Algoritmos de Aproximação
SEGUNDO SEMESTRE DE 2012
Segunda Prova – 15 de outubro

Nome do aluno: ______________________________________ **Curso**: ____________

Assinatura: ____

No. USP: ______________________ **Professor**: ______________________________

Instruções

1. Não destaque as folhas deste caderno.
2. A prova pode ser feita a lápis.
3. A legibilidade também faz parte da nota!
4. A prova consta de 4 questões. Verifique antes de começar a prova se o seu caderno de questões está completo.
5. Não é permitido o uso de folhas avulsas para rascunho.
6. Não é necessário apagar rascunhos no caderno de questão mas especifique qual é a resposta e qual é o rascunho.
7. A prova é sem consulta.
8. Você pode usar, sem ter que escrever, algoritmos vistos em aula. Neste caso, antes de usá-lo, deixe claro qual é o protótipo do algoritmo, o que ele devolve/faz, e quanto tempo ele consome em função de sua entrada.

Não escrever nesta parte da folha

Questão	Nota	Observação
1		
2		
3		
4		
Total		

Boa prova!

1. [5,0 pontos]
Considere o problema de encontrar um corte máximo em um grafo com uma restrição no tamanho das partes do corte. O problema do corte máximo (MAX CUT) consiste em: dado um grafo $G = (V, E)$ e um peso não-negativo w_{ij} para cada aresta ij em E, encontrar uma partição de V em duas partes, U e $W = V \setminus U$, tal que o peso das arestas com extremos em partes distintas da partição é máximo. Na variante do MAX CUT que consideraremos, há um dado a mais: um inteiro positivo $k \leq |V|/2$, e devemos encontrar uma partição onde $|U| = k$.

   (a) Mostre que o seguinte programa não-linear inteiro modela o MAX CUT com a restrição no tamanho das partes: encontrar um vetor x que

$$\begin{array}{rll} \text{maximize} & \sum_{ij \in E} w_{ij}\,(x_i + x_j - 2x_i x_j) & \\ \text{sujeito a} & \sum_{i \in V} x_i = k & \\ & x_i \in \{0, 1\} & \text{para todo } i \text{ em } V. \end{array}$$

   (b) Mostre que o seguinte programa linear é uma relaxação do problema: encontrar vetores x e z que

$$\begin{array}{rll} \text{maximizem} & \sum_{ij \in E} w_{ij}\, z_{ij} & \\ \text{sujeito a} & z_{ij} \leq x_i + x_j & \text{para todo } ij \text{ em } E \\ & z_{ij} \leq 2 - x_i - x_j & \text{para todo } ij \text{ em } E \\ & \sum_{i \in V} x_i = k & \\ & 0 \leq z_{ij} \leq 1 & \text{para todo } ij \text{ em } E \\ & 0 \leq x_i \leq 1 & \text{para todo } i \text{ em } V. \end{array}$$

   (c) Seja $F(x) = \sum_{ij \in A} w_{ij}(x_i + x_j - 2x_i x_j)$ o valor objetivo do programa não-linear inteiro. Mostre que, para cada (x, z) que é viável para a relaxação linear, $F(x) \geq \frac{1}{2} \sum_{ij \in A} w_{ij}\, z_{ij}$.

   (d) Argumente que, dada uma solução fracionária x, para duas variáveis fracionárias x_i e x_j, é possível aumentar uma de $\epsilon > 0$ e diminuir a outra de ϵ de modo que $F(x)$ não diminui e uma das duas variáveis torna-se inteira.

   (e) Use o argumento acima para projetar uma $\frac{1}{2}$-aproximação para o MAX CUT com restrição no tamanho das partes. Mostre que seu algoritmo é de fato uma $\frac{1}{2}$-aproximação.

2. [1,5 pontos]
O *problema do k-corte máximo* consiste no seguinte: dado um grafo $G = (V, E)$ e pesos não-negativos w_{ij} para cada aresta ij em E, encontrar uma partição de V em k partes tais que o peso total das arestas com extremos em partes distintas da partição é máximo. Escreva uma $\frac{k-1}{k}$-aproximação probabilística para o problema do k-corte máximo, apresentando a sua análise da razão de aproximação.

3. [1,0 pontos]
   Considere a variante do MAX SAT em que todas as variáveis aparecem positivamente nas cláusulas, e existe um peso adicional v_i para cada variável booleana x_i da fórmula. O objetivo agora é encontrar uma atribuição de valores às variáveis da fórmula que maximize o peso total das cláusulas satisfeitas mais o peso total das variáveis que receberam FALSO. Apresente uma formulação linear inteira para essa variante do MAX SAT.

4. [2,5 pontos]
O problema do corte direcionado máximo (MAX DICUT) consiste no seguinte: dado um digrafo $D = (V, A)$ e um peso não-negativo w_{ij} para cada arco ij em A, encontrar uma partição de V em conjuntos U e $W = V \setminus U$ que maximize o peso total dos arcos de U para W, ou seja, arcos (i, j) com i em U e j em W.

(a) Mostre que o seguinte programa linear inteiro é uma formulação do MAX DICUT. Encontrar vetores z e x que

$$\begin{array}{rcl} \text{maximizem} & \sum_{ij \in A} w_{ij} z_{ij} & \\ \text{sujeito a} & z_{ij} \leq x_i & \text{para todo arco } ij \text{ em } A \\ & z_{ij} \leq 1 - x_j & \text{para todo arco } ij \text{ em } A \\ & x_i \in \{0, 1\} & \text{para todo } i \text{ em } V \\ & 0 \leq z_{ij} \leq 1 & \text{para todo } ij \text{ em } A. \end{array}$$

(b) Considere um algoritmo probabilístico para o MAX DICUT que resolve a relaxação linear do programa acima e coloca um vértice i em U com probabilidade $1/4 + x_i/2$. Mostre que o algoritmo resultante é uma $\frac{1}{2}$-aproximação para o MAX DICUT.