in P_j} (1 - f(y_i^*)) \prod_{i \in N_j} f(y_i^*) \\
&\leq \prod_{i \in P_j} 4^{-y_i^*} \prod_{i \in N_j} 4^{y_i^* - 1} \\
&= 4^{-\left(\sum_{i \in P_j} y_i^* + \sum_{i \in N_j} (1 - y_i^*)\right)} \\
&\leq 4^{-z_j^*}.
\end{aligned}$$

A função $g(z) = 1 - 4^{-z}$ é côncava em $[0, 1]$. Então

$$\Pr[C_j \text{ é satisfeita}] \geq 1 - 4^{-z_j^*} \geq \frac{3}{4} z_j^*.$$

Teorema: ArredLPNL é uma $\frac{3}{4}$-aproximação.

Steiner trees e variantes

Problema de Steiner: dados $G = (V, E)$, custos $c_e \geq 0$ para cada e em E, e conjunto $R \subseteq V$, encontrar árvore T tq $V_T \supseteq R$ com custo mínimo.

Steiner trees e variantes

Problema de Steiner: dados $G = (V, E)$, custos $c_e \geq 0$ para cada e em E, e conjunto $R \subseteq V$, encontrar árvore T tq $V_T \supseteq R$ com custo mínimo.

Prize-Collecting Steiner Tree Problem: dados $G = (V, E)$, $c_e \geq 0$ para cada e em E, um vértice r, e penalidades π_v para cada vértice v, encontrar árvore T contendo r que minimize $c(E_T) + \pi(V \setminus V_T)$.

Formulação inteira

Variáveis:

- x_e para cada aresta e
- y_v para cada vértice v

$x_e = 1$ sse $e \in T$
$y_v = 1$ sse $v \in T$

Formulação inteira

Variáveis:

- x_e para cada aresta e
- y_v para cada vértice v

$x_e = 1$ sse $e \in T$
$y_v = 1$ sse $v \in T$

Encontrar vetores x e y que
minimizem $\sum_{e \in E} c_e \, x_e + \sum_{v \in V} \pi_v \, (1 - y_v)$
sujeito a $\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq y_v$ para todo $S \subseteq V \setminus \{r\}$ tq $v \in S$
$y_r = 1$
$y_v \in \{0, 1\}$ para cada $v \in V$
$x_e \in \{0, 1\}$ para cada $e \in E$.

Relaxação linear

Encontrar vetores x e y que

minimizem $\sum_{e\in E} c_e\, x_e + \sum_{v\in V} \pi_v\,(1 - y_v)$

sujeito a $\sum_{e\in\delta(S)} x_e \geq y_v$ para todo $S \subseteq V \subseteq \{r\}$ tq $v \in S$

$y_r = 1$

$y_v \geq 0$ para cada $v \in V$

$y_v \leq 1$ para cada $v \in V$

$x_e \geq 0$ para cada $e \in E$.

Relaxação linear

Encontrar vetores x e y que

minimizem $\sum_{e \in E} c_e\, x_e + \sum_{v \in V} \pi_v\, (1 - y_v)$

sujeito a $\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq y_v$ para todo $S \subseteq V \subseteq \{r\}$ tq $v \in S$

$y_r = 1$

$y_v \geq 0$ para cada $v \in V$

$y_v \leq 1$ para cada $v \in V$

$x_e \geq 0$ para cada $e \in E$.

α: um número a ser fixado a frente.

ARRED$_{\alpha}$ (G, c, π, r)

seja (x^*, y^*) uma solução ótima do LP

$R \leftarrow \{v \in V_G \ : \ y^*_v \geq \alpha\}$

$T \leftarrow$ EX-CAP7(G, c, R)

devolva T

Algoritmo

α: um número a ser fixado a frente.

ARRED$_\alpha$ (G, c, π, r)
1 seja (x^*, y^*) uma solução ótima do LP
2 $R \leftarrow \{v \in V_G \ : \ y^*_v \geq \alpha\}$
3 $T \leftarrow$ EX-CAP7(G, c, R)
4 **devolva** T

Algoritmo

α: um número a ser fixado a frente.

ARRED$_\alpha$ (G, c, π, r)

1 seja (x^*, y^*) uma solução ótima do LP
2 $R \leftarrow \{v \in V_G \ : \ y^*_v \geq \alpha\}$
3 $T \leftarrow$ EX-CAP7(G, c, R)
4 **devolva** T

EX-CAP7(G, c, R): devolve uma árvore de Steiner T tq

$$\sum_{e \in T} c_e \leq \frac{2}{\alpha} \sum_{e \in E} c_e \, x^*_e.$$

Algoritmo

α: um número a ser fixado a frente.

ARRED$_\alpha$ (G, c, π, r)
1 seja (x^*, y^*) uma solução ótima do LP
2 $R \leftarrow \{v \in V_G \ : \ y^*_v \geq \alpha\}$
3 $T \leftarrow$ EX-CAP7(G, c, R)
4 **devolva** T

EX-CAP7(G, c, R): devolve uma árvore de Steiner T tq

$$\sum_{e \in T} c_e \leq \frac{2}{\alpha} \sum_{e \in E} c_e \, x^*_e.$$

Lema 1: $\sum_{v \in V \setminus V_T} \pi_v \leq \frac{1}{1-\alpha} \sum_{v \in V} \pi_v (1 - y^*_v)$.

Análise

ARRED$_{\alpha}$ (G, c, π, r)

seja (x^*, y^*) uma solução ótima do LP
$R \leftarrow \{v \in V_G \ : \ y^*_v \geq \alpha\}$
$T \leftarrow$ EX-CAP7(G, c, R)
devolva T

Análise

ARRED$_{\alpha}$ (G, c, π, r)

```
seja (x*, y*) uma solução ótima do LP
R ← {v ∈ V_G : y*_v ≥ α}
T ← EX-CAP7(G, c, R)
devolva T
```

EX-CAP7(G, c, R): devolve uma árvore de Steiner T tq

$$\sum_{e \in T} c_e \leq \frac{2}{\alpha} \sum_{e \in E} c_e \, x^*_e.$$

Lema 1: $\sum_{v \in V \setminus V_T} \pi_v \leq \frac{1}{1-\alpha} \sum_{v \in V} \pi_v (1 - y^*_v)$.

Análise

ARRED$_\alpha$ (G, c, π, r)
1 seja (x^*, y^*) uma solução ótima do LP
2 $R \leftarrow \{v \in V_G \; : \; y^*_v \geq \alpha\}$
3 $T \leftarrow$ EX-CAP7(G, c, R)
4 **devolva** T

EX-CAP7(G, c, R): devolve uma árvore de Steiner T tq

$$\sum_{e \in T} c_e \leq \frac{2}{\alpha} \sum_{e \in E} c_e \, x^*_e.$$

Lema 1: $\sum_{v \in V \setminus V_T} \pi_v \leq \frac{1}{1-\alpha} \sum_{v \in V} \pi_v (1 - y^*_v)$.

Teorema: O custo do T produzido por ARRED$_\alpha$ (G, c, π, r) é

$$\sum_{e \in T} c_e + \sum_{v \notin T} \pi_v \leq \frac{2}{\alpha} \sum_{e \in E} c_e \, x^*_e + \frac{1}{1 - \alpha} \sum_{v \in V} \pi_v (1 - y^*_v).$$

Análise

ARRED$_\alpha$ (G, c, π, r)

seja (x^*, y^*) uma solução ótima do LP
$R \leftarrow \{v \in V_G \ : \ y^*_v \geq \alpha\}$
$T \leftarrow$ EX-CAP7(G, c, R)
devolva T

EX-CAP7(G, c, R): devolve uma árvore de Steiner T tq

$$\sum_{e \in T} c_e \leq \frac{2}{\alpha} \sum_{e \in E} c_e \, x^*_e.$$

Lema 1: $\sum_{v \in V \setminus V_T} \pi_v \leq \frac{1}{1-\alpha} \sum_{v \in V} \pi_v (1 - y^*_v)$.

Teorema: O custo do T produzido por ARRED$_\alpha$ (G, c, π, r) é

$$\sum_{e \in T} c_e + \sum_{v \notin T} \pi_v \leq \frac{2}{\alpha} \sum_{e \in E} c_e \, x^*_e + \frac{1}{1-\alpha} \sum_{v \in V} \pi_v (1 - y^*_v).$$

Corolário: ARRED$_\alpha$ com $\alpha = 2/3$ é uma 3-aproximação.

Arredondamento probabilístico

No algoritmo abaixo, escolher α aleatoriamente!

ARRED$_\alpha$ (G, c, π, r)
1 seja (x^*, y^*) uma solução ótima do LP
2 $R \leftarrow \{v \in V_G \ : \ y^*_v \geq \alpha\}$
3 $T \leftarrow$ EX-CAP7(G, c, R)
4 **devolva** T

EX-CAP7(G, c, R): devolve uma árvore de Steiner T tq

$$\sum_{e \in T} c_e \leq \frac{2}{\alpha} \sum_{e \in E} c_e \, x^*_e .$$

Arredondamento probabilístico

No algoritmo abaixo, escolher α aleatoriamente!

ArredAleat$_\gamma$ (G, c, π, r)
1 seja (x^*, y^*) uma solução ótima do LP
2 $\alpha \leftarrow$ Random$(\gamma, 1)$ $\triangleright$ número aleatório em $[\gamma, 1)$
3 $R \leftarrow \{v \in V_G \ : \ y^*_v \geq \alpha\}$
4 $T \leftarrow$ Ex-Cap7(G, c, R)
5 **devolva** T

γ: constante a ser fixada à frente.

Arredondamento probabilístico

No algoritmo abaixo, escolher α aleatoriamente!

ARREDALEAT$_\gamma$ (G, c, π, r)
1 seja (x^*, y^*) uma solução ótima do LP
2 $\alpha \leftarrow$ RANDOM$(\gamma, 1)$ $\triangleright$ número aleatório em $[\gamma, 1)$
3 $R \leftarrow \{v \in V_G \ : \ y_v^* \geq \alpha\}$
4 $T \leftarrow$ EX-CAP7(G, c, R)
5 **devolva** T

γ: constante a ser fixada à frente.

Quanto vale $\mathrm{E}[\sum_{e \in T} c_e]$?

Quanto vale $\mathrm{E}[\sum_{v \in V \setminus V_T} \pi_v]$?

Análise

EX-CAP7(G, c, R): devolve uma árvore de Steiner T tq

$$\sum_{e \in T} c_e \leq \frac{2}{\alpha} \sum_{e \in E} c_e \, x_e^*.$$

α: número aleatório uniformemente escolhido em $[\gamma, 1)$

Lema 1: $\mathrm{E}[\sum_{e \in T} c_e] \;\leq\; \left(\frac{2}{1-\gamma} \ln \frac{1}{\gamma}\right) \sum_{e \in E} c_e x_e^*$.

Análise

EX-CAP7(G, c, R): devolve uma árvore de Steiner T tq

$$\sum_{e \in T} c_e \leq \frac{2}{\alpha} \sum_{e \in E} c_e \, x^*_e.$$

α: número aleatório uniformemente escolhido em $[\gamma, 1)$

Lema 1: $\mathrm{E}[\sum_{e \in T} c_e] \;\leq\; \left(\frac{2}{1-\gamma} \ln \frac{1}{\gamma}\right) \sum_{e \in E} c_e x^*_e$.

Prova:
$$\mathrm{E}[\sum_{e \in T} c_e] \;\leq\; \mathrm{E}[\frac{2}{\alpha} \sum_{e \in E} c_e \, x^*_e] \;\leq\; \mathrm{E}[\frac{2}{\alpha}] \sum_{e \in E} c_e \, x^*_e$$

Análise

EX-CAP7(G, c, R): devolve uma árvore de Steiner T tq

$$\sum_{e \in T} c_e \leq \frac{2}{\alpha} \sum_{e \in E} c_e \, x_e^*.$$

α: número aleatório uniformemente escolhido em $[\gamma, 1)$

Lema 1: $\mathrm{E}[\sum_{e \in T} c_e] \;\leq\; (\frac{2}{1-\gamma} \ln \frac{1}{\gamma}) \sum_{e \in E} c_e x_e^*$.

Prova:
$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\sum_{e \in T} c_e] \;&\leq\; \mathrm{E}[\frac{2}{\alpha} \sum_{e \in E} c_e \, x_e^*] \;\leq\; \mathrm{E}[\frac{2}{\alpha}] \sum_{e \in E} c_e \, x_e^* \\
&\leq\; (\frac{1}{1-\gamma} \int_{\gamma}^{1} \frac{2}{\alpha}) \sum_{e \in E} c_e \, x_e^*
\end{aligned}$$

Análise

EX-CAP7(G, c, R): devolve uma árvore de Steiner T tq

$$\sum_{e\in T} c_e \le \frac{2}{\alpha} \sum_{e\in E} c_e\, x_e^*.$$

α: número aleatório uniformemente escolhido em $[\gamma, 1)$

Lema 1: $\mathrm{E}[\sum_{e\in T} c_e] \;\le\; (\frac{2}{1-\gamma} \ln \frac{1}{\gamma}) \sum_{e\in E} c_e x_e^*$.

Prova:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\sum_{e\in T} c_e] &\le \mathrm{E}[\frac{2}{\alpha} \sum_{e\in E} c_e\, x_e^*] \le \mathrm{E}[\frac{2}{\alpha}] \sum_{e\in E} c_e\, x_e^* \\
&\le (\frac{1}{1-\gamma} \int_\gamma^1 \frac{2}{\alpha}) \sum_{e\in E} c_e\, x_e^* \\
&\le [\frac{2}{1-\gamma} \ln x]_\gamma^1 \sum_{e\in E} c_e\, x_e^*
\end{aligned}$$

Análise

EX-CAP7(G, c, R): devolve uma árvore de Steiner T tq

$$\sum_{e \in T} c_e \le \frac{2}{\alpha} \sum_{e \in E} c_e\, x_e^*.$$

α: número aleatório uniformemente escolhido em $[\gamma, 1)$

Lema 1: $\mathrm{E}[\sum_{e \in T} c_e] \;\le\; (\frac{2}{1-\gamma} \ln \frac{1}{\gamma}) \sum_{e \in E} c_e x_e^*$.

Prova:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\sum_{e \in T} c_e] &\le \mathrm{E}[\frac{2}{\alpha} \sum_{e \in E} c_e\, x_e^*] \le \mathrm{E}[\frac{2}{\alpha}] \sum_{e \in E} c_e\, x_e^* \\
&\le (\frac{1}{1-\gamma} \int_\gamma^1 \frac{2}{\alpha}) \sum_{e \in E} c_e\, x_e^* \\
&\le [\frac{2}{1-\gamma} \ln x]_\gamma^1 \sum_{e \in E} c_e\, x_e^* \\
&\le (\frac{2}{1-\gamma} \ln \frac{1}{\gamma}) \sum_{e \in E} c_e\, x_e^*.
\end{aligned}$$

Análise

Lema 1: $\mathrm{E}[\sum_{e \in T} c_e] \;\leq\; \left(\frac{2}{1-\gamma} \ln \frac{1}{\gamma}\right) \sum_{e \in E} c_e x_e^*$.

Lema 2: $\mathrm{E}[\sum_{v \in V \setminus V_T} \pi_v] \;\leq\; \frac{1}{1-\gamma} \sum_{i \in V} \pi_i (1 - y_i^*)$.

Análise

Lema 1: $\mathrm{E}[\sum_{e \in T} c_e] \;\leq\; \left(\frac{2}{1-\gamma} \ln \frac{1}{\gamma}\right) \sum_{e \in E} c_e x^*_e$.

Lema 2: $\mathrm{E}[\sum_{v \in V \setminus V_T} \pi_v] \;\leq\; \frac{1}{1-\gamma} \sum_{i \in V} \pi_i (1 - y^*_i)$.

Prova: Vértices fora de T não estão em R, assim

$$\sum_{v \in V \setminus V_T} \pi_v \leq \sum_{i \notin R} \pi_v .$$

Análise

Lema 1: $\mathrm{E}[\sum_{e\in T} c_e] \;\leq\; \left(\frac{2}{1-\gamma}\ln\frac{1}{\gamma}\right)\sum_{e\in E} c_e x_e^*$.

Lema 2: $\mathrm{E}[\sum_{v\in V\setminus V_T} \pi_v] \;\leq\; \frac{1}{1-\gamma}\sum_{i\in V} \pi_i(1-y_i^*)$.

Prova: Vértices fora de T não estão em R, assim

$$\sum_{v\in V\setminus V_T} \pi_v \leq \sum_{i\notin R} \pi_v.$$

Análise

Lema 1: $\mathrm{E}[\sum_{e \in T} c_e] \;\leq\; \left(\frac{2}{1-\gamma} \ln \frac{1}{\gamma}\right) \sum_{e \in E} c_e x_e^*$.

Lema 2: $\mathrm{E}[\sum_{v \in V \setminus V_T} \pi_v] \;\leq\; \frac{1}{1-\gamma} \sum_{i \in V} \pi_i (1 - y_i^*)$.

Prova: Vértices fora de T não estão em R, assim

$$\sum_{v \in V \setminus V_T} \pi_v \leq \sum_{i \notin R} \pi_v .$$

Se $y_i^* \geq \gamma$, então $\Pr[i \notin R] = (1 - y_i^*)(1 - \gamma)$.

Análise

Lema 1: $\mathrm{E}[\sum_{e \in T} c_e] \ \leq \ \left(\frac{2}{1-\gamma} \ln \frac{1}{\gamma}\right) \sum_{e \in E} c_e x_e^*$.

Lema 2: $\mathrm{E}[\sum_{v \in V \setminus V_T} \pi_v] \ \leq \ \frac{1}{1-\gamma} \sum_{i \in V} \pi_i (1 - y_i^*)$.

Prova: Vértices fora de T não estão em R, assim

$$\sum_{v \in V \setminus V_T} \pi_v \leq \sum_{i \notin R} \pi_v.$$

Se $y_i^* \geq \gamma$, então $\Pr[i \notin R] = (1 - y_i^*)(1 - \gamma)$.

Se $y_i^* < \gamma$, então $\Pr[i \notin R] = 1$.

Análise

Lema 1: $\mathrm{E}[\sum_{e\in T} c_e] \;\leq\; \left(\frac{2}{1-\gamma}\ln\frac{1}{\gamma}\right)\sum_{e\in E} c_e x_e^*$.

Lema 2: $\mathrm{E}[\sum_{v\in V\setminus V_T} \pi_v] \;\leq\; \frac{1}{1-\gamma}\sum_{i\in V} \pi_i(1-y_i^*)$.

Prova: Vértices fora de T não estão em R, assim

$$\sum_{v\in V\setminus V_T} \pi_v \leq \sum_{i\notin R} \pi_v.$$

Se $y_i^* \geq \gamma$, então $\Pr[i \notin R] = (1-y_i^*)(1-\gamma)$.

Se $y_i^* < \gamma$, então $\Pr[i \notin R] = 1$.

Mas neste caso $1 \leq (1-y_i^*)(1-\gamma)$ e o lema 2 segue.

Análise

Lema 1: $\mathrm{E}[\sum_{e\in T} c_e] \;\leq\; \left(\frac{2}{1-\gamma}\ln\frac{1}{\gamma}\right)\sum_{e\in E} c_e x_e^*$.

Lema 2: $\mathrm{E}[\sum_{v\in V\setminus V_T} \pi_v] \;\leq\; \frac{1}{1-\gamma}\sum_{i\in V} \pi_i(1-y_i^*)$.

Teorema: O valor esperado da solução produzida por ARREDALEAT_γ é

$$\mathrm{E}[\sum_{e\in T} c_e + \sum_{v\in V\setminus V_T} \pi_v] \;\leq\; \left(\frac{2}{1-\gamma}\ln\frac{1}{\gamma}\right)\sum_{e\in E} c_e x_e^* + \frac{1}{1-\gamma}\sum_{i\in V}\pi_i(1-y_i^*).$$

Análise

Lema 1: $\mathrm{E}[\sum_{e \in T} c_e] \ \leq \ (\frac{2}{1-\gamma} \ln \frac{1}{\gamma}) \sum_{e \in E} c_e x_e^*$.

Lema 2: $\mathrm{E}[\sum_{v \in V \setminus V_T} \pi_v] \ \leq \ \frac{1}{1-\gamma} \sum_{i \in V} \pi_i (1 - y_i^*)$.

Teorema: O valor esperado da solução produzida por ArredAleat$_\gamma$ é

$$\mathrm{E}[\sum_{e \in T} c_e + \sum_{v \in V \setminus V_T} \pi_v] \ \leq \ (\frac{2}{1 - \gamma} \ln \frac{1}{\gamma}) \sum_{e \in E} c_e x_e^* + \frac{1}{1 - \gamma} \sum_{i \in V} \pi_i (1 - y_i^*).$$

Prova: Basta juntar os lemas acima...

Análise

Teorema: O valor esperado da solução produzida por ArredAleat$_\gamma$ é

$$\mathrm{E}[\sum_{e\in T} c_e + \sum_{v\in V\setminus V_T} \pi_v] \;\leq\; (\frac{2}{1-\gamma}\ln\frac{1}{\gamma})\sum_{e\in E} c_e x_e^* + \frac{1}{1-\gamma}\sum_{i\in V}\pi_i(1-y_i^*).$$

Análise

Teorema: O valor esperado da solução produzida por ARREDALEAT$_\gamma$ é

$$\mathrm{E}[\sum_{e\in T} c_e + \sum_{v\in V\setminus V_T} \pi_v] \ \le\ (\frac{2}{1-\gamma}\ln\frac{1}{\gamma})\sum_{e\in E} c_e x_e^* + \frac{1}{1-\gamma}\sum_{i\in V}\pi_i(1-y_i^*).$$

Corolário: ARREDALEAT$_\gamma$ com $\gamma = e^{-1/2}$ é uma $(1-e^{-1/2})^{-1}$-aproximação para o PCST, onde $(1-e^{-1/2})^{-1} \approx 2{,}54$.

Análise

Teorema: O valor esperado da solução produzida por ARREDALEAT$_\gamma$ é

$$\mathrm{E}[\sum_{e \in T} c_e + \sum_{v \in V \setminus V_T} \pi_v] \;\leq\; (\frac{2}{1-\gamma} \ln \frac{1}{\gamma}) \sum_{e \in E} c_e x_e^* + \frac{1}{1-\gamma} \sum_{i \in V} \pi_i (1 - y_i^*).$$

Corolário: ARREDALEAT$_\gamma$ com $\gamma = e^{-1/2}$ é uma $(1 - e^{-1/2})^{-1}$-aproximação para o PCST, onde $(1 - e^{-1/2})^{-1} \approx 2{,}54$.

Prova: A função $\frac{2}{1-\gamma} \ln \frac{1}{\gamma}$ é decrescente em γ, enquanto que a função $\frac{1}{1-\gamma}$ é crescente em γ.

Análise

Teorema: O valor esperado da solução produzida por $\textsc{ArredAleat}_\gamma$ é

$$\mathrm{E}[\sum_{e \in T} c_e + \sum_{v \in V \setminus V_T} \pi_v] \;\le\; (\frac{2}{1-\gamma} \ln \frac{1}{\gamma}) \sum_{e \in E} c_e x_e^* + \frac{1}{1-\gamma} \sum_{i \in V} \pi_i (1 - y_i^*).$$

Corolário: $\textsc{ArredAleat}_\gamma$ com $\gamma = e^{-1/2}$ é uma $(1 - e^{-1/2})^{-1}$-aproximação para o PCST, onde $(1 - e^{-1/2})^{-1} \approx 2{,}54$.

Prova: A função $\frac{2}{1-\gamma} \ln \frac{1}{\gamma}$ é decrescente em γ, enquanto que a função $\frac{1}{1-\gamma}$ é crescente em γ.

Garantimos o maior coeficiente quando ambas são iguais, o que ocorre quando $\gamma = e^{-1/2} \approx 0{,}61$.