Algoritmos de Aproximação

Segundo Semestre de 2012

Steiner trees e variantes

Problema de Steiner: dados $G = (V, E)$, custos $c_e \geq 0$ para cada e em E, e conjunto $R \subseteq V$, encontrar árvore T tq $V_T \supseteq R$ com custo mínimo.

Steiner trees e variantes

Problema de Steiner: dados $G = (V, E)$, custos $c_e \geq 0$ para cada e em E, e conjunto $R \subseteq V$, encontrar árvore T tq $V_T \supseteq R$ com custo mínimo.

Se $R = V$, o problema é fácil: árvore geradora mínima.

Steiner trees e variantes

Problema de Steiner: dados $G = (V, E)$, custos $c_e \geq 0$ para cada e em E, e conjunto $R \subseteq V$, encontrar árvore T tq $V_T \supseteq R$ com custo mínimo.

Se $R = V$, o problema é fácil: árvore geradora mínima.

Prize-Collecting Steiner Tree Problem: dados $G = (V, E)$, $c_e \geq 0$ para cada e em E, um vértice r, e penalidades π_v para cada vértice v, encontrar árvore T contendo r que minimize $c(E_T) + \pi(V \setminus V_T)$.

Formulação inteira

Variáveis:

- x_e para cada aresta e
- y_v para cada vértice v

Formulação inteira

Variáveis:

- x_e para cada aresta e
- y_v para cada vértice v

$x_e = 1$ sse $e \in T$
$y_v = 1$ sse $v \in T$

Formulação inteira

Variáveis:

- x_e para cada aresta e
- y_v para cada vértice v

$x_e = 1$ sse $e \in T$
$y_v = 1$ sse $v \in T$

Encontrar vetores x e y que
minimizem $\sum_{e \in E} c_e\, x_e + \sum_{v \in V} \pi_v\,(1 - y_v)$
sujeito a $\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq y_v$ para todo $S \subseteq V \subseteq \{r\}$ tq $v \in S$
$y_r = 1$
$y_v \in \{0, 1\}$ para cada $v \in V$
$x_e \in \{0, 1\}$ para cada $e \in E$.

Relaxação linear

Encontrar vetores x e y que

minimizem $\sum_{e \in E} c_e \, x_e + \sum_{v \in V} \pi_v \, (1 - y_v)$

sujeito a $\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq y_v$ para todo $S \subseteq V \subseteq \{r\}$ tq $v \in S$

$y_r = 1$

$y_v \geq 0$ para cada $v \in V$

$y_v \leq 1$ para cada $v \in V$

$x_e \geq 0$ para cada $e \in E$.

Relaxação linear

Encontrar vetores x e y que

minimizem $\sum_{e \in E} c_e \, x_e + \sum_{v \in V} \pi_v \, (1 - y_v)$

sujeito a $\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq y_v$ para todo $S \subseteq V \subseteq \{r\}$ tq $v \in S$

$y_r = 1$

$y_v \geq 0$ para cada $v \in V$

$y_v \leq 1$ para cada $v \in V$

$x_e \geq 0$ para cada $e \in E$.

Esse LP tem um número exponencial de restrições.

Como resolvê-lo em tempo polinomial?

Relaxação linear

Encontrar vetores x e y que

minimizem $\sum_{e \in E} c_e \, x_e + \sum_{v \in V} \pi_v \, (1 - y_v)$

sujeito a $\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq y_v$ para todo $S \subseteq V \subseteq \{r\}$ tq $v \in S$

$y_r = 1$

$y_v \geq 0$ para cada $v \in V$

$y_v \leq 1$ para cada $v \in V$

$x_e \geq 0$ para cada $e \in E$.

Esse LP tem um número exponencial de restrições.

Como resolvê-lo em tempo polinomial?

Problema da separação: Dados x e y, determinar se formam uma solução viável do LP ou encontrar uma restrição violada.

Relaxação linear

Encontrar vetores x e y que

minimizem $\sum_{e \in E} c_e\, x_e + \sum_{v \in V} \pi_v\, (1 - y_v)$

sujeito a $\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq y_v$ para todo $S \subseteq V \subseteq \{r\}$ tq $v \in S$

$y_r = 1$

$y_v \geq 0$ para cada $v \in V$

$y_v \leq 1$ para cada $v \in V$

$x_e \geq 0$ para cada $e \in E$.

Relaxação linear

Encontrar vetores x e y que

minimizem $\sum_{e \in E} c_e\, x_e + \sum_{v \in V} \pi_v\, (1 - y_v)$

sujeito a $\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq y_v$ para todo $S \subseteq V \subseteq \{r\}$ tq $v \in S$

$y_r = 1$

$y_v \geq 0$ para cada $v \in V$

$y_v \leq 1$ para cada $v \in V$

$x_e \geq 0$ para cada $e \in E$.

Problema da separação: Dados x e y, determinar se (x, y) é solução viável do LP ou encontrar uma restrição violada.

Relaxação linear

Encontrar vetores x e y que

minimizem $\sum_{e \in E} c_e\, x_e + \sum_{v \in V} \pi_v\,(1 - y_v)$

sujeito a $\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq y_v$ para todo $S \subseteq V \subseteq \{r\}$ tq $v \in S$

$y_r = 1$

$y_v \geq 0$ para cada $v \in V$

$y_v \leq 1$ para cada $v \in V$

$x_e \geq 0$ para cada $e \in E$.

Problema da separação: Dados x e y, determinar se (x, y) é solução viável do LP ou encontrar uma restrição violada.

Considere G com x_e como capacidade para cada e.

Relaxação linear

Encontrar vetores x e y que

minimizem $\sum_{e \in E} c_e \, x_e + \sum_{v \in V} \pi_v \, (1 - y_v)$

sujeito a $\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq y_v$ para todo $S \subseteq V \subseteq \{r\}$ tq $v \in S$

$y_r = 1$

$y_v \geq 0$ para cada $v \in V$

$y_v \leq 1$ para cada $v \in V$

$x_e \geq 0$ para cada $e \in E$.

Problema da separação: Dados x e y, determinar se (x, y) é solução viável do LP ou encontrar uma restrição violada.

Considere G com x_e como capacidade para cada e.

Para cada vértice v, encontre um fluxo máximo de v a r.

Relaxação linear

Encontrar vetores x e y que
minimizem $\sum_{e \in E} c_e\, x_e + \sum_{v \in V} \pi_v\,(1 - y_v)$
sujeito a $\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq y_v$ para todo $S \subseteq V \subseteq \{r\}$ tq $v \in S$
$y_r = 1$
$y_v \geq 0$ para cada $v \in V$
$y_v \leq 1$ para cada $v \in V$
$x_e \geq 0$ para cada $e \in E$.

Problema da separação: Dados x e y, determinar se (x, y) é solução viável do LP ou encontrar uma restrição violada.

Considere G com x_e como capacidade para cada e.

Para cada vértice v, encontre um fluxo máximo de v a r.

Se o fluxo for menor que y_v,
um corte mínimo corresponde a uma restrição violada.

Relaxação linear

Encontrar vetores x e y que
minimizem $\sum_{e\in E} c_e\, x_e + \sum_{v\in V} \pi_v\,(1 - y_v)$
sujeito a $\sum_{e\in\delta(S)} x_e \geq y_v$ para todo $S \subseteq V \subseteq \{r\}$ tq $v \in S$

$$y_r = 1$$
$y_v \geq 0$ para cada $v \in V$
$y_v \leq 1$ para cada $v \in V$
$x_e \geq 0$ para cada $e \in E$.

Problema da separação: Dados x e y, determinar se (x, y) é solução viável do LP ou encontrar uma restrição violada.

Considere G com x_e como capacidade para cada e.

Para cada vértice v, encontre um fluxo máximo de v a r.

Se o fluxo é pelo menos y_v para todo v,
então (x, y) é viável.

Algoritmo

α: um número a ser fixado a frente.

ARRED$_\alpha$ (G, c, π, r)
1 seja (x^*, y^*) uma solução ótima do LP
2 $R \leftarrow \{v \in V_G \ : \ y^*_v \geq \alpha\}$
3 $T \leftarrow$ EX-CAP7(G, c, R)
4 **devolva** T

Algoritmo

α: um número a ser fixado a frente.

ARRED$_\alpha$ (G, c, π, r)
1 seja (x^*, y^*) uma solução ótima do LP
2 $R \leftarrow \{v \in V_G \ : \ y^*_v \geq \alpha\}$
3 $T \leftarrow$ EX-CAP7(G, c, R)
4 **devolva** T

EX-CAP7(G, c, R): devolve uma árvore de Steiner T tq

$$\sum_{e \in T} c_e \geq \frac{2}{\alpha} \sum_{e \in E} c_e \, x^*_e .$$

Algoritmo

α: um número a ser fixado a frente.

ARRED$_\alpha$ (G, c, π, r)
1 seja (x^*, y^*) uma solução ótima do LP
2 $R \leftarrow \{v \in V_G \ : \ y^*_v \geq \alpha\}$
3 $T \leftarrow$ EX-CAP7(G, c, R)
4 **devolva** T

Lema: $\sum_{v \in V \setminus V_T} \pi_v \leq \frac{1}{1-\alpha} \sum_{v \in V} \pi_v (1 - y^*_v)$.

Algoritmo

α: um número a ser fixado a frente.

ARRED$_\alpha$ (G, c, π, r)
1 seja (x^*, y^*) uma solução ótima do LP
2 $R \leftarrow \{v \in V_G \ : \ y^*_v \geq \alpha\}$
3 $T \leftarrow$ EX-CAP7(G, c, R)
4 **devolva** T

Lema: $\sum_{v \in V \setminus V_T} \pi_v \leq \frac{1}{1-\alpha} \sum_{v \in V} \pi_v (1 - y^*_v)$.

Prova: Para cada $v \notin V_T$, sabemos que $y^*_v < \alpha$.

Algoritmo

α: um número a ser fixado a frente.

ARRED$_\alpha$ (G, c, π, r)
1 seja (x^*, y^*) uma solução ótima do LP
2 $R \leftarrow \{v \in V_G \ : \ y^*_v \geq \alpha\}$
3 $T \leftarrow$ EX-CAP7(G, c, R)
4 **devolva** T

Lema: $\sum_{v \in V \setminus V_T} \pi_v \leq \frac{1}{1-\alpha} \sum_{v \in V} \pi_v (1 - y^*_v)$.

Prova: Para cada $v \notin V_T$, sabemos que $1 - y^*_v > 1 - \alpha$.

Algoritmo

α: um número a ser fixado a frente.

ARRED$_\alpha$ (G, c, π, r)
1 seja (x^*, y^*) uma solução ótima do LP
2 $R \leftarrow \{v \in V_G \ : \ y^*_v \geq \alpha\}$
3 $T \leftarrow$ EX-CAP7(G, c, R)
4 **devolva** T

Lema: $\sum_{v \in V \setminus V_T} \pi_v \leq \frac{1}{1-\alpha} \sum_{v \in V} \pi_v (1 - y^*_v)$.

Prova: Para cada $v \notin V_T$, sabemos que $1 - y^*_v > 1 - \alpha$.

$$\sum_{v \in V \setminus V_T} \pi_v \leq \frac{1}{1-\alpha} \sum_{v \in V \setminus V_T} \pi_v (1 - y^*_v)$$

$$\leq \frac{1}{1-\alpha} \sum_{v \in V} \pi_v (1 - y^*_v).$$

Análise

ARRED$_\alpha$ (G, c, π, r)

seja (x^*, y^*) uma solução ótima do LP

$R \leftarrow \{v \in V_G \;:\; y^*_v \geq \alpha\}$

$T \leftarrow$ EX-CAP7(G, c, R)

devolva T

EX-CAP7(G, c, R): devolve uma árvore de Steiner T tq

$$\sum_{e \in T} c_e \geq \frac{2}{\alpha} \sum_{e \in E} c_e \, x^*_e .$$

Lema: $\sum_{v \in V \setminus V_T} \pi_v \leq \frac{1}{1-\alpha} \sum_{v \in V} \pi_v (1 - y^*_v)$.

Análise

ARRED$_{\alpha}$ (G, c, π, r)

1 seja (x^*, y^*) uma solução ótima do LP
2 $R \leftarrow \{v \in V_G \ : \ y_v^* \geq \alpha\}$
3 $T \leftarrow$ EX-CAP7(G, c, R)
4 **devolva** T

EX-CAP7(G, c, R): devolve uma árvore de Steiner T tq

$$\sum_{e \in T} c_e \geq \frac{2}{\alpha} \sum_{e \in E} c_e \, x_e^*.$$

Lema: $\sum_{v \in V \setminus V_T} \pi_v \leq \frac{1}{1-\alpha} \sum_{v \in V} \pi_v (1 - y_v^*)$.

Teorema: O custo do T produzido por ARRED$_{\alpha}$ (G, c, π, r) é

$$\sum_{e \in T} c_e + \sum_{v \notin T} \pi_v \leq \frac{2}{\alpha} \sum_{e \in E} c_e \, x_e^* + \frac{1}{1 - \alpha} \sum_{v \in V} \pi_v (1 - y_v^*).$$

Análise

ARRED$_{\alpha}$ (G, c, π, r)

1 seja (x^*, y^*) uma solução ótima do LP

2 $R \leftarrow \{v \in V_G \ : \ y^*_v \geq \alpha\}$

3 $T \leftarrow$ EX-CAP7(G, c, R)

4 **devolva** T

Teorema: O custo do T produzido por ARRED$_{\alpha}$ (G, c, π, r) é

$$\sum_{e \in T} c_e + \sum_{v \notin T} \pi_v \leq \frac{2}{\alpha} \sum_{e \in E} c_e \, x^*_e + \frac{1}{1-\alpha} \sum_{v \in V} \pi_v (1 - y^*_v).$$

Análise

ARRED$_{\alpha}$ (G, c, π, r)

1 seja (x^*, y^*) uma solução ótima do LP
2 $R \leftarrow \{v \in V_G \ : \ y^*_v \geq \alpha\}$
3 $T \leftarrow$ EX-CAP7(G, c, R)
4 **devolva** T

Teorema: O custo do T produzido por ARRED$_{\alpha}$ (G, c, π, r) é

$$\sum_{e \in T} c_e + \sum_{v \notin T} \pi_v \leq \frac{2}{\alpha} \sum_{e \in E} c_e \, x^*_e + \frac{1}{1-\alpha} \sum_{v \in V} \pi_v (1 - y^*_v).$$

Corolário: ARRED$_{\alpha}$ com $\alpha = 2/3$ é uma 3-aproximação.

Análise

ARRED$_\alpha$ (G, c, π, r)

1 seja (x^*, y^*) uma solução ótima do LP
2 $R \leftarrow \{v \in V_G \ : \ y^*_v \geq \alpha\}$
3 $T \leftarrow$ EX-CAP7(G, c, R)
4 **devolva** T

Teorema: O custo do T produzido por ARRED$_\alpha$ (G, c, π, r) é

$$\sum_{e \in T} c_e + \sum_{v \notin T} \pi_v \leq \frac{2}{\alpha} \sum_{e \in E} c_e \, x^*_e + \frac{1}{1-\alpha} \sum_{v \in V} \pi_v (1 - y^*_v).$$

Corolário: ARRED$_\alpha$ com $\alpha = 2/3$ é uma 3-aproximação.

Prova: $3 \sum_{e \in E} c_e \, x^*_e + 3 \sum_{v \in V} \pi_v (1 - y^*_v) \leq 3 \, \mathrm{OPT}$.

Localização de facilidades

Problema: Dados um conjunto F de facilidades, um conjunto C de clientes, um custo f_i para cada i em F, um custo $c_{ij} \geq 0$ para cada i em F e cada j em C, encontrar um conjunto $F' \subseteq F$ que

$$\sum_{i \in F'} f_i + \sum_{j \in C} \min\{c_{ij} \;:\; i \in F'\}.$$

Localização de facilidades

Problema: Dados um conjunto F de facilidades, um conjunto C de clientes, um custo f_i para cada i em F, um custo $c_{ij} \geq 0$ para cada i em F e cada j em C, encontrar um conjunto $F' \subseteq F$ que

$$\sum_{i \in F'} f_i + \sum_{j \in C} \min\{c_{ij} \ : \ i \in F'\}.$$

Tão difícil de aproximar quanto o SET COVER.

Localização de facilidades

Problema: Dados um conjunto F de facilidades, um conjunto C de clientes, um custo f_i para cada i em F, um custo $c_{ij} \geq 0$ para cada i em F e cada j em C, encontrar um conjunto $F' \subseteq F$ que

$$\sum_{i \in F'} f_i + \sum_{j \in C} \min\{c_{ij} \ : \ i \in F'\}.$$

Tão difícil de aproximar quanto o SET COVER.

Versão métrica: $c_{ij} \leq c_{i\ell} + c_{k\ell} + c_{kj}$ para todo i, j, k, ℓ.

Localização de facilidades

Problema: Dados um conjunto F de facilidades, um conjunto C de clientes, um custo f_i para cada i em F, um custo $c_{ij} \geq 0$ para cada i em F e cada j em C, encontrar um conjunto $F' \subseteq F$ que

$$\sum_{i \in F'} f_i + \sum_{j \in C} \min\{c_{ij} \; : \; i \in F'\}.$$

Tão difícil de aproximar quanto o SET COVER.

Versão métrica: $c_{ij} \leq c_{i\ell} + c_{k\ell} + c_{kj}$ para todo i, j, k, ℓ.

Vamos ver uma 4-aproximação para a versão métrica.

Formulação inteira

Problema: Dados um conjunto F de facilidades, um conjunto C de clientes, um custo f_i para cada i em F, um custo $c_{ij} \geq 0$ para cada i em F e cada j em C, encontrar $F' \subseteq F$ que minimize $\sum_{i \in F'} f_i + \sum_{j \in C} \min\{c_{ij} \; : \; i \in F'\}$.

Formulação inteira

Problema: Dados um conjunto F de facilidades, um conjunto C de clientes, um custo f_i para cada i em F, um custo $c_{ij} \geq 0$ para cada i em F e cada j em C, encontrar $F' \subseteq F$ que minimize $\sum_{i \in F'} f_i + \sum_{j \in C} \min\{c_{ij} \ : \ i \in F'\}$.

Variáveis:

- y_i: indica se a facilidade i é aberta ou não.
- x_{ij}: indica se o cliente j se conecta à facilidade i.

Formulação inteira

Problema: Dados um conjunto F de facilidades, um conjunto C de clientes, um custo f_i para cada i em F, um custo $c_{ij} \geq 0$ para cada i em F e cada j em C, encontrar $F' \subseteq F$ que minimize $\sum_{i \in F'} f_i + \sum_{j \in C} \min\{c_{ij} \ : \ i \in F'\}$.

Variáveis:

- y_i: indica se a facilidade i é aberta ou não.
- x_{ij}: indica se o cliente j se conecta à facilidade i.

Encontrar x e y que

minimizem $\sum_{i \in F} f_i \, y_i + \sum_{i \in F,\ j \in C} c_{ij} \, x_{ij}$

sujeito a $\sum_{i \in F} x_{ij} = 1$ para todo j em C

$x_{ij} \leq y_i$ para todo i em F e j em C

$x_{ij} \in \{0, 1\}$ para todo i em F e j em C

$y_i \in \{0, 1\}$ para todo i em F.