Algoritmos de Aproximação

Segundo Semestre de 2012

Aula passada

MAX SAT: Dadas cláusulas $C_1, \ldots, C_m$ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, e pesos $w_i \geq 0$ para cada C_i, encontrar uma atribuição para as variáveis que maximize o peso das cláusulas satisfeitas.

Aula passada

MAX SAT: Dadas cláusulas $C_1, \ldots, C_m$ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, e pesos $w_i \geq 0$ para cada C_i, encontrar uma atribuição para as variáveis que maximize o peso das cláusulas satisfeitas.

ArredUni(n, m, C)

```
para i ← 1 até n faça
    r ← RANDOM(0, 1)        ▷ número aleatório em [0, 1)
    se r < 1/2
        então x_i ← V
        senão x_i ← F
devolva x
```

Aula passada

MAX SAT: Dadas cláusulas $C_1, \ldots, C_m$ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, e pesos $w_i \geq 0$ para cada C_i, encontrar uma atribuição para as variáveis que maximize o peso das cláusulas satisfeitas.

ArredUni(n, m, C)

```
para i ← 1 até n faça
    r ← RANDOM(0, 1)        ▷ número aleatório em [0, 1)
    se r < 1/2
        então x_i ← V
        senão x_i ← F
devolva x
```

Teorema: ArredUni é $\frac{1}{2}$-aproximação para MAX SAT.

Aula passada

MAX SAT: Dadas cláusulas $C_1, \ldots, C_m$ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, e pesos $w_i \geq 0$ para cada C_i, encontrar uma atribuição para as variáveis que maximize o peso das cláusulas satisfeitas.

ArredUni(n, m, C)

1 **para** $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**
2 $\quad r \leftarrow$ RANDOM$(0, 1)$ $\quad \triangleright$ número aleatório em $[0, 1)$
3 $\quad$ **se** $r < 1/2$
4 $\quad\quad$ **então** $x_i \leftarrow$ V
5 $\quad\quad$ **senão** $x_i \leftarrow$ F
6 **devolva** x

Teorema: ArredUni é $\frac{1}{2}$-aproximação para MAX SAT.

Nesta aula: arredondamento probabilístico não-uniforme.

rredondamento probabilístico não-uniforn

Obtemos uma formulação inteira para o problema.

Relaxamos, e usamos a solução da relaxação linear como probabilidades para obter uma solução inteira.

rredondamento probabilístico não-uniform

Obtemos uma formulação inteira para o problema.

Relaxamos, e usamos a solução da relaxação linear como probabilidades para obter uma solução inteira.

Variáveis para a formulação linear inteira do MAX SAT:
y_i: vale 1 se a variável x_i é VERDADE, 0 caso contrário.
z_j: vale 1 se a cláusula C_j está satisfeita, 0 caso contrário.

rredondamento probabilístico não-uniforn

Obtemos uma formulação inteira para o problema.

Relaxamos, e usamos a solução da relaxação linear como probabilidades para obter uma solução inteira.

Variáveis para a formulação linear inteira do MAX SAT:
y_i: vale 1 se a variável x_i é VERDADE, 0 caso contrário.
z_j: vale 1 se a cláusula C_j está satisfeita, 0 caso contrário.

P_j: conjunto dos índices dos literais positivos de C_j
N_j: conjunto dos índices dos literais negativos de C_j

rredondamento probabilístico não-uniform

Obtemos uma formulação inteira para o problema.

Relaxamos, e usamos a solução da relaxação linear como probabilidades para obter uma solução inteira.

Variáveis para a formulação linear inteira do MAX SAT:

y_i: vale 1 se a variável x_i é VERDADE, 0 caso contrário.

z_j: vale 1 se a cláusula C_j está satisfeita, 0 caso contrário.

P_j: conjunto dos índices dos literais positivos de C_j

N_j: conjunto dos índices dos literais negativos de C_j

Formulação inteira: encontrar y e z que

minimizem $\sum_{j=1}^{m} w_j z_j$

sujeitos a $\sum_{i \in P_j} y_i + \sum_{i \in N_j} (1 - y_i) \geq z_j$ para cada j

$y_i \in \{0, 1\}$ para cada i

$0 \leq z_j \leq 1$ para cada j.

Relaxação linear

P_j/N_j: índices dos literais positivos/negativos de C_j

Relaxação linear: encontrar y e z que

minimizem $\sum_{j=1}^{m} w_j z_j$

sujeitos a $\sum_{i \in P_j} y_i + \sum_{i \in N_j} (1 - y_i) \geq z_j$ para cada j

$0 \leq y_i \leq 1$ para cada i

$0 \leq z_j \leq 1$ para cada j.

Relaxação linear

P_j/N_j: índices dos literais positivos/negativos de C_j

Relaxação linear: encontrar y e z que

minimizem $\sum_{j=1}^{m} w_j z_j$

sujeitos a $\sum_{i \in P_j} y_i + \sum_{i \in N_j} (1 - y_i) \geq z_j$ para cada j

$0 \leq y_i \leq 1$ para cada i

$0 \leq z_j \leq 1$ para cada j.

ArredLP(n, m, C)

```
resolva o LP acima, obtendo y* e z*
para i ← 1 até n faça
      r ← RANDOM(0, 1)      ▷ número aleatório em [0, 1)
      se r < y*_i
            então x_i ← V
            senão x_i ← F
devolva x
```

Fatos auxiliares

Médias geométricas e aritméticas:

Para quaisquer números não-negativos $a_1, \ldots, a_k$,

$$\Big(\prod_{i=1}^{k} a_i\Big)^{1/k} \;\leq\; \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i .$$

Fatos auxiliares

Médias geométricas e aritméticas:

Para quaisquer números não-negativos $a_1, \ldots, a_k$,

$$\Big(\prod_{i=1}^{k} a_i\Big)^{1/k} \;\le\; \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i.$$

Funções côncavas e lineares:

f: função côncava no intervalo $[0,1]$ (i.e., $f''(x) \le 0$ em $[0,1]$)

$f(0) = a$ e $f(1) = b + a$

Fatos auxiliares

Médias geométricas e aritméticas:

Para quaisquer números não-negativos $a_1, \ldots, a_k$,

$$\Big(\prod_{i=1}^{k} a_i\Big)^{1/k} \;\le\; \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} a_i.$$

Funções côncavas e lineares:

f: função côncava no intervalo $[0,1]$ (i.e., $f''(x) \le 0$ em $[0,1]$)

$f(0) = a$ e $f(1) = b + a$

Então $f(x) \ge bx + a$ para todo x em $[0,1]$.

Fatos auxiliares

Funções côncavas e lineares:

f: função côncava no intervalo $[0,1]$ (i.e., $f''(x) \leq 0$ em $[0,1]$)

$f(0) = a$ e $f(1) = b + a$

Então $f(x) \geq bx + a$ para todo x em $[0,1]$.

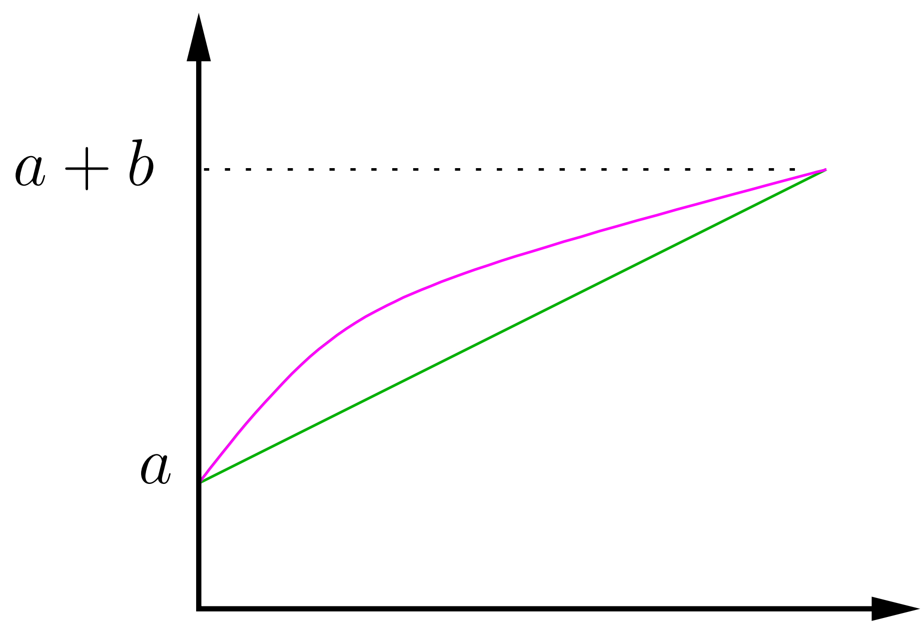
Fatos auxiliares

Funções côncavas e lineares:

f: função côncava no intervalo $[0,1]$ (i.e., $f''(x) \leq 0$ em $[0,1]$)

$f(0) = a$ e $f(1) = b + a$

Então $f(x) \geq bx + a$ para todo x em $[0,1]$.



Análise

ArredLP(n, m, C)

resolva o LP acima, obtendo y^* e z^*
para $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**
    $r \leftarrow$ RANDOM$(0, 1)$ ▷ número aleatório em $[0, 1)$
    se $r < y_i^*$
        então $x_i \leftarrow$ V
        senão $x_i \leftarrow$ F
devolva x

Análise

ArredLP(n, m, C)

resolva o LP acima, obtendo y^* e z^*
para $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**
    $r \leftarrow$ RANDOM$(0, 1)$ ▷ número aleatório em $[0, 1)$
    se $r < y_i^*$
        então $x_i \leftarrow$ V
        senão $x_i \leftarrow$ F
devolva x

Teorema: ArredLP é $(1 - \frac{1}{e})$-aproximação para MAX SAT.

Análise

```
ArredLP(n, m, C)
    resolva o LP acima, obtendo y* e z*
    para i ← 1 até n faça
        r ← RANDOM(0, 1)      ▷ número aleatório em [0, 1)
        se r < y*_i
            então x_i ← V
            senão x_i ← F
    devolva x
```

Teorema: ArredLP é $(1 - \frac{1}{e})$-aproximação para MAX SAT.

Prova: Para cada j,

$$
\begin{aligned}
\Pr[C_j \text{ não é satisfeita}] &= \prod_{i \in P_j} (1 - y_i^*) \prod_{i \in N_j} y_i^* \\
&\leq \Big[\frac{1}{\ell_j}\Big(\sum_{i \in P_j} (1 - y_i^*) + \sum_{i \in N_j} y_i^*\Big)\Big]^{\ell_j}
\end{aligned}
$$

Análise

Teorema: ArredLP é $(1-\frac{1}{e})$-aproximação para MAX SAT.

Prova: Para cada j,

$$\begin{aligned}\Pr[C_j \text{ não é satisfeita}] &= \prod_{i\in P_j}(1-y_i^*)\prod_{i\in N_j} y_i^* \\ &\le \Big[\frac{1}{\ell_j}\Big(\sum_{i\in P_j}(1-y_i^*)+\sum_{i\in N_j} y_i^*\Big)\Big]^{\ell_j}\end{aligned}$$

Análise

Teorema: ArredLP é $(1-\frac{1}{e})$-aproximação para MAX SAT.

Prova: Para cada j,

$$
\begin{aligned}
\Pr[C_j \text{ não é satisfeita}] &= \prod_{i\in P_j}(1-y_i^*)\prod_{i\in N_j} y_i^* \\
&\leq \Big[\frac{1}{\ell_j}\Big(\sum_{i\in P_j}(1-y_i^*)+\sum_{i\in N_j} y_i^*\Big)\Big]^{\ell_j} \\
&= \Big[1-\frac{1}{\ell_j}\Big(\sum_{i\in P_j} y_i^*+\sum_{i\in N_j}(1-y_i^*)\Big)\Big]^{\ell_j}
\end{aligned}
$$

Análise

Teorema: ArredLP é $(1 - \frac{1}{e})$-aproximação para MAX SAT.

Prova: Para cada j,

$$
\begin{aligned}
\Pr[C_j \text{ não é satisfeita}] &= \prod_{i \in P_j} (1 - y_i^*) \prod_{i \in N_j} y_i^* \\
&\leq \Big[\frac{1}{\ell_j}\Big(\sum_{i \in P_j} (1 - y_i^*) + \sum_{i \in N_j} y_i^*\Big)\Big]^{\ell_j} \\
&= \Big[1 - \frac{1}{\ell_j}\Big(\sum_{i \in P_j} y_i^* + \sum_{i \in N_j} (1 - y_i^*)\Big)\Big]^{\ell_j} \\
&\leq \Big[1 - \frac{z_j^*}{\ell_j}\Big]^{\ell_j}.
\end{aligned}
$$

Análise

Teorema: ArredLP é $(1-\frac{1}{e})$-aproximação para MAX SAT.

Prova: Para cada j,

$$\begin{aligned}
\Pr[C_j \text{ não é satisfeita}] &= \prod_{i\in P_j}(1-y_i^*)\prod_{i\in N_j} y_i^* \\
&\leq \Big[\frac{1}{\ell_j}\Big(\sum_{i\in P_j}(1-y_i^*)+\sum_{i\in N_j} y_i^*\Big)\Big]^{\ell_j} \\
&= \Big[1-\frac{1}{\ell_j}\Big(\sum_{i\in P_j} y_i^*+\sum_{i\in N_j}(1-y_i^*)\Big)\Big]^{\ell_j} \\
&\leq \Big[1-\frac{z_j^*}{\ell_j}\Big]^{\ell_j}.
\end{aligned}$$

A função $f(z_j^*) = 1-\left(1-\frac{z_j^*}{\ell_j}\right)^{\ell_j}$ é côncava para $\ell_j \geq 1$.

Análise

Teorema: ArredLP é $(1-\frac{1}{e})$-aproximação para MAX SAT.

Prova: A função $f(z_j^*) = \left(1 - \frac{z_j^*}{\ell_j}\right)^{\ell_j}$ é côncava para $\ell_j \geq 1$. Logo,

$$\Pr[C_j \text{ é satisfeita}] \;\geq\; 1 - \left(1 - \frac{z_j^*}{\ell_j}\right)^{\ell_j} \;\geq\; \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\ell_j}\right)^{\ell_j}\right] z_j^* .$$

Análise

Teorema: ArredLP é $(1-\frac{1}{e})$-aproximação para MAX SAT.

Prova: A função $f(z_j^*) = \left(1 - \frac{z_j^*}{\ell_j}\right)^{\ell_j}$ é côncava para $\ell_j \geq 1$. Logo,

$$\Pr[C_j \text{ é satisfeita}] \;\geq\; 1 - \left(1 - \frac{z_j^*}{\ell_j}\right)^{\ell_j} \;\geq\; \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\ell_j}\right)^{\ell_j}\right] z_j^*.$$

Disso,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[W] &= \sum_{j=1}^{m} w_j \Pr[C_j \text{ é satisfeita}] \\ &\geq \sum_{j=1}^{m} w_j \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\ell_j}\right)^{\ell_j}\right] z_j^* \end{aligned}$$

Análise

Teorema: ArredLP é $(1 - \frac{1}{e})$-aproximação para MAX SAT.

Prova: A função $f(z_j^*) = \left(1 - \frac{z_j^*}{\ell_j}\right)^{\ell_j}$ é côncava para $\ell_j \geq 1$. Logo,

$$\Pr[C_j \text{ é satisfeita}] \;\geq\; 1 - \left(1 - \frac{z_j^*}{\ell_j}\right)^{\ell_j} \;\geq\; \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\ell_j}\right)^{\ell_j}\right] z_j^*.$$

Disso,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[W] &= \sum_{j=1}^{m} w_j \Pr[C_j \text{ é satisfeita}] \\
&\geq \sum_{j=1}^{m} w_j \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\ell_j}\right)^{\ell_j}\right] z_j^* \\
&\geq \min_{k \geq 1} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k}\right] \sum_{j=1}^{m} w_j z_j^*
\end{aligned}$$

Análise

Teorema: ArredLP é $(1-\frac{1}{e})$-aproximação para MAX SAT.

Prova: A função $f(z_j^*) = (1-\frac{z_j^*}{\ell_j})^{\ell_j}$ é côncava para $\ell_j \geq 1$. Logo,

$$\Pr[C_j \text{ é satisfeita}] \;\geq\; 1-\left(1-\frac{z_j^*}{\ell_j}\right)^{\ell_j} \;\geq\; \left[1-\left(1-\frac{1}{\ell_j}\right)^{\ell_j}\right] z_j^*.$$

Disso,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[W] &= \sum_{j=1}^{m} w_j \Pr[C_j \text{ é satisfeita}] \\
&\geq \min_{k\geq 1}\left[1-\left(1-\frac{1}{k}\right)^{k}\right] \sum_{j=1}^{m} w_j z_j^* \\
&\geq \min_{k\geq 1}\left[1-\left(1-\frac{1}{k}\right)^{k}\right] \mathrm{OPT}.
\end{aligned}$$

Análise

Teorema: ArredLP é $(1 - \frac{1}{e})$-aproximação para MAX SAT.

Prova:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[W] &= \sum_{j=1}^{m} w_j \Pr[C_j \text{ é satisfeita}] \\
&\geq \min_{k \geq 1} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k\right] \sum_{j=1}^{m} w_j z_j^* \\
&\geq \min_{k \geq 1} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k\right] \mathrm{OPT}.
\end{aligned}
$$

Análise

Teorema: ArredLP é $(1-\frac{1}{e})$-aproximação para MAX SAT.

Prova:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[W] &= \sum_{j=1}^{m} w_j \Pr[C_j \text{ é satisfeita}] \\
&\geq \min_{k\geq 1} \left[1-\left(1-\frac{1}{k}\right)^k\right] \sum_{j=1}^{m} w_j z_j^* \\
&\geq \min_{k\geq 1} \left[1-\left(1-\frac{1}{k}\right)^k\right] \mathrm{OPT}.
\end{aligned}$$

Mas $\min_{k\geq 1}\left[1-\left(1-\frac{1}{k}\right)^k\right]$ é não-crescente e se aproxima de $1-\frac{1}{e}$ quando $k\to\infty$. Logo...

Análise

Teorema: ArredLP é $(1 - \frac{1}{e})$-aproximação para MAX SAT.

Prova:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[W] &= \sum_{j=1}^{m} w_j \Pr[C_j \text{ é satisfeita}] \\
&\geq \min_{k \geq 1} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k\right] \sum_{j=1}^{m} w_j z_j^* \\
&\geq \min_{k \geq 1} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k\right] \mathrm{OPT}.
\end{aligned}$$

Mas $\min_{k \geq 1} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k\right]$ é não-crescente e se aproxima de $1 - \frac{1}{e}$ quando $k \to \infty$. Logo...

$$\mathrm{E}[W] \geq \left(1 - \frac{1}{e}\right) \mathrm{OPT}. \qquad \blacksquare$$

Melhor de duas soluções

ArredLP(n, m, C)

resolva o LP acima, obtendo y^* e z^*
para $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**
    $r \leftarrow$ RANDOM$(0, 1)$ $\triangleright$ número aleatório em $[0, 1)$
    se $r < y_i^*$
        então $x_i \leftarrow$ V
        senão $x_i \leftarrow$ F
devolva x

Melhor de duas soluções

ArredLP(n, m, C)

```
resolva o LP acima, obtendo y* e z*
para i ← 1 até n faça
    r ← RANDOM(0,1)    ▷ número aleatório em [0,1)
    se r < y*_i
        então x_i ← V
        senão x_i ← F
devolva x
```

No ArredLP, para cada j,

$$\Pr[C_j \text{ é satisfeita}] \;\geq\; \Big[1 - \Big(1 - \frac{1}{\ell_j}\Big)^{\ell_j}\Big] z_j^*.$$

Melhor de duas soluções

ArredLP(n, m, C)
1 resolva o LP acima, obtendo y^* e z^*
2 **para** $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**
3 $r \leftarrow$ RANDOM$(0, 1)$ ▷ número aleatório em $[0, 1)$
4 **se** $r < y_i^*$
5 **então** $x_i \leftarrow$ V
6 **senão** $x_i \leftarrow$ F
7 **devolva** x

No ArredLP, para cada j,

$$\Pr[C_j \text{ é satisfeita}] \;\geq\; \Big[1 - \Big(1 - \frac{1}{\ell_j}\Big)^{\ell_j}\Big] z_j^*.$$

Quanto menor o ℓ_j, maior a probabilidade!

Melhor de duas soluções

ArredUni(n, m, C)

para $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**
    $r \leftarrow$ Random$(0, 1)$ $\triangleright$ número aleatório em $[0, 1)$
    se $r < 1/2$
        então $x_i \leftarrow$ V
        senão $x_i \leftarrow$ F
devolva x

No ArredUni, para cada j,

$$\Pr[C_j \text{ é satisfeita}] \;\geq\; 1 - (\frac{1}{2})^{\ell_j}.$$

Melhor de duas soluções

ArredUni(n, m, C)

```
para i ← 1 até n faça
      r ← RANDOM(0, 1)      ▷ número aleatório em [0, 1)
      se r < 1/2
            então x_i ← V
            senão x_i ← F
devolva x
```

No ArredUni, para cada j,

$$\Pr[C_j \text{ é satisfeita}] \;\geq\; 1 - (\frac{1}{2})^{\ell_j}.$$

Quanto maior o ℓ_j, maior a probabilidade!

Melhor de duas soluções

No ArredLP, para cada j,

$$\Pr[C_j \text{ é satisfeita}] \;\geq\; \Big[1 - \Big(1 - \frac{1}{\ell_j}\Big)^{\ell_j}\Big] z_j^*.$$

Quanto menor o ℓ_j, maior a probabilidade!

Melhor de duas soluções

No ArredLP, para cada j,

$$\Pr[C_j \text{ é satisfeita}] \;\geq\; \Big[1 - \Big(1 - \frac{1}{\ell_j}\Big)^{\ell_j}\Big] z_j^*.$$

Quanto menor o ℓ_j, maior a probabilidade!

No ArredUni, para cada j,

$$\Pr[C_j \text{ é satisfeita}] \;\geq\; 1 - (\frac{1}{2})^{\ell_j} \;\geq\; (1 - (\frac{1}{2})^{\ell_j}) z_j^*.$$

Quanto maior o ℓ_j, maior a probabilidade!

Melhor de duas soluções

No ArredLP, para cada j,

$$\Pr[C_j \text{ é satisfeita}] \;\geq\; \Big[1 - \Big(1 - \frac{1}{\ell_j}\Big)^{\ell_j}\Big] z_j^*.$$

Quanto menor o ℓ_j, maior a probabilidade!

No ArredUni, para cada j,

$$\Pr[C_j \text{ é satisfeita}] \;\geq\; 1 - (\frac{1}{2})^{\ell_j} \;\geq\; (1 - (\frac{1}{2})^{\ell_j}) z_j^*.$$

Quanto maior o ℓ_j, maior a probabilidade!

Execute os dois algoritmos e devolva a melhor atribuição!

Melhor de duas soluções

Execute os dois algoritmos e devolva a melhor atribuição!

W_1: peso da solução do ArredUni
W_2: peso da solução do ArredLP

Melhor de duas soluções

Execute os dois algoritmos e devolva a melhor atribuição!

W_1: peso da solução do ArredUni
W_2: peso da solução do ArredLP

Para esse algoritmo que executa os dois,

$$\mathrm{E}[W] \;=\; \mathrm{E}[\max(W_1, W_2)] \;\geq\; \mathrm{E}[\frac{1}{2}\,W_1 + \frac{1}{2}\,W_2]$$

Melhor de duas soluções

Execute os dois algoritmos e devolva a melhor atribuição!

W_1: peso da solução do ArredUni
W_2: peso da solução do ArredLP

Para esse algoritmo que executa os dois,

$$\mathrm{E}[W] \; = \; \mathrm{E}[\max(W_1, W_2)] \; \geq \; \mathrm{E}[\frac{1}{2}\, W_1 + \frac{1}{2}\, W_2]$$

Mas, para todo ℓ_j,

$$\frac{1}{2}\,(1 - (\frac{1}{2})^{\ell_j}) + \frac{1}{2}\,\Big[1 - \Big(1 - \frac{1}{\ell_j}\Big)^{\ell_j}\Big] \; \geq \; \frac{3}{4}.$$

Melhor de duas soluções

Vamos mostrar que, para todo ℓ_j,

$$\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\ell_j}\right)+\frac{1}{2}\left[1-\left(1-\frac{1}{\ell_j}\right)^{\ell_j}\right] \;\geq\; \frac{3}{4}.$$

Melhor de duas soluções

Vamos mostrar que, para todo ℓ_j,

$$\frac{1}{2}\,(1-(\frac{1}{2})^{\ell_j})+\frac{1}{2}\left[1-\left(1-\frac{1}{\ell_j}\right)^{\ell_j}\right]\;\geq\;\frac{3}{4}.$$

De fato, para $l_j = 1$, temos que

$$\frac{1}{2}\,(1-(\frac{1}{2}))+\frac{1}{2}\left[1-\left(1-\frac{1}{1}\right)\right]\;=\;\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}.$$

Melhor de duas soluções

Vamos mostrar que, para todo ℓ_j,

$$\frac{1}{2}\left(1-(\frac{1}{2})^{\ell_j}\right)+\frac{1}{2}\left[1-\left(1-\frac{1}{\ell_j}\right)^{\ell_j}\right] \;\geq\; \frac{3}{4}.$$

De fato, para $l_j = 1$, temos que

$$\frac{1}{2}\left(1-(\frac{1}{2})\right)+\frac{1}{2}\left[1-\left(1-\frac{1}{1}\right)\right] \;=\; \frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}.$$

Para $l_j = 2$, temos que

$$\frac{1}{2}\left(1-(\frac{1}{2})^2\right)+\frac{1}{2}\left[1-\left(1-\frac{1}{2}\right)^2\right] \;=\; \frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{3}{4}.$$

Melhor de duas soluções

Vamos mostrar que, para todo ℓ_j,

$$\frac{1}{2}\,(1-(\frac{1}{2})^{\ell_j}) + \frac{1}{2}\left[1-\left(1-\frac{1}{\ell_j}\right)^{\ell_j}\right] \;\geq\; \frac{3}{4}.$$

De fato, para $l_j = 1$, temos que

$$\frac{1}{2}\,(1-(\frac{1}{2})) + \frac{1}{2}\left[1-\left(1-\frac{1}{1}\right)\right] \;=\; \frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}.$$

Para $l_j = 2$, temos que

$$\frac{1}{2}\,(1-(\frac{1}{2})^2) + \frac{1}{2}\left[1-\left(1-\frac{1}{2}\right)^2\right] \;=\; \frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{3}{4}.$$

Finalmente, para $l_j \geq 3$, temos que

$$\frac{1}{2}\,(1-(\frac{1}{2})^{\ell_j}) + \frac{1}{2}\left[1-\left(1-\frac{1}{\ell_j}\right)^{\ell_j}\right] \;\geq\; \frac{1}{2}\,(1-(\frac{1}{2})^3) + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right).$$

Melhor de duas soluções

Vamos mostrar que, para todo ℓ_j,

$$\frac{1}{2}\left(1-(\frac{1}{2})^{\ell_j}\right)+\frac{1}{2}\left[1-\left(1-\frac{1}{\ell_j}\right)^{\ell_j}\right] \;\geq\; \frac{3}{4}.$$

De fato, para $l_j = 1, 2$, temos que

$$\frac{1}{2}\left(1-(\frac{1}{2})^{\ell_j}\right)+\frac{1}{2}\left[1-\left(1-\frac{1}{\ell_j}\right)^{\ell_j}\right] \;=\; \frac{3}{4}.$$

Finalmente, para $l_j \geq 3$, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(1-(\frac{1}{2})^{\ell_j}\right)+\frac{1}{2}\left[1-\left(1-\frac{1}{\ell_j}\right)^{\ell_j}\right] &\geq \frac{1}{2}\left(1-(\frac{1}{2})^{3}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right) \\
&= \frac{7}{16}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2e} = \frac{15}{16}-\frac{1}{2e} \\
&> 0.75356 > \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$