Algoritmos de Aproximação

Segundo Semestre de 2012

Aleatoriedade

Algoritmo aleatorizado A é α-aproximação para problema de maximização se o valor esperado da solução produzida é pelo menos $\alpha\,\mathrm{OPT}$.

Aleatoriedade

Algoritmo aleatorizado A é α-aproximação para problema de maximização se o valor esperado da solução produzida é pelo menos $\alpha\,\mathrm{OPT}$.

MAX CUT: Dados $G = (V, E)$ e pesos $w_e \geq 0$ para cada e em E, encontrar corte $\delta(X)$ em G de peso máximo.

Aleatoriedade

Algoritmo aleatorizado A é α-aproximação para problema de maximização se o valor esperado da solução produzida é pelo menos $\alpha\,\mathrm{OPT}$.

MAX CUT: Dados $G = (V, E)$ e pesos $w_e \geq 0$ para cada e em E, encontrar corte $\delta(X)$ em G de peso máximo.

Algoritmo:

para cada v em V, inclua v em X com probabilidade $1/2$.

Aleatoriedade

Algoritmo aleatorizado A é α-aproximação para problema de maximização se o valor esperado da solução produzida é pelo menos $\alpha\,\mathrm{OPT}$.

MAX CUT: Dados $G = (V, E)$ e pesos $w_e \geq 0$ para cada e em E, encontrar corte $\delta(X)$ em G de peso máximo.

Algoritmo:

para cada v em V, inclua v em X com probabilidade $1/2$.

Variáveis aleatórias:

X_{ij}: vale 1 se a aresta $e = ij$ está em $\delta(X)$, 0 caso contrário.

Z: soma dos pesos das arestas ij cujo $X_{ij} = 1$.

Análise do algoritmo para MAX CUT

MAX CUT: Dados $G = (V, E)$ e pesos $w_e \geq 0$ para cada e em E, encontrar corte $\delta(X)$ em G de peso máximo.

Algoritmo:

para cada v em V, inclua v em X com probabilidade $1/2$.

Variáveis aleatórias:

X_{ij}: vale 1 se a aresta $e = ij$ está em $\delta(X)$, 0 caso contrário.

Z: soma dos pesos das arestas ij cujo $X_{ij} = 1$.

Análise do algoritmo para MAX CUT

MAX CUT: Dados $G = (V, E)$ e pesos $w_e \geq 0$ para cada e em E, encontrar corte $\delta(X)$ em G de peso máximo.

Algoritmo:

para cada v em V, inclua v em X com probabilidade $1/2$.

Variáveis aleatórias:

X_{ij}: vale 1 se a aresta $e = ij$ está em $\delta(X)$, 0 caso contrário.
Z: soma dos pesos das arestas ij cujo $X_{ij} = 1$.

$$\mathrm{E}[Z] \;=\; \sum_{ij \in E} w_{ij} \mathrm{E}[X_{ij}]$$

Análise do algoritmo para MAX CUT

MAX CUT: Dados $G = (V, E)$ e pesos $w_e \geq 0$ para cada e em E, encontrar corte $\delta(X)$ em G de peso máximo.

Algoritmo:

para cada v em V, inclua v em X com probabilidade $1/2$.

Variáveis aleatórias:

X_{ij}: vale 1 se a aresta $e = ij$ está em $\delta(X)$, 0 caso contrário.
Z: soma dos pesos das arestas ij cujo $X_{ij} = 1$.

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[Z] &= \sum_{ij \in E} w_{ij} \mathrm{E}[X_{ij}] \\ &= \sum_{ij \in E} w_{ij} \Pr[X_{ij} = 1] \end{aligned}$$

Análise do algoritmo para MAX CUT

MAX CUT: Dados $G = (V, E)$ e pesos $w_e \geq 0$ para cada e em E, encontrar corte $\delta(X)$ em G de peso máximo.

Algoritmo:
para cada v em V, inclua v em X com probabilidade $1/2$.

Variáveis aleatórias:
X_{ij}: vale 1 se a aresta $e = ij$ está em $\delta(X)$, 0 caso contrário.
Z: soma dos pesos das arestas ij cujo $X_{ij} = 1$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[Z] &= \sum_{ij \in E} w_{ij} \mathrm{E}[X_{ij}] \\
&= \sum_{ij \in E} w_{ij} \Pr[X_{ij} = 1] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{ij} w_{ij} \;\geq\; \frac{1}{2} \mathrm{OPT}.
\end{aligned}$$

Análise do algoritmo para MAX CUT

MAX CUT: Dados $G = (V, E)$ e pesos $w_e \geq 0$ para cada e em E, encontrar corte $\delta(X)$ em G de peso máximo.

Algoritmo:

para cada v em V, inclua v em X com probabilidade $1/2$.

Variáveis aleatórias:

X_{ij}: vale 1 se a aresta $e = ij$ está em $\delta(X)$, 0 caso contrário.
Z: soma dos pesos das arestas ij cujo $X_{ij} = 1$.

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[Z] &= \sum_{ij \in E} w_{ij} \mathrm{E}[X_{ij}] = \sum_{ij \in E} w_{ij} \Pr[X_{ij} = 1] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ij} w_{ij} \geq \frac{1}{2} \mathrm{OPT}. \end{aligned}$$

Teorema: O algoritmo é $\frac{1}{2}$-aproximação para o MAX CUT.

MAX SAT

Variáveis booleanas $x_1, \ldots, x_n$.

MAX SAT

Variáveis booleanas $x_1, \ldots, x_n$.

Literal: variável x_i ou sua negação $\bar{x}_i$

MAX SAT

Variáveis booleanas $x_1, \ldots, x_n$.

Literal: variável x_i ou sua negação $\bar{x}_i$

Cláusula: conjunto de literais nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$.

MAX SAT

Variáveis booleanas $x_1, \ldots, x_n$.

Literal: variável x_i ou sua negação $\bar{x}_i$

Cláusula: conjunto de literais nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$.

MAX SAT: Dadas cláusulas $C_1, \ldots, C_m$ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, e pesos $w_j \geq 0$ para cada C_j, encontrar uma atribuição para as variáveis que maximize o peso das cláusulas satisfeitas.

MAX SAT

Variáveis booleanas $x_1, \ldots, x_n$.

Literal: variável x_i ou sua negação $\bar{x}_i$

Cláusula: conjunto de literais nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$.

MAX SAT: Dadas cláusulas $C_1, \ldots, C_m$ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, e pesos $w_j \geq 0$ para cada C_j, encontrar uma atribuição para as variáveis que maximize o peso das cláusulas satisfeitas.

Exemplo: $\Phi = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_4)(\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)$

MAX SAT

Variáveis booleanas $x_1, \ldots, x_n$.

Literal: variável x_i ou sua negação $\bar{x}_i$

Cláusula: conjunto de literais nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$.

MAX SAT: Dadas cláusulas $C_1, \ldots, C_m$ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, e pesos $w_j \geq 0$ para cada C_j, encontrar uma atribuição para as variáveis que maximize o peso das cláusulas satisfeitas.

Exemplo: $\Phi = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_4)(\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)$

Atribuição $x_1 = \mathrm{V}$, $x_2 = \mathrm{V}$, $x_3 = \mathrm{F}$ e $x_4 = \mathrm{V}$ satisfaz Φ.

MAX SAT

Variáveis booleanas $x_1, \ldots, x_n$.

Literal: variável x_i ou sua negação $\bar{x}_i$

Cláusula: conjunto de literais nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$.

MAX SAT: Dadas cláusulas $C_1, \ldots, C_m$ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, e pesos $w_j \geq 0$ para cada C_j, encontrar uma atribuição para as variáveis que maximize o peso das cláusulas satisfeitas.

Exemplo: $\Phi = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)$

MAX SAT

Variáveis booleanas $x_1, \ldots, x_n$.

Literal: variável x_i ou sua negação $\bar{x}_i$

Cláusula: conjunto de literais nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$.

MAX SAT: Dadas cláusulas $C_1, \ldots, C_m$ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, e pesos $w_j \geq 0$ para cada C_j, encontrar uma atribuição para as variáveis que maximize o peso das cláusulas satisfeitas.

Exemplo: $\Phi = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)$

Nenhuma atribuição satisfaz Φ,
mas qualquer uma satisfaz 3 cláusulas de Φ.

MAX SAT

MAX SAT: Dadas cláusulas $C_1, \ldots, C_m$ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, e pesos $w_j \geq 0$ para cada C_j, encontrar uma atribuição para as variáveis que maximize o peso das cláusulas satisfeitas.

MAX SAT

MAX SAT: Dadas cláusulas $C_1, \ldots, C_m$ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, e pesos $w_j \geq 0$ para cada C_j, encontrar uma atribuição para as variáveis que maximize o peso das cláusulas satisfeitas.

Algoritmo:

para cada i, faça $x_i = \mathrm{V}$ com probabilidade $1/2$.

MAX SAT

MAX SAT: Dadas cláusulas $C_1, \ldots, C_m$ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, e pesos $w_j \geq 0$ para cada C_j, encontrar uma atribuição para as variáveis que maximize o peso das cláusulas satisfeitas.

Algoritmo:

para cada i, faça $x_i = \mathrm{V}$ com probabilidade $1/2$.

Variáveis aleatórias:

Y_i: vale 1 se a cláusula C_i foi satisfeita, 0 caso contrário.
W: soma dos pesos das cláusulas satisfeitas.

MAX SAT

MAX SAT: Dadas cláusulas $C_1, \dots, C_m$ nas variáveis $x_1, \dots, x_n$, e pesos $w_j \geq 0$ para cada C_j, encontrar uma atribuição para as variáveis que maximize o peso das cláusulas satisfeitas.

Algoritmo:

para cada i, faça $x_i = \mathrm{V}$ com probabilidade $1/2$.

Variáveis aleatórias:

Y_i: vale 1 se a cláusula C_i foi satisfeita, 0 caso contrário.
W: soma dos pesos das cláusulas satisfeitas.

C_i não é satisfeita, se cada um de seus literais for F.

MAX SAT

MAX SAT: Dadas cláusulas $C_1, \ldots, C_m$ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, e pesos $w_j \geq 0$ para cada C_j, encontrar uma atribuição para as variáveis que maximize o peso das cláusulas satisfeitas.

Algoritmo:

para cada i, faça $x_i = \mathrm{V}$ com probabilidade $1/2$.

Variáveis aleatórias:

Y_i: vale 1 se a cláusula C_i foi satisfeita, 0 caso contrário.
W: soma dos pesos das cláusulas satisfeitas.

C_i não é satisfeita, se cada um de seus literais for F.

Se C_i tem ℓ_i literais, então $\Pr[Y_i = 1] = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\ell_i} \geq \frac{1}{2}$.

MAX SAT

MAX SAT: Dadas cláusulas $C_1, \ldots, C_m$ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, e pesos $w_j \geq 0$ para cada C_j, encontrar uma atribuição para as variáveis que maximize o peso das cláusulas satisfeitas.

Algoritmo:

para cada i, faça $x_i = \mathrm{V}$ com probabilidade $1/2$.

Variáveis aleatórias:

Y_j: vale 1 se a cláusula C_j foi satisfeita, 0 caso contrário.

W: soma dos pesos das cláusulas satisfeitas.

MAX SAT

MAX SAT: Dadas cláusulas $C_1, \ldots, C_m$ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, e pesos $w_j \geq 0$ para cada C_j, encontrar uma atribuição para as variáveis que maximize o peso das cláusulas satisfeitas.

Algoritmo:

para cada i, faça $x_i = \mathrm{V}$ com probabilidade $1/2$.

Variáveis aleatórias:

Y_j: vale 1 se a cláusula C_j foi satisfeita, 0 caso contrário.
W: soma dos pesos das cláusulas satisfeitas.

$$\mathrm{E}[W] \;=\; \sum_{j=1}^{m} w_j \,\Pr[Y_j = 1] \;\geq\; \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} w_j \;\geq\; \frac{1}{2}\,\mathrm{OPT}.$$

MAX SAT

MAX SAT: Dadas cláusulas $C_1, \ldots, C_m$ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, e pesos $w_j \geq 0$ para cada C_j, encontrar uma atribuição para as variáveis que maximize o peso das cláusulas satisfeitas.

Algoritmo:

para cada i, faça $x_i = \mathrm{V}$ com probabilidade $1/2$.

Se C_i tem ℓ_i literais, então $\Pr[Y_i = 1] = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\ell_i}$.

MAX SAT

MAX SAT: Dadas cláusulas $C_1, \ldots, C_m$ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, e pesos $w_j \geq 0$ para cada C_j, encontrar uma atribuição para as variáveis que maximize o peso das cláusulas satisfeitas.

Algoritmo:

para cada i, faça $x_i = \mathrm{V}$ com probabilidade $1/2$.

Se C_i tem ℓ_i literais, então $\Pr[Y_i = 1] = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\ell_i}$.

Se a $\ell_i \geq k$ para toda cláusula C_i, então
o algoritmo é uma $(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k)$-aproximação para MAX SAT.

MAX SAT

MAX SAT: Dadas cláusulas $C_1, \ldots, C_m$ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, e pesos $w_j \geq 0$ para cada C_j, encontrar uma atribuição para as variáveis que maximize o peso das cláusulas satisfeitas.

Algoritmo:

para cada i, faça $x_i = \mathrm{V}$ com probabilidade $1/2$.

Se C_i tem ℓ_i literais, então $\Pr[Y_i = 1] = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\ell_i}$.

Se a $\ell_i \geq k$ para toda cláusula C_i, então
o algoritmo é uma $(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k)$-aproximação para MAX SAT.

MAX E3SAT: MAX SAT com $\ell_i = 3$ para todo i.

O algoritmo acima é uma $\frac{7}{8}$-aproximação para MAX E3SAT.

MAX SAT

MAX SAT: Dadas cláusulas $C_1, \ldots, C_m$ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, e pesos $w_j \geq 0$ para cada C_j, encontrar uma atribuição para as variáveis que maximize o peso das cláusulas satisfeitas.

Algoritmo:
para cada i, faça $x_i = \mathrm{V}$ com probabilidade $1/2$.

MAX E3SAT: MAX SAT com $\ell_i = 3$ para todo i.

O algoritmo acima é uma $\frac{7}{8}$-aproximação para MAX E3SAT.

MAX SAT

MAX SAT: Dadas cláusulas $C_1, \ldots, C_m$ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, e pesos $w_j \geq 0$ para cada C_j, encontrar uma atribuição para as variáveis que maximize o peso das cláusulas satisfeitas.

Algoritmo:

para cada i, faça $x_i = \mathrm{V}$ com probabilidade $1/2$.

MAX E3SAT: MAX SAT com $\ell_i = 3$ para todo i.

O algoritmo acima é uma $\frac{7}{8}$-aproximação para MAX E3SAT.

Teorema: A menos que P $=$ NP, não existe uma α-aproximação para MAX E3SAT com $\alpha > \frac{7}{8}$.

Desaleatorização

Método das esperanças condicionais:

Para cada i, para decidir se faz $x_i \leftarrow \mathrm{V}$ ou $x_i \leftarrow \mathrm{F}$, calcule o valor esperado da solução caso faça uma destas escolhas, e opte pela que leva ao maior valor esperado.

Desaleatorização

Método das esperanças condicionais:

Para cada i, para decidir se faz $x_i \leftarrow \mathrm{V}$ ou $x_i \leftarrow \mathrm{F}$, calcule o valor esperado da solução caso faça uma destas escolhas, e opte pela que leva ao maior valor esperado.

Exemplo: $\Phi = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_4)(\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)$

$$\mathrm{E}[W] \;=\; \frac{7}{8} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \;=\; \frac{7}{8} + \frac{3}{2} \;=\; \frac{19}{8}$$

Desaleatorização

Método das esperanças condicionais:

Para cada i, para decidir se faz $x_i \leftarrow \mathrm{V}$ ou $x_i \leftarrow \mathrm{F}$, calcule o valor esperado da solução caso faça uma destas escolhas, e opte pela que leva ao maior valor esperado.

Exemplo: $\Phi = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_4)(\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)$

$$\mathrm{E}[W] \;=\; \frac{7}{8} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \;=\; \frac{7}{8} + \frac{3}{2} \;=\; \frac{19}{8}$$

$$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{V}] \;=\; 1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \;=\; \frac{3}{2} + \frac{3}{4} \;=\; \frac{9}{4}$$

Desaleatorização

Método das esperanças condicionais:

Para cada i, para decidir se faz $x_i \leftarrow \mathrm{V}$ ou $x_i \leftarrow \mathrm{F}$, calcule o valor esperado da solução caso faça uma destas escolhas, e opte pela que leva ao maior valor esperado.

Exemplo: $\Phi = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_4)(\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)$

$$\mathrm{E}[W] = \frac{7}{8} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{8} + \frac{3}{2} = \frac{19}{8}$$

$$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{V}] = 1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}] = \frac{3}{4} + 1 + \frac{3}{4} = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2} > \frac{9}{4}$$

Desaleatorização

Método das esperanças condicionais:

Para cada i, para decidir se faz $x_i \leftarrow \mathrm{V}$ ou $x_i \leftarrow \mathrm{F}$, calcule o valor esperado da solução caso faça uma destas escolhas, e opte pela que leva ao maior valor esperado.

Exemplo: $\Phi = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_4)(\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)$

$$\mathrm{E}[W] = \frac{7}{8} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{8} + \frac{3}{2} = \frac{19}{8}$$

$$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{V}] = 1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}] = \frac{3}{4} + 1 + \frac{3}{4} = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2} \geq \frac{19}{8}$$

Desaleatorização

Método das esperanças condicionais:

Para cada i, para decidir se faz $x_i \leftarrow \mathrm{V}$ ou $x_i \leftarrow \mathrm{F}$, calcule o valor esperado da solução caso faça uma destas escolhas, e opte pela que leva ao maior valor esperado.

Exemplo: $\Phi = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_4)(\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)$

$$\mathrm{E}[W] \;=\; \frac{7}{8} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \;=\; \frac{7}{8} + \frac{3}{2} \;=\; \frac{19}{8}$$

$$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{V}] \;=\; 1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \;=\; \frac{3}{2} + \frac{3}{4} \;=\; \frac{9}{4}$$
$$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}] \;=\; \frac{3}{4} + 1 + \frac{3}{4} \;=\; \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2} \;\geq\; \frac{19}{8}$$

Fazemos $x_1 \leftarrow \mathrm{F}$.

Desaleatorização

Método das esperanças condicionais:

Para cada i, para decidir se faz $x_i \leftarrow \mathrm{V}$ ou $x_i \leftarrow \mathrm{F}$, calcule o valor esperado da solução caso faça uma destas escolhas, e opte pela que leva ao maior valor esperado.

Exemplo: $\Phi = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_4)(\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)$

$$\mathrm{E}[W] \;=\; \frac{7}{8} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \;=\; \frac{7}{8} + \frac{3}{2} \;=\; \frac{19}{8}$$

$$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{V}] \;=\; 1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \;=\; \frac{3}{2} + \frac{3}{4} \;=\; \frac{9}{4}$$

$$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}] \;=\; \frac{3}{4} + 1 + \frac{3}{4} \;=\; \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2} \;\geq\; \frac{19}{8}$$

Fazemos $x_1 \leftarrow \mathrm{F}$.

$$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}, x_2 = \mathrm{V}] \;=\; \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{4} \;=\; \frac{3}{2} + \frac{3}{4} \;=\; \frac{9}{4}$$

Desaleatorização

Método das esperanças condicionais:

Para cada i, para decidir se faz $x_i \leftarrow \mathrm{V}$ ou $x_i \leftarrow \mathrm{F}$, calcule o valor esperado da solução caso faça uma destas escolhas, e opte pela que leva ao maior valor esperado.

Exemplo: $\Phi = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_4)(\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)$

$$\mathrm{E}[W] \;=\; \frac{7}{8} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \;=\; \frac{7}{8} + \frac{3}{2} \;=\; \frac{19}{8}$$

$$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{V}] \;=\; 1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \;=\; \frac{3}{2} + \frac{3}{4} \;=\; \frac{9}{4}$$

$$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}] \;=\; \frac{3}{4} + 1 + \frac{3}{4} \;=\; \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2} \;\geq\; \frac{19}{8}$$

Fazemos $x_1 \leftarrow \mathrm{F}$.

$$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}, x_2 = \mathrm{V}] \;=\; \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{4} \;=\; \frac{3}{2} + \frac{3}{4} \;=\; \frac{9}{4}$$

$$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}, x_2 = \mathrm{F}] \;=\; 1 + 1 + \frac{3}{4} \;=\; 2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4} \;>\; \frac{9}{4}$$

Desaleatorização

Método das esperanças condicionais:

Para cada i, para decidir se faz $x_i \leftarrow \mathrm{V}$ ou $x_i \leftarrow \mathrm{F}$, calcule o valor esperado da solução caso faça uma destas escolhas, e opte pela que leva ao maior valor esperado.

Exemplo: $\Phi = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_4)(\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)$

$$\mathrm{E}[W] \;=\; \frac{7}{8} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \;=\; \frac{7}{8} + \frac{3}{2} \;=\; \frac{19}{8}$$

$$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{V}] \;=\; 1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \;=\; \frac{3}{2} + \frac{3}{4} \;=\; \frac{9}{4}$$

$$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}] \;=\; \frac{3}{4} + 1 + \frac{3}{4} \;=\; \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2} \;\geq\; \frac{19}{8}$$

Fazemos $x_1 \leftarrow \mathrm{F}$.

$$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}, x_2 = \mathrm{V}] \;=\; \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{4} \;=\; \frac{3}{2} + \frac{3}{4} \;=\; \frac{9}{4}$$

$$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}, x_2 = \mathrm{F}] \;=\; 1 + 1 + \frac{3}{4} \;=\; 2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4} \;\geq\; \frac{19}{8}$$

Desaleatorização

Exemplo: $\Phi = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_4)(x_3 \vee \bar{x}_4)$

$$\mathrm{E}[W] \;=\; \frac{7}{8} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \;=\; \frac{7}{8} + \frac{3}{2} \;=\; \frac{19}{8}$$

$$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{V}] \;=\; 1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \;=\; \frac{3}{2} + \frac{3}{4} \;=\; \frac{9}{4}$$

$$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}] \;=\; \frac{3}{4} + 1 + \frac{3}{4} \;=\; \frac{3}{2} + 1 \;=\; \frac{5}{2} \;\geq\; \frac{19}{8}$$

Fazemos $x_1 \leftarrow \mathrm{F}$.

$$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}, x_2 = \mathrm{V}] \;=\; \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{4} \;=\; \frac{3}{2} + \frac{3}{4} \;=\; \frac{9}{4}$$

$$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}, x_2 = \mathrm{F}] \;=\; 1 + 1 + \frac{3}{4} \;=\; 2 + \frac{3}{4} \;=\; \frac{11}{4} \;\geq\; \frac{19}{8}$$

Desaleatorização

Exemplo: $\Phi = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_4)(x_3 \vee \bar{x}_4)$

$$\mathrm{E}[W] \;=\; \frac{7}{8} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \;=\; \frac{7}{8} + \frac{3}{2} \;=\; \frac{19}{8}$$

$$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{V}] \;=\; 1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \;=\; \frac{3}{2} + \frac{3}{4} \;=\; \frac{9}{4}$$

$$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}] \;=\; \frac{3}{4} + 1 + \frac{3}{4} \;=\; \frac{3}{2} + 1 \;=\; \frac{5}{2} \;\geq\; \frac{19}{8}$$

Fazemos $x_1 \leftarrow \mathrm{F}$.

$$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}, x_2 = \mathrm{V}] \;=\; \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{4} \;=\; \frac{3}{2} + \frac{3}{4} \;=\; \frac{9}{4}$$

$$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}, x_2 = \mathrm{F}] \;=\; 1 + 1 + \frac{3}{4} \;=\; 2 + \frac{3}{4} \;=\; \frac{11}{4} \;\geq\; \frac{19}{8}$$

Fazemos $x_2 \leftarrow \mathrm{F}$.

Desaleatorização

Exemplo: $\Phi = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_4)(x_3 \vee \bar{x}_4)$

$$\mathrm{E}[W] \ = \ \frac{7}{8} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \ = \ \frac{7}{8} + \frac{3}{2} \ = \ \frac{19}{8}$$

$$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{V}] \ = \ 1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \ = \ \frac{3}{2} + \frac{3}{4} \ = \ \frac{9}{4}$$

$$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}] \ = \ \frac{3}{4} + 1 + \frac{3}{4} \ = \ \frac{3}{2} + 1 \ = \ \frac{5}{2} \ \geq \ \frac{19}{8}$$

Fazemos $x_1 \leftarrow \mathrm{F}$.

$$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}, x_2 = \mathrm{V}] \ = \ \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{4} \ = \ \frac{3}{2} + \frac{3}{4} \ = \ \frac{9}{4}$$

$$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}, x_2 = \mathrm{F}] \ = \ 1 + 1 + \frac{3}{4} \ = \ 2 + \frac{3}{4} \ = \ \frac{11}{4} \ \geq \ \frac{19}{8}$$

Fazemos $x_2 \leftarrow \mathrm{F}$.

$$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}, x_2 = \mathrm{F}, x_3 = \mathrm{V}] \ = \ 1 + 1 + 1 \ = \ 3$$

$$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}, x_2 = \mathrm{F}, x_3 = \mathrm{F}] \ = \ 1 + 1 + \frac{1}{2} \ = \ 2 + \frac{1}{2} \ = \ \frac{5}{2} \ < \ 3$$

Desaleatorização

Exemplo: $\Phi = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_4)(x_3 \vee \bar{x}_4)$

$$\mathrm{E}[W] \;=\; \frac{7}{8} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \;=\; \frac{7}{8} + \frac{3}{2} \;=\; \frac{19}{8}$$

$$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{V}] \;=\; 1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \;=\; \frac{3}{2} + \frac{3}{4} \;=\; \frac{9}{4}$$

$$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}] \;=\; \frac{3}{4} + 1 + \frac{3}{4} \;=\; \frac{3}{2} + 1 \;=\; \frac{5}{2} \;\geq\; \frac{19}{8}$$

Fazemos $x_1 \leftarrow \mathrm{F}$.

$$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}, x_2 = \mathrm{V}] \;=\; \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{4} \;=\; \frac{3}{2} + \frac{3}{4} \;=\; \frac{9}{4}$$

$$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}, x_2 = \mathrm{F}] \;=\; 1 + 1 + \frac{3}{4} \;=\; 2 + \frac{3}{4} \;=\; \frac{11}{4} \;\geq\; \frac{19}{8}$$

Fazemos $x_2 \leftarrow \mathrm{F}$.

$$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}, x_2 = \mathrm{F}, x_3 = \mathrm{V}] \;=\; 1 + 1 + 1 \;=\; 3 \;\geq\; \frac{19}{8}$$

$$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}, x_2 = \mathrm{F}, x_3 = \mathrm{F}] \;=\; 1 + 1 + 1 \;=\; 2 + \frac{1}{2} \;=\; \frac{5}{2} \;<\; 3$$

Fazemos $x_3 \leftarrow \mathrm{V}$.

Desaleatorização

Exemplo: $\Phi = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_4)(x_3 \vee \bar{x}_4)$

$\mathrm{E}[W] \;=\; \frac{7}{8} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \;=\; \frac{7}{8} + \frac{3}{2} = \frac{19}{8}$

$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{V}] \; < \mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}] \;=\; \frac{5}{2}$

Fazemos $x_1 \leftarrow \mathrm{F}$.

$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}, x_2 = \mathrm{V}] \; < \; \mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}, x_2 = \mathrm{F}] \;=\; \frac{11}{4}$

Fazemos $x_2 \leftarrow \mathrm{F}$.

$\mathrm{E}[W : x_1 = x_2 = \mathrm{F}, x_3 = \mathrm{F}] < \mathrm{E}[W : x_1 = x_2 = \mathrm{F}, x_3 = \mathrm{V}] = 3$

Fazemos $x_3 \leftarrow \mathrm{V}$.

Desaleatorização

Exemplo: $\Phi = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_4)(x_3 \vee \bar{x}_4)$

$\mathrm{E}[W] \;=\; \frac{7}{8} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \;=\; \frac{7}{8} + \frac{3}{2} = \frac{19}{8}$

$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{V}] \;<\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}] \;=\; \frac{5}{2}$

Fazemos $x_1 \leftarrow \mathrm{F}$.

$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}, x_2 = \mathrm{V}] \;<\; \mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}, x_2 = \mathrm{F}] \;=\; \frac{11}{4}$

Fazemos $x_2 \leftarrow \mathrm{F}$.

$\mathrm{E}[W : x_1 = x_2 = \mathrm{F}, x_3 = \mathrm{F}] < \mathrm{E}[W : x_1 = x_2 = \mathrm{F}, x_3 = \mathrm{V}] = 3$

Fazemos $x_3 \leftarrow \mathrm{V}$.

$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}, x_2 = \mathrm{F}, x_3 = \mathrm{F}, x_4 = \mathrm{V}] \;=\; 3$
$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}, x_2 = \mathrm{F}, x_3 = \mathrm{F}, x_4 = \mathrm{F}] \;=\; 3$

Desaleatorização

Exemplo: $\Phi = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_4)(x_3 \vee \bar{x}_4)$

$$\mathrm{E}[W] \;=\; \frac{7}{8} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \;=\; \frac{7}{8} + \frac{3}{2} = \frac{19}{8}$$

$$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{V}] \;<\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}] \;=\; \frac{5}{2}$$

Fazemos $x_1 \leftarrow \mathrm{F}$.

$$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}, x_2 = \mathrm{V}] \;<\; \mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}, x_2 = \mathrm{F}] \;=\; \frac{11}{4}$$

Fazemos $x_2 \leftarrow \mathrm{F}$.

$$\mathrm{E}[W : x_1 = x_2 = \mathrm{F}, x_3 = \mathrm{F}] < \mathrm{E}[W : x_1 = x_2 = \mathrm{F}, x_3 = \mathrm{V}] = 3$$

Fazemos $x_3 \leftarrow \mathrm{V}$.

$$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}, x_2 = \mathrm{F}, x_3 = \mathrm{F}, x_4 = \mathrm{V}] \;=\; 3$$
$$\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}, x_2 = \mathrm{F}, x_3 = \mathrm{F}, x_4 = \mathrm{F}] \;=\; 3$$

Fazemos $x_4 \leftarrow \mathrm{V}$ (ou $x_4 \leftarrow \mathrm{F}$, já que houve empate).

Desaleatorização

Observe que

$$\mathrm{E}[W] \;=\; \frac{1}{2}\,\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{V}] + \frac{1}{2}\,\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}]$$

logo ou $\mathrm{E}[W] \;\leq\; \mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{V}]$ ou $\mathrm{E}[W] \;\leq\; \mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}]$.

Desaleatorização

Observe que

$$\mathrm{E}[W] \;=\; \frac{1}{2}\,\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{V}] + \frac{1}{2}\,\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}]$$

logo ou $\mathrm{E}[W] \;\leq\; \mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{V}]$ ou $\mathrm{E}[W] \;\leq\; \mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}]$.

Suponha que $\mathrm{E}[W] \;\leq\; \mathrm{E}[W : x_1, \ldots, x_{i-1}]$.

Desaleatorização

Observe que

$$\mathrm{E}[W] \;=\; \frac{1}{2}\,\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{V}] + \frac{1}{2}\,\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}]$$

logo ou $\mathrm{E}[W] \;\leq\; \mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{V}]$ ou $\mathrm{E}[W] \;\leq\; \mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}]$.

Suponha que $\mathrm{E}[W] \;\leq\; \mathrm{E}[W : x_1, \ldots, x_{i-1}]$.

Em geral,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[W : x_1, \ldots, x_{i-1}] \;&=\; \frac{1}{2}\,\mathrm{E}[W : x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i = \mathrm{V}] \\ &\quad + \frac{1}{2}\,\mathrm{E}[W : x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i = \mathrm{F}]. \end{aligned}$$

Desaleatorização

Observe que

$$\mathrm{E}[W] \;=\; \frac{1}{2}\,\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{V}] + \frac{1}{2}\,\mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}]$$

logo ou $\mathrm{E}[W] \;\le\; \mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{V}]$ ou $\mathrm{E}[W] \;\le\; \mathrm{E}[W : x_1 = \mathrm{F}]$.

Suponha que $\mathrm{E}[W] \;\le\; \mathrm{E}[W : x_1, \ldots, x_{i-1}]$.

Em geral,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[W : x_1, \ldots, x_{i-1}] \;&=\; \frac{1}{2}\,\mathrm{E}[W : x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i = \mathrm{V}] \\ &\quad + \frac{1}{2}\,\mathrm{E}[W : x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i = \mathrm{F}].\end{aligned}$$

Logo $\mathrm{E}[W] \;\le\; \mathrm{E}[W : x_1, \ldots, x_i]$.

Uma aproximação melhor

Algoritmo 1:

para cada i, faça $x_i = \mathrm{V}$ com probabilidade $1/2$.

Por que $1/2$? Por que não algo diferente?

Uma aproximação melhor

Algoritmo 1:
para cada i, faça $x_i = \mathrm{V}$ com probabilidade $1/2$.

Por que $1/2$? Por que não algo diferente?

Considere instâncias que não têm cláusulas do tipo $\{\bar{x}_i\}$.

Uma aproximação melhor

Algoritmo 1:
para cada i, faça $x_i = \mathrm{V}$ com probabilidade $1/2$.

Por que $1/2$? Por que não algo diferente?

Considere instâncias que não têm cláusulas do tipo $\{\bar{x}_i\}$.

Seja $p \neq 1/2$.

Algoritmo 2:
para cada i, faça $x_i = \mathrm{V}$ com probabilidade p.

Uma aproximação melhor

Algoritmo 1:
para cada i, faça $x_i = \mathrm{V}$ com probabilidade $1/2$.

Por que $1/2$? Por que não algo diferente?

Considere instâncias que não têm cláusulas do tipo $\{\bar{x}_i\}$.

Seja $p \neq 1/2$.

Algoritmo 2:
para cada i, faça $x_i = \mathrm{V}$ com probabilidade p.

Lema: Cada cláusula C_i é satisfeita com probabilidade pelo menos $\min\{p, 1 - p^2\}$.

Um caso particular do MAX SAT

Considere instâncias que não têm cláusulas do tipo $\{\bar{x}_i\}$.
Seja $p \neq 1/2$.

Algoritmo 2:
para cada i, faça $x_i = \mathrm{V}$ com probabilidade p.

Lema: Cada cláusula C_i é satisfeita com probabilidade pelo menos $\min\{p, 1 - p^2\}$.

Prova:

Um caso particular do MAX SAT

Considere instâncias que não têm cláusulas do tipo $\{\bar{x}_i\}$.
Seja $p \neq 1/2$.

Algoritmo 2:
para cada i, faça $x_i = \mathrm{V}$ com probabilidade p.

Lema: Cada cláusula C_i é satisfeita com probabilidade pelo menos $\min\{p, 1 - p^2\}$.

Prova: Se C_i tem um único literal,
então a probabilidade de C_i ser satisfeita é p.

Um caso particular do MAX SAT

Considere instâncias que não têm cláusulas do tipo $\{\bar{x}_i\}$.
Seja $p \neq 1/2$.

Algoritmo 2:
para cada i, faça $x_i = \mathrm{V}$ com probabilidade p.

Lema: Cada cláusula C_i é satisfeita com probabilidade pelo menos $\min\{p, 1 - p^2\}$.

Prova: Se C_i tem um único literal,
então a probabilidade de C_i ser satisfeita é p.

Se C_i tem a literais positivos e b negativos,
a probabilidade de C_i ser satisfeita é

$$1 - (1 - p)^a p^b \geq 1 - p^{a+b} \geq 1 - p^2.$$

Um caso particular do MAX SAT

Algoritmo 2:

para cada i, faça $x_i = \mathrm{V}$ com probabilidade p.

Lema: Exceto por cláusulas do tipo $\{\bar{x}_i\}$, toda cláusula é satisfeita com probabilidade pelo menos $\min\{p, 1 - p^2\}$.

Um caso particular do MAX SAT

Algoritmo 2:

para cada i, faça $x_i = \mathrm{V}$ com probabilidade p.

Lema: Exceto por cláusulas do tipo $\{\bar{x}_i\}$, toda cláusula é satisfeita com probabilidade pelo menos $\min\{p, 1 - p^2\}$.

O máximo de $\min\{p, 1 - p^2\}$ ocorre quando $p = 1 - p^2$, ou seja, $p = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \approx 0{,}618$.

Um caso particular do MAX SAT

Algoritmo 2:

para cada i, faça $x_i = \mathrm{V}$ com probabilidade p.

Lema: Exceto por cláusulas do tipo $\{\bar{x}_i\}$, toda cláusula é satisfeita com probabilidade pelo menos $\min\{p, 1-p^2\}$.

O máximo de $\min\{p, 1-p^2\}$ ocorre quando $p = 1-p^2$, ou seja, $p = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \approx 0{,}618$.

Teorema: Para instâncias do MAX SAT sem cláusulas do tipo $\{\bar{x}_i\}$, o algoritmo 2 é uma $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$-aproximação.

Prova:

$$\mathrm{E}[W] = \sum_{j=1}^{m} w_j \Pr[Y_j = 1] \geq \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \sum_{j=1}^{m} w_j \geq \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\,\mathrm{OPT}.$$

Caso geral do MAX SAT

Como nos livramos da restrição nas instâncias?

Caso geral do MAX SAT

Como nos livramos da restrição nas instâncias?

Se necessário, modifique a instância, trocando ocorrências de x_i por $\bar{x}_i$ e vice-versa, para que o peso da cláusula $\{x_i\}$ seja maior ou igual ao peso da cláusula $\{\bar{x}_i\}$.

Caso geral do MAX SAT

Como nos livramos da restrição nas instâncias?

Se necessário, modifique a instância, trocando ocorrências de x_i por $\bar{x}_i$ e vice-versa, para que o peso da cláusula $\{x_i\}$ seja maior ou igual ao peso da cláusula $\{\bar{x}_i\}$.

Seja v_i o peso da cláusula $\{\bar{x}_i\}$ na instância modificada. (Se $\{\bar{x}_i\}$ não aparece na instância, tome $v_i = 0$.)

Caso geral do MAX SAT

Como nos livramos da restrição nas instâncias?

Se necessário, modifique a instância, trocando ocorrências de x_i por $\bar{x}_i$ e vice-versa, para que o peso da cláusula $\{x_i\}$ seja maior ou igual ao peso da cláusula $\{\bar{x}_i\}$.

Seja v_i o peso da cláusula $\{\bar{x}_i\}$ na instância modificada. (Se $\{\bar{x}_i\}$ não aparece na instância, tome $v_i = 0$.)

Vale que $\sum_{j=1}^{m} w_j - \sum_{i=1}^{n} v_i \geq \mathrm{OPT}$!

Caso geral do MAX SAT

Como nos livramos da restrição nas instâncias?

Se necessário, modifique a instância, trocando ocorrências de x_i por $\bar{x}_i$ e vice-versa, para que o peso da cláusula $\{x_i\}$ seja maior ou igual ao peso da cláusula $\{\bar{x}_i\}$.

Seja v_i o peso da cláusula $\{\bar{x}_i\}$ na instância modificada.
(Se $\{\bar{x}_i\}$ não aparece na instância, tome $v_i = 0$.)

Vale que $\sum_{j=1}^{m} w_j - \sum_{i=1}^{n} v_i \geq \mathrm{OPT}$!

Vamos analisar a performance do algoritmo 2.

Algoritmo 2:
para cada i, faça $x_i = \mathrm{V}$ com probabilidade p.

Análise do algoritmo

Algoritmo 3:

se o peso da cláusula $\{x_i\} <$ o peso da cláusula $\{\bar{x}_i\}$,
então troque x_i por $\bar{x}_i$ e vice-versa.
para cada i, faça $x_i = \mathrm{V}$ com probabilidade p.

Seja v_i o peso da cláusula $\{\bar{x}_i\}$ na instância modificada.
(Se $\{\bar{x}_i\}$ não aparece na instância, tome $v_i = 0$.)

Vale que $\sum_{j=1}^{m} w_j - \sum_{i=1}^{n} v_i \geq \mathrm{OPT}$!

Análise do algoritmo

Algoritmo 3:

se o peso da cláusula $\{x_i\} <$ o peso da cláusula $\{\bar{x}_i\}$,

então troque x_i por $\bar{x}_i$ e vice-versa.

para cada i, faça $x_i = \mathrm{V}$ com probabilidade p.

Seja v_i o peso da cláusula $\{\bar{x}_i\}$ na instância modificada.
(Se $\{\bar{x}_i\}$ não aparece na instância, tome $v_i = 0$.)

Vale que $\sum_{j=1}^{m} w_j - \sum_{i=1}^{n} v_i \geq \mathrm{OPT}$!

Seja U o conjunto dos índices das cláusulas que não são do tipo $\{\bar{x}_i\}$.

Análise do algoritmo

Algoritmo 3:

se o peso da cláusula $\{x_i\} <$ o peso da cláusula $\{\bar{x}_i\}$,
então troque x_i por $\bar{x}_i$ e vice-versa.
para cada i, faça $x_i = \mathrm{V}$ com probabilidade p.

Seja v_i o peso da cláusula $\{\bar{x}_i\}$ na instância modificada.
(Se $\{\bar{x}_i\}$ não aparece na instância, tome $v_i = 0$.)

Vale que $\sum_{j=1}^{m} w_j - \sum_{i=1}^{n} v_i \geq \mathrm{OPT}$!

Seja U o conjunto dos índices das cláusulas que não são do tipo $\{\bar{x}_i\}$.

Então $\sum_{j \in U} w_j = \sum_{j=1}^{m} w_j - \sum_{i=1}^{n} v_i$.

Análise do algoritmo

Algoritmo 3:

se o peso da cláusula $\{x_i\} <$ o peso da cláusula $\{\bar{x}_i\}$,
então troque x_i por $\bar{x}_i$ e vice-versa.

para cada i, faça $x_i = \mathrm{V}$ com probabilidade $p = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

v_i: peso da cláusula $\{\bar{x}_i\}$ na instância modificada.
(Se $\{\bar{x}_i\}$ não aparece na instância, $v_i = 0$.)

U: conjunto dos índices das cláusulas não do tipo $\{\bar{x}_i\}$.
Então

Análise do algoritmo

Algoritmo 3:

se o peso da cláusula $\{x_i\} <$ o peso da cláusula $\{\bar{x}_i\}$,
então troque x_i por $\bar{x}_i$ e vice-versa.

para cada i, faça $x_i = \mathrm{V}$ com probabilidade $p = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

v_i: peso da cláusula $\{\bar{x}_i\}$ na instância modificada.
(Se $\{\bar{x}_i\}$ não aparece na instância, $v_i = 0$.)

U: conjunto dos índices das cláusulas não do tipo $\{\bar{x}_i\}$.
Então

$$\mathrm{E}[W] = \sum_{j=1}^{m} w_j \Pr[Y_j = 1] \geq \sum_{j \in U} w_j \Pr[Y_j = 1]$$

Análise do algoritmo

Algoritmo 3:

se o peso da cláusula $\{x_i\} <$ o peso da cláusula $\{\bar{x}_i\}$,
então troque x_i por $\bar{x}_i$ e vice-versa.

para cada i, faça $x_i = \mathrm{V}$ com probabilidade $p = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

v_i: peso da cláusula $\{\bar{x}_i\}$ na instância modificada.
(Se $\{\bar{x}_i\}$ não aparece na instância, $v_i = 0$.)

U: conjunto dos índices das cláusulas não do tipo $\{\bar{x}_i\}$.
Então

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[W] &= \sum_{j=1}^{m} w_j \Pr[Y_j = 1] \geq \sum_{j \in U} w_j \Pr[Y_j = 1] \\
&\geq \sum_{j \in U} w_j \, p
\end{aligned}
$$

Análise do algoritmo

Algoritmo 3:

se o peso da cláusula $\{x_i\} <$ o peso da cláusula $\{\bar{x}_i\}$,
então troque x_i por $\bar{x}_i$ e vice-versa.

para cada i, faça $x_i = \mathrm{V}$ com probabilidade $p = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

v_i: peso da cláusula $\{\bar{x}_i\}$ na instância modificada.
(Se $\{\bar{x}_i\}$ não aparece na instância, $v_i = 0$.)

U: conjunto dos índices das cláusulas não do tipo $\{\bar{x}_i\}$.
Então

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[W] &= \sum_{j=1}^{m} w_j \Pr[Y_j = 1] \geq \sum_{j \in U} w_j \Pr[Y_j = 1] \\ &\geq \sum_{j \in U} w_j\, p \geq p\Big(\sum_{j=1}^{m} w_j - \sum_{i=1}^{n} v_i\Big) \geq p\,\mathrm{OPT}. \end{aligned}$$

Conclusão

Algoritmo 3:

se o peso da cláusula $\{x_i\} <$ o peso da cláusula $\{\bar{x}_i\}$,
então troque x_i por $\bar{x}_i$ e vice-versa.

para cada i, faça $x_i = \mathrm{V}$ com probabilidade $p = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

Teorema: O algoritmo 3 é uma $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$-aproximação para o MAX SAT.

Conclusão

Algoritmo 3:

se o peso da cláusula $\{x_i\} <$ o peso da cláusula $\{\bar{x}_i\}$,
então troque x_i por $\bar{x}_i$ e vice-versa.

para cada i, faça $x_i = \mathrm{V}$ com probabilidade $p = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

Teorema: O algoritmo 3 é uma $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$-aproximação para o MAX SAT.

Ele também pode ser desaleatorizado!