Análise de Algoritmos

Estes slides são adaptações de slides

do Prof. Paulo Feofiloff e do Prof. José Coelho de Pina.

Protocolo Exponential Backoff

Placa de rede Ethernet: enquanto transmite um pacote por um canal, lê a transmissão, e verifica se o sinal transmitido coincide com o enviado. Caso haja divergência, há colisão, ou seja, um outro pacote está sendo transmitido pelo mesmo canal. Neste caso, a placa aborta a transmissão e envia pelo canal um sinal específico que indica colisão.

Algoritmo de exponential backoff:

Transmite e testa colisão.
$c \leftarrow 0$ ▷ número de colisões
Enquanto houver colisão faça
  Interrompe a transmissão e envia o sinal de colisão.
  $c \leftarrow c + 1$
  $k \leftarrow$ RANDOM$(0, 2^c - 1)$
  Retransmite e testa colisão após $k \cdot 51\mu s$.
  ▷ 51 pode ser trocado por um positivo qualquer

Quicksort e Select Aleatorizados

CLRS Secs 7.3, 7.4 e 9.2

Particione

Rearranja $A[p\,..\,r]$ de modo que $p \le q \le r$ e
$A[p\,..\,q{-}1] \le A[q] < A[q{+}1\,..\,r]$

```
PARTICIONE (A, p, r)
1   x ← A[r]            ▷ x é o "pivô"
2   i ← p−1
3   para j ← p até r − 1 faça
4         se A[j] ≤ x
5               então i ← i + 1
6                     A[i] ↔ A[j]
7   A[i+1] ↔ A[r]
8   devolva i + 1
```

Invariantes: no começo de cada iteração de 3–6,
(i0) $A[p\,..\,i] \le x$ (i1) $A[i{+}1\,..\,j{-}1] > x$ (i2) $A[d] = x$

Particione

Rearranja $A[p\,..\,r]$ de modo que $p \le q \le r$ e
$A[p\,..\,q{-}1] \le A[q] < A[q{+}1\,..\,r]$

```
PARTICIONE (A, p, r)
    x ← A[r]            ▷ x é o "pivô"
    i ← p−1
    para j ← p até r − 1 faça
        se A[j] ≤ x
            então i ← i + 1
                  A[i] ↔ A[j]
    A[i+1] ↔ A[r]
    devolva i + 1
```

Consumo de tempo: $\Theta(n)$ onde $n := r - p$.

Quicksort aleatorizado

PARTICIONE-ALEA(A, p, r)

1 $\quad i \leftarrow$ RANDOM (p, r)

2 $\quad A[i] \leftrightarrow A[r]$

3 $\quad$ **devolva** PARTICIONE (A, p, r)

Quicksort aleatorizado

```
PARTICIONE-ALEA(A, p, r)
1    i ← RANDOM (p, r)
2    A[i] ↔ A[r]
3    devolva PARTICIONE (A, p, r)

QUICKSORT-ALE (A, p, r)
1    se p < r
2         então q ← PARTICIONE-ALEA (A, p, r)
3               QUICKSORT-ALE (A, p, q − 1)
4               QUICKSORT-ALE (A, q + 1, r)
```

Quicksort aleatorizado

```
PARTICIONE-ALEA(A, p, r)
1    i ← RANDOM (p, r)
2    A[i] ↔ A[r]
3    devolva PARTICIONE (A, p, r)

QUICKSORT-ALE (A, p, r)
1    se p < r
2          então q ← PARTICIONE-ALEA (A, p, r)
3                QUICKSORT-ALE (A, p, q − 1)
4                QUICKSORT-ALE (A, q + 1, r)
```

Consumo esperado de tempo?

Quicksort aleatorizado

```
PARTICIONE-ALEA(A, p, r)
1    i ← RANDOM (p, r)
2    A[i] ↔ A[r]
3    devolva PARTICIONE (A, p, r)

QUICKSORT-ALE (A, p, r)
1    se p < r
2          então q ← PARTICIONE-ALEA (A, p, r)
3                QUICKSORT-ALE (A, p, q − 1)
4                QUICKSORT-ALE (A, q + 1, r)
```

Consumo esperado de tempo?

Basta contar o número esperado de comparações na linha 4 do PARTICIONE.

Consumo esperado de tempo

Basta contar o número esperado de comparações na linha 4 do PARTICIONE.

```
PARTICIONE (A, p, r)
1   x ← A[r]          ▷ x é o "pivô"
2   i ← p−1
3   para j ← p até r − 1 faça
4         se A[j] ≤ x
5               então i ← i + 1
6                     A[i] ↔ A[j]
7   A[i+1] ↔ A[r]
8   devolva i + 1
```

Consumo de tempo esperado

Suponha $A[p\,..\,r]$ permutação de $1\,..\,n$.

X_{ab} = número de comparações entre a e b na linha 4 do PARTICIONE do QUICKSORT-ALE;

Queremos calcular

$$\begin{aligned} X &= \text{total de comparações “}A[j] \leq x\text{”} \\ &= \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^{n} X_{ab} \end{aligned}$$

Consumo de tempo esperado

Supondo $a < b$,

$$X_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{se primeiro pivô em } \{a, \ldots, b\} \text{ é } a \text{ ou } b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Qual a probabilidade de X_{ab} valer 1?

Consumo de tempo esperado

Supondo $a < b$,

$$X_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{se primeiro pivô em } \{a, \ldots, b\} \text{ é } a \text{ ou } b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Qual a probabilidade de X_{ab} valer 1?

$$\Pr\{X_{ab}{=}1\} \;=\; \frac{1}{b-a+1} + \frac{1}{b-a+1} \;=\; \mathrm{E}[X_{ab}]$$

Consumo de tempo esperado

Supondo $a < b$,

$$X_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{se primeiro pivô em } \{a, \ldots, b\} \text{ é } a \text{ ou } b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Qual a probabilidade de X_{ab} valer 1?

$$\Pr\{X_{ab}{=}1\} = \frac{1}{b-a+1} + \frac{1}{b-a+1} = \mathrm{E}[X_{ab}]$$

$$X = \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^{n} X_{ab}$$

$\mathrm{E}[X] =$????

Consumo de tempo esperado

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^{n} \mathrm{E}[X_{ab}] \\
&= \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^{n} \Pr\{X_{ab}=1\} \\
&= \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^{n} \frac{2}{b-a+1} \\
&= \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-a} \frac{2}{k+1} \\
&< \sum_{a=1}^{n-1} 2\left(\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2}+\cdots+\tfrac{1}{n}\right) \\
&< 2n\left(\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2}+\cdots+\tfrac{1}{n}\right) < 2n\,(1+\ln n)
\end{aligned}
$$

CLRS (A.7), p.1060

Conclusões

O consumo de tempo esperado do algoritmo QUICKSORT-ALE é $\mathrm{O}(n \log n)$.

Do exercício 7.4-4 do CLRS temos que

O consumo de tempo esperado do algoritmo QUICKSORT-ALE é $\Theta(n \log n)$.

Select aleatorizado

```
PARTICIONE-ALEA(A, p, r)
1   i ← RANDOM (p, r)
2   A[i] ↔ A[r]
3   devolva PARTICIONE (A, p, r)

SELECT-ALEA (A, p, r, k)
1   se p < r então
2       q ← PARTICIONE-ALEA (A, p, r)
3       se k = q − p + 1
4           então devolva A[q]
5       se k < q − p + 1
6           então SELECT-ALEA (A, p, q − 1, k)
7           senão SELECT-ALEA (A, q + 1, r, k − (q − p + 1))
```

Select aleatorizado

```
PARTICIONE-ALEA(A, p, r)
1   i ← RANDOM (p, r)
2   A[i] ↔ A[r]
3   devolva PARTICIONE (A, p, r)

SELECT-ALEA (A, p, r, k)
1   se p < r então
2       q ← PARTICIONE-ALEA (A, p, r)
3       se k = q − p + 1
4           então devolva A[q]
5       se k < q − p + 1
6           então SELECT-ALEA (A, p, q − 1, k)
7           senão SELECT-ALEA (A, q + 1, r, k − (q − p + 1))
```

Consumo esperado de tempo?

Consumo de tempo esperado

Suponha $A[p\,..\,r]$ permutação de $1\,..\,n$.

X_{ab} = número de comparações entre a e b na linha 4 do PARTICIONE do SELECT-ALEA.

Observe que X_{ab} não é a mesma de antes.

De novo, queremos calcular

$$\begin{aligned} X &= \text{total de comparações “}A[j] \le x\text{”} \\ &= \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^{n} X_{ab} \end{aligned}$$

Consumo de tempo esperado

Vamos supor que $k = n$.
Supondo $a < b$,

$$X_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{se primeiro pivô em } \{a, \ldots, n\} \text{ é } a \text{ ou } b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Qual a probabilidade de X_{ab} valer 1?

Consumo de tempo esperado

Vamos supor que $k = n$.
Supondo $a < b$,

$$X_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{se primeiro pivô em } \{a, \ldots, n\} \text{ é } a \text{ ou } b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Qual a probabilidade de X_{ab} valer 1?

$$\Pr\{X_{ab}{=}1\} \;=\; \frac{1}{n-a+1} + \frac{1}{n-a+1} \;=\; \mathrm{E}[X_{ab}]$$

Consumo de tempo esperado

Vamos supor que $k = n$.
Supondo $a < b$,

$$X_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{se primeiro pivô em } \{a, \ldots, n\} \text{ é } a \text{ ou } b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Qual a probabilidade de X_{ab} valer 1?

$$\Pr\{X_{ab}{=}1\} = \frac{1}{n-a+1} + \frac{1}{n-a+1} = \mathrm{E}[X_{ab}]$$

$$X = \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^{n} X_{ab}$$

$\mathrm{E}[X] =$????

Consumo de tempo esperado

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^{n} \mathrm{E}[X_{ab}] = \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^{n} \Pr\{X_{ab}=1\} \\
&= \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^{n} \frac{2}{n-a+1} \\
&= \sum_{a=1}^{n-1} \frac{2(n-a)}{n-a+1} \\
&< \sum_{a=1}^{n-1} 2 \;<\; 2n.
\end{aligned}
$$

Consumo de tempo esperado

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^{n} \mathrm{E}[X_{ab}] = \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^{n} \mathsf{Pr}\,\{X_{ab}{=}1\} \\
&= \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^{n} \frac{2}{n-a+1} \\
&= \sum_{a=1}^{n-1} \frac{2(n-a)}{n-a+1} \\
&< \sum_{a=1}^{n-1} 2 \;<\; 2n.
\end{aligned}
$$

Exercício: Refaça os cálculos para um k arbitrário.

Uma análise diferente

Suponha $A[p\,..\,r]$ permutação de $1\,..\,n$.

Seja

T_n = número de comparações realizadas em uma chamada do SELECT-ALEA para $n := r - p + 1$.

Uma análise diferente

Suponha $A[p\,..\,r]$ permutação de $1\,..\,n$.

Seja

T_n = número de comparações realizadas em uma chamada do SELECT-ALEA para $n := r - p + 1$.

Observe que $T_1 = 0$ e

$$T_n \leq \max\{T_{q'-1}, T_{n-q'}\} + n - 1 \text{ para } n \geq 2,$$

onde $q' = q - p + 1$.

Uma análise diferente

Suponha $A[p\,..\,r]$ permutação de $1\,..\,n$.

Seja

T_n = número de comparações realizadas em uma chamada do SELECT-ALEA para $n := r - p + 1$.

Observe que $T_1 = 0$ e

$$T_n \;\leq\; \max\{T_{q'-1}, T_{n-q'}\} + n - 1 \text{ para } n \geq 2,$$

onde $q' = q - p + 1$.

Seja

$$X_h \;=\; \begin{cases} 1 & \text{se } \max\{k-1, n-k\} = h \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Temos que $T_n \;\leq\; \sum_{h=1}^{n-1} X_h T_h + n - 1$.

Uma análise diferente

Note que

$$\mathrm{E}[X_h] = \Pr[X_h = 1] \leq \begin{cases} 0 & \text{se } h = 1, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor - 1 \\ \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Uma análise diferente

Note que

$$\mathrm{E}[X_h] = \Pr[X_h = 1] \leq \begin{cases} 0 & \text{se } h = 1, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor - 1 \\ \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para $n \geq 2$, como $T_n \leq \sum_{h=1}^{n-1} X_h T_h + n - 1$, temos que

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[T_n] &\leq \sum_{h=1}^{n-1} \mathrm{E}[X_h T_h] + n - 1 \\ &= \sum_{h=1}^{n-1} \mathrm{E}[X_h]\mathrm{E}[T_h] + n - 1 \quad \text{pois } X_h \text{ e } T_h \text{ são indep.} \\ &\leq \frac{2}{n} \sum_{h=a}^{n-1} \mathrm{E}[T_h] + n - 1 \quad \text{onde } a = \lfloor n/2 \rfloor \end{aligned}$$

Uma recorrêcia...

$\mathrm{E}[T_n]$ é da mesma classe $\mathrm{O}(\cdot)$
que a solução da seguinte recorrência:

$$\begin{aligned} S(1) &= 0, \quad \text{e} \\ S(n) &\leq \frac{2}{n}\sum_{h=a}^{n-1} S(h) + n - 1 \quad \text{para } n = 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Uma recorrêcia...

$\mathrm{E}[T_n]$ é da mesma classe $\mathrm{O}(\cdot)$
que a solução da seguinte recorrência:

$$\begin{aligned} S(1) &= 0, \quad \text{e} \\ S(n) &\leq \frac{2}{n}\sum_{h=a}^{n-1} S(h) + n - 1 \quad \text{para } n = 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Vamos verificar que $S(n) \leq 4n$.

$S(n) \leq 4n$ por indução em n

$S(1) = 0$ e $S(n) \leq \frac{2}{n} \sum_{h=a}^{n-1} S(h) + n - 1$ para $n = 2, 3, \ldots$

Se $n = 1$, temos que $S(1) = 0 < 4$.

$S(n) \leq 4n$ por indução em n

$S(1) = 0$ e $S(n) \leq \frac{2}{n} \sum_{h=a}^{n-1} S(h) + n - 1$ para $n = 2, 3, \ldots$

Se $n \geq 2$, então

$$S(n) \;\leq\; \frac{2}{n} \sum_{h=a}^{n-1} S(h) + n - 1 \;\leq\; \frac{2}{n} \sum_{h=a}^{n-1} 4h + n - 1$$

$S(n) \leq 4n$ por indução em n

$S(1) = 0$ e $S(n) \leq \frac{2}{n} \sum_{h=a}^{n-1} S(h) + n - 1$ para $n = 2, 3, \ldots$

Se $n \geq 2$, então

$$\begin{aligned} S(n) &\leq \frac{2}{n} \sum_{h=a}^{n-1} S(h) + n - 1 \leq \frac{2}{n} \sum_{h=a}^{n-1} 4h + n - 1 \\ &= \frac{8}{n} \left(\sum_{h=1}^{n-1} h - \sum_{h=1}^{a-1} h \right) + n - 1 = \frac{4}{n} (n(n-1) - a(a-1)) + n \end{aligned}$$

$S(n) \leq 4n$ por indução em n

$S(1) = 0$ e $S(n) \leq \frac{2}{n} \sum_{h=a}^{n-1} S(h) + n - 1$ para $n = 2, 3, \ldots$

Se $n \geq 2$, então

$$
\begin{aligned}
S(n) &\leq \frac{2}{n} \sum_{h=a}^{n-1} S(h) + n - 1 \leq \frac{2}{n} \sum_{h=a}^{n-1} 4h + n - 1 \\
&= \frac{8}{n} \left(\sum_{h=1}^{n-1} h - \sum_{h=1}^{a-1} h \right) + n - 1 = \frac{4}{n} (n(n-1) - a(a-1)) + n \\
&= 4(n-1) - \frac{4a(a-1)}{n} + n - 1
\end{aligned}
$$

$S(n) \leq 4n$ por indução em n

$S(1) = 0$ e $S(n) \leq \frac{2}{n}\sum_{h=a}^{n-1} S(h) + n - 1$ para $n = 2, 3, \ldots$

Se $n \geq 2$, então

$$
\begin{aligned}
S(n) &\leq \frac{2}{n}\sum_{h=a}^{n-1} S(h) + n - 1 \leq \frac{2}{n}\sum_{h=a}^{n-1} 4h + n - 1 \\
&= \frac{8}{n}\left(\sum_{h=1}^{n-1} h - \sum_{h=1}^{a-1} h\right) + n - 1 = \frac{4}{n}(n(n-1) - a(a-1)) + n \\
&= 4(n-1) - \frac{4a(a-1)}{n} + n - 1 \\
&\leq 4(n-1) - \frac{4(n-1)(n-3)}{4n} + n - 1
\end{aligned}
$$

$S(n) \leq 4n$ por indução em n

$S(1) = 0$ e $S(n) \leq \frac{2}{n}\sum_{h=a}^{n-1} S(h) + n - 1$ para $n = 2, 3, \ldots$

Se $n \geq 2$, então

$$
\begin{aligned}
S(n) &\leq \frac{2}{n}\sum_{h=a}^{n-1} S(h) + n - 1 \leq \frac{2}{n}\sum_{h=a}^{n-1} 4h + n - 1 \\
&= \frac{8}{n}\Big(\sum_{h=1}^{n-1} h - \sum_{h=1}^{a-1} h\Big) + n - 1 = \frac{4}{n}(n(n-1) - a(a-1)) + n \\
&\leq 4(n-1) - \frac{4(n-1)(n-3)}{4n} + n - 1 \\
&= 4(n-1) + \frac{(n-1)n - (n-1)(n-3)}{n}
\end{aligned}
$$

$S(n) \leq 4n$ por indução em n

$S(1) = 0$ e $S(n) \leq \frac{2}{n}\sum_{h=a}^{n-1} S(h) + n - 1$ para $n = 2, 3, \ldots$

Se $n \geq 2$, então

$$
\begin{aligned}
S(n) &\leq \frac{2}{n}\sum_{h=a}^{n-1} S(h) + n - 1 \leq \frac{2}{n}\sum_{h=a}^{n-1} 4h + n - 1 \\
&= \frac{8}{n}\left(\sum_{h=1}^{n-1} h - \sum_{h=1}^{a-1} h\right) + n - 1 = \frac{4}{n}(n(n-1) - a(a-1)) + n \\
&\leq 4(n-1) - \frac{4(n-1)(n-3)}{4n} + n - 1 \\
&= 4(n-1) + \frac{3(n-1)}{n}
\end{aligned}
$$

$S(n) \leq 4n$ por indução em n

$S(1) = 0$ e $S(n) \leq \frac{2}{n}\sum_{h=a}^{n-1} S(h) + n - 1$ para $n = 2, 3, \ldots$

Se $n \geq 2$, então

$$
\begin{aligned}
S(n) &\leq \frac{2}{n}\sum_{h=a}^{n-1} S(h) + n - 1 \leq \frac{2}{n}\sum_{h=a}^{n-1} 4h + n - 1 \\
&= \frac{8}{n}\Big(\sum_{h=1}^{n-1} h - \sum_{h=1}^{a-1} h\Big) + n - 1 = \frac{4}{n}(n(n-1) - a(a-1)) + n \\
&\leq 4(n-1) - \frac{4(n-1)(n-3)}{4n} + n - 1 \\
&= 4(n-1) + \frac{3(n-1)}{n} \\
&< 4n - 4 + 3 < 4n.
\end{aligned}
$$

Conclusões

O consumo de tempo esperado do algoritmo SELECT-ALEA é $\mathrm{O}(n)$.