Algoritmos de Aproximação

Departamento de Ciência da Computação

Segundo semestre de 2012

Extra da Lista 1

1. Considere o exercício 1.1 do WS. O problema da cobertura parcial tem como entrada uma entrada $(E, \mathcal{S}, c)$ usual do problema da cobertura por conjuntos, e adicionalmente um número p, $0 < p < 1$. Assumindo que $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$, onde $m = |\mathcal{S}|$, o objetivo do problema é encontrar um conjunto $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ tal que $|\cup_{j \in I} S_j| \geq p|E|$ e $\sum_{j \in I} c_j$ é mínimo. Considere o seguinte algoritmo, que é uma pequena adaptação do algoritmo guloso para a cobertura por conjuntos visto em aula.

   Algoritmo GULOSO $(E, \mathcal{S}, c, p)$ $\quad \triangleright\ \mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$

   1 $\quad I \leftarrow \emptyset$
   2 $\quad$ **para** $j \leftarrow 1$ **até** m **faça** $\hat{S}_j \leftarrow S_j$
   3 $\quad n_1 \leftarrow p|E| \qquad i \leftarrow 1$
   4 $\quad$ **enquanto** $n_i > 0$ **faça**
   5 $\qquad k \leftarrow \arg\min\{\frac{c_j}{|\hat{S}_j|} : j$ é tal que $\hat{S}_j \neq \emptyset\}$
   6 $\qquad I \leftarrow I \cup \{k\}$
   7 $\qquad$ **para** $j \leftarrow 1$ **até** m **faça**
   8 $\qquad\quad \hat{S}_j \leftarrow \hat{S}_j \setminus S_k$
   9 $\qquad n_{i+1} \leftarrow n_i - |\hat{S}_k| \qquad i \leftarrow i + 1$
   10 $\quad$ **devolva** I

   (a) Argumente que o algoritmo acima resolve o problema da cobertura parcial.

   (b) Seja opt o valor ótimo do problema da cobertura parcial. Mostre que, na linha 5 do algoritmo GULOSO acima, sempre vale que $\frac{c_k}{|\hat{S}_k|} \leq \frac{\text{opt}}{n_i}$.

   (c) Prove que GULOSO é uma H_{n_1}-aproximação.