Análise de Algoritmos

Estes slides são adaptações de slides

do Prof. Paulo Feofiloff e do Prof. José Coelho de Pina.

Protocolo Exponential Backoff

Placa de rede Ethernet: enquanto transmite um pacote por um canal, lê a transmissão, e verifica se o sinal transmitido coincide com o enviado. Caso haja divergência, há colisão, ou seja, um outro pacote está sendo transmitido pelo mesmo canal. Neste caso, a placa aborta a transmissão e envia pelo canal um sinal específico que indica colisão.

Algoritmo de exponential backoff:

Transmite e testa colisão.
$c \leftarrow 0$ ▷ número de colisões
Enquanto houver colisão faça
    Interrompe a transmissão e envia o sinal de colisão.
    $c \leftarrow c + 1$
    $k \leftarrow$ RANDOM$(0, 2^c - 1)$
    Retransmite e testa colisão após $k \cdot 51\mu s$.
    ▷ 51 pode ser trocado por um positivo qualquer

Quicksort e Select Aleatorizados

CLRS Secs 7.3, 7.4 e 9.2

Particione

Rearranja $A[p\,.\,.\,r]$ de modo que $p \le q \le r$ e
$A[p\,.\,.\,q{-}1] \le A[q] < A[q{+}1\,.\,.\,r]$

PARTICIONE (A, p, r)
1 $x \leftarrow A[r]$ $\quad \triangleright$ x é o "pivô"
2 $i \leftarrow p{-}1$
3 **para** $j \leftarrow p$ **até** $r-1$ **faça**
4   **se** $A[j] \le x$
5   **então** $i \leftarrow i+1$
6                 $A[i] \leftrightarrow A[j]$
7 $A[i{+}1] \leftrightarrow A[r]$
8 **devolva** $i+1$

Invariantes: no começo de cada iteração de 3–6,
(i0) $A[p\,.\,.\,i] \le x$ (i1) $A[i{+}1\,.\,.\,j{-}1] > x$ (i2) $A[d] = x$

Particione

Rearranja $A[p\mathinner{..}r]$ de modo que $p \le q \le r$ e
$A[p\mathinner{..}q{-}1] \le A[q] < A[q{+}1\mathinner{..}r]$

PARTICIONE (A, p, r)

$x \leftarrow A[r]$ $\quad\triangleright$ x é o “pivô”
$i \leftarrow p{-}1$
para $j \leftarrow p$ **até** $r-1$ **faça**
    se $A[j] \le x$
        então $i \leftarrow i+1$
            $A[i] \leftrightarrow A[j]$
$A[i{+}1] \leftrightarrow A[r]$
devolva $i+1$

Consumo de tempo: $\Theta(n)$ onde $n := r - p$.

Quicksort aleatorizado

PARTICIONE-ALEA(A, p, r)

$i \leftarrow$ RANDOM (p, r)

$A[i] \leftrightarrow A[r]$

devolva PARTICIONE (A, p, r)

Quicksort aleatorizado

PARTICIONE-ALEA(A, p, r)

  $i \leftarrow$ RANDOM (p, r)

  $A[i] \leftrightarrow A[r]$

  devolva PARTICIONE (A, p, r)

QUICKSORT-ALE (A, p, r)

  se $p < r$

    então $q \leftarrow$ PARTICIONE-ALEA (A, p, r)

      QUICKSORT-ALE $(A, p, q-1)$

      QUICKSORT-ALE $(A, q+1, r)$

Quicksort aleatorizado

PARTICIONE-ALEA(A, p, r)
1 $\quad i \leftarrow$ RANDOM (p, r)
2 $\quad A[i] \leftrightarrow A[r]$
3 $\quad$ **devolva** PARTICIONE (A, p, r)

QUICKSORT-ALE (A, p, r)
1 $\quad$ **se** $p < r$
2 $\qquad$ **então** $q \leftarrow$ PARTICIONE-ALEA (A, p, r)
3 $\qquad\qquad$ QUICKSORT-ALE $(A, p, q-1)$
4 $\qquad\qquad$ QUICKSORT-ALE $(A, q+1, r)$

Consumo esperado de tempo?

Quicksort aleatorizado

PARTICIONE-ALEA(A, p, r)
$i \leftarrow$ RANDOM (p, r)
$A[i] \leftrightarrow A[r]$
devolva PARTICIONE (A, p, r)

QUICKSORT-ALE (A, p, r)
se $p < r$
  então $q \leftarrow$ PARTICIONE-ALEA (A, p, r)
    QUICKSORT-ALE $(A, p, q-1)$
    QUICKSORT-ALE $(A, q+1, r)$

Consumo esperado de tempo?

Basta contar o número esperado de comparações na linha 4 do PARTICIONE.

Consumo esperado de tempo

Basta contar o número esperado de comparações na linha 4 do PARTICIONE.

PARTICIONE (A, p, r)
1 $\quad x \leftarrow A[r]$ $\qquad \triangleright$ x é o "pivô"
2 $\quad i \leftarrow p-1$
3 $\quad$ **para** $j \leftarrow p$ **até** $r-1$ **faça**
4 $\qquad$ **se** $A[j] \leq x$
5 $\qquad\quad$ **então** $i \leftarrow i+1$
6 $\qquad\qquad A[i] \leftrightarrow A[j]$
7 $\quad A[i+1] \leftrightarrow A[r]$
8 $\quad$ **devolva** $i+1$

Consumo de tempo esperado

Suponha $A[p\,..\,r]$ permutação de $1\,..\,n$.

X_{ab} = número de comparações entre a e b na linha 4 do PARTICIONE do QUICKSORT-ALE;

Queremos calcular

$$X = \text{total de comparações “}A[j] \leq x\text{”}$$
$$= \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^{n} X_{ab}$$

Consumo de tempo esperado

Supondo $a < b$,

$$X_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{se primeiro pivô em } \{a, \ldots, b\} \text{ é } a \text{ ou } b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Qual a probabilidade de X_{ab} valer 1?

Consumo de tempo esperado

Supondo $a < b$,

$$X_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{se primeiro pivô em } \{a, \ldots, b\} \text{ é } a \text{ ou } b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Qual a probabilidade de X_{ab} valer 1?

$$\text{Pr}\{X_{ab}{=}1\} \;=\; \frac{1}{b-a+1} + \frac{1}{b-a+1} \;=\; \mathrm{E}[X_{ab}]$$

Consumo de tempo esperado

Supondo $a < b$,

$$X_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{se primeiro pivô em } \{a, \ldots, b\} \text{ é } a \text{ ou } b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Qual a probabilidade de X_{ab} valer 1?

$$\text{Pr}\,\{X_{ab}{=}1\} \;=\; \frac{1}{b-a+1} + \frac{1}{b-a+1} \;=\; \mathrm{E}[X_{ab}]$$

$$X = \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^{n} X_{ab}$$

$\mathrm{E}[X] =$????

Consumo de tempo esperado

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^{n} \mathrm{E}[X_{ab}] \\
&= \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^{n} \mathsf{Pr}\{X_{ab}=1\} \\
&= \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^{n} \frac{2}{b-a+1} \\
&= \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-a} \frac{2}{k+1} \\
&< \sum_{a=1}^{n-1} 2\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) \\
&< 2n\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) < 2n\,(1+\ln n)
\end{aligned}
$$

CLRS (A.7), p.1060

Conclusões

O consumo de tempo esperado do algoritmo QUICKSORT-ALE é $\mathrm{O}(n \log n)$.

Do exercício 7.4-4 do CLRS temos que

O consumo de tempo esperado do algoritmo QUICKSORT-ALE é $\Theta(n \log n)$.

Select aleatorizado

PARTICIONE-ALEA(A, p, r)
$i \leftarrow$ RANDOM (p, r)
$A[i] \leftrightarrow A[r]$
devolva PARTICIONE (A, p, r)

SELECT-ALEA (A, p, r, k)
se $p < r$ **então**
  $q \leftarrow$ PARTICIONE-ALEA (A, p, r)
  se $k = q - p + 1$
    então devolva $A[q]$
  se $k < q - p + 1$
    então SELECT-ALEA $(A, p, q - 1, k)$
    senão SELECT-ALEA $(A, q + 1, r, k - (q - p + 1))$

Select aleatorizado

PARTICIONE-ALEA(A, p, r)
1 $i \leftarrow$ RANDOM (p, r)
2 $A[i] \leftrightarrow A[r]$
3 **devolva** PARTICIONE (A, p, r)

SELECT-ALEA (A, p, r, k)
1 **se** $p < r$ **então**
2 $q \leftarrow$ PARTICIONE-ALEA (A, p, r)
3 **se** $k = q - p + 1$
4 **então devolva** $A[q]$
5 **se** $k < q - p + 1$
6 **então** SELECT-ALEA $(A, p, q - 1, k)$
7 **senão** SELECT-ALEA $(A, q + 1, r, k - (q - p + 1))$

Consumo esperado de tempo?

Consumo de tempo esperado

Suponha $A[p \mathinner{..} r]$ permutação de $1 \mathinner{..} n$.

X_{ab} = número de comparações entre a e b na linha 4 do PARTICIONE do SELECT-ALEA.

Observe que X_{ab} não é a mesma de antes.

De novo, queremos calcular

$$
\begin{aligned}
X &= \text{total de comparações “}A[j] \leq x\text{”} \\
&= \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^{n} X_{ab}
\end{aligned}
$$

Consumo de tempo esperado

Vamos supor que $k = n$.
Supondo $a < b$,

$$X_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{se primeiro pivô em } \{a, \ldots, n\} \text{ é } a \text{ ou } b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Qual a probabilidade de X_{ab} valer 1?

Consumo de tempo esperado

Vamos supor que $k = n$.
Supondo $a < b$,

$$X_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{se primeiro pivô em } \{a, \ldots, n\} \text{ é } a \text{ ou } b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Qual a probabilidade de X_{ab} valer 1?

$$\text{Pr}\{X_{ab}{=}1\} \;=\; \frac{1}{n-a+1} + \frac{1}{n-a+1} \;=\; \mathrm{E}[X_{ab}]$$

Consumo de tempo esperado

Vamos supor que $k = n$.
Supondo $a < b$,

$$X_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{se primeiro pivô em } \{a, \ldots, n\} \text{ é } a \text{ ou } b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Qual a probabilidade de X_{ab} valer 1?

$$\Pr\{X_{ab}{=}1\} \;=\; \frac{1}{n-a+1} + \frac{1}{n-a+1} \;=\; \mathrm{E}[X_{ab}]$$

$$X = \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^{n} X_{ab}$$

$\mathrm{E}[X] =$????

Consumo de tempo esperado

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \sum_{a=1}^{n-1}\sum_{b=a+1}^{n} \mathrm{E}[X_{ab}] = \sum_{a=1}^{n-1}\sum_{b=a+1}^{n} \Pr\{X_{ab}{=}1\} \\
&= \sum_{a=1}^{n-1}\sum_{b=a+1}^{n} \frac{2}{n-a+1} \\
&= \sum_{a=1}^{n-1} \frac{2(n-a)}{n-a+1} \\
&< \sum_{a=1}^{n-1} 2 < 2n.
\end{aligned}
$$

Consumo de tempo esperado

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^{n} \mathrm{E}[X_{ab}] = \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^{n} \textsf{Pr}\{X_{ab}=1\} \\
&= \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^{n} \frac{2}{n-a+1} \\
&= \sum_{a=1}^{n-1} \frac{2(n-a)}{n-a+1} \\
&< \sum_{a=1}^{n-1} 2 < 2n.
\end{aligned}
$$

Exercício: Refaça os cálculos para um k arbitrário.

Uma análise diferente

Suponha $A[p \,.\,.\, r]$ permutação de $1 \,.\,.\, n$.

Seja

T_n = número de comparações realizadas em uma chamada do SELECT-ALEA para $n := r - p + 1$.

Uma análise diferente

Suponha $A[p \,.\,.\, r]$ permutação de $1 \,.\,.\, n$.

Seja

T_n = número de comparações realizadas em uma chamada do SELECT-ALEA para $n := r - p + 1$.

Observe que $T_1 = 0$ e

$$T_n \le \max\{T_{q'-1}, T_{n-q'}\} + n - 1 \text{ para } n \ge 2,$$

onde $q' = q - p + 1$.

Uma análise diferente

Suponha $A[p\,..\,r]$ permutação de $1\,..\,n$.

Seja

T_n = número de comparações realizadas em uma chamada do SELECT-ALEA para $n := r - p + 1$.

Observe que $T_1 = 0$ e

$$T_n \le \max\{T_{q'-1}, T_{n-q'}\} + n - 1 \text{ para } n \ge 2,$$

onde $q' = q - p + 1$.

Seja

$$X_h = \begin{cases} 1 & \text{se } \max\{k-1, n-k\} = h \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Temos que $T_n \le \sum_{h=1}^{n-1} X_h T_h + n - 1$.

Uma análise diferente

Note que

$$\mathrm{E}[X_h] = \Pr[X_h = 1] \leq \begin{cases} 0 & \text{se } h = 1, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor - 1 \\ \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Uma análise diferente

Note que

$$\mathrm{E}[X_h] = \Pr[X_h = 1] \le \begin{cases} 0 & \text{se } h = 1, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor - 1 \\ \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para $n \ge 2$, como $T_n \ \le \ \sum_{h=1}^{n-1} X_h T_h + n - 1$, temos que

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[T_n] &\le \sum_{h=1}^{n-1} \mathrm{E}[X_h T_h] + n - 1 \\ &= \sum_{h=1}^{n-1} \mathrm{E}[X_h]\mathrm{E}[T_h] + n - 1 \quad \text{pois } X_h \text{ e } T_h \text{ são indep.} \\ &\le \frac{2}{n} \sum_{h=a}^{n-1} \mathrm{E}[T_h] + n - 1 \quad \text{onde } a = \lfloor n/2 \rfloor \end{aligned}$$

Uma recorrêcia...

$\mathrm{E}[T_n]$ é da mesma classe $\mathrm{O}(\cdot)$ que a solução da seguinte recorrência:

$$\begin{aligned} S(1) &= 0, \quad \text{e} \\ S(n) &\leq \frac{2}{n}\sum_{h=a}^{n-1} S(h) + n - 1 \quad \text{para } n = 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Uma recorrêcia...

$\mathrm{E}[T_n]$ é da mesma classe $\mathrm{O}(\cdot)$
que a solução da seguinte recorrência:

$$
\begin{aligned}
S(1) &= 0, \quad \text{e} \\
S(n) &\leq \frac{2}{n}\sum_{h=a}^{n-1} S(h) + n - 1 \quad \text{para } n = 2, 3, \ldots
\end{aligned}
$$

Vamos verificar que $S(n) \leq 4n$.

$S(n) \leq 4n$ por indução em n

$S(1) = 0$ e $S(n) \leq \frac{2}{n} \sum_{h=a}^{n-1} S(h) + n - 1$ para $n = 2, 3, \ldots$

Se $n = 1$, temos que $S(1) = 0 < 4$.

$S(n) \leq 4n$ por indução em n

$S(1) = 0$ e $S(n) \leq \frac{2}{n}\sum_{h=a}^{n-1} S(h) + n - 1$ para $n = 2, 3, \ldots$

Se $n \geq 2$, então

$$S(n) \quad \leq \quad \frac{2}{n}\sum_{h=a}^{n-1} S(h) + n - 1 \ \leq \ \frac{2}{n}\sum_{h=a}^{n-1} 4h + n - 1$$

$S(n) \leq 4n$ por indução em n

$S(1) = 0$ e $S(n) \leq \frac{2}{n}\sum_{h=a}^{n-1} S(h) + n - 1$ para $n = 2, 3, \ldots$

Se $n \geq 2$, então

$$
\begin{aligned}
S(n) &\leq \frac{2}{n}\sum_{h=a}^{n-1} S(h) + n - 1 \;\leq\; \frac{2}{n}\sum_{h=a}^{n-1} 4h + n - 1 \\
&= \frac{8}{n}\Big(\sum_{h=1}^{n-1} h - \sum_{h=1}^{a-1} h\Big) + n - 1 \;=\; \frac{4}{n}(n(n-1) - a(a-1)) + n
\end{aligned}
$$

$S(n) \leq 4n$ por indução em n

$S(1) = 0$ e $S(n) \leq \frac{2}{n} \sum_{h=a}^{n-1} S(h) + n - 1$ para $n = 2, 3, \ldots$

Se $n \geq 2$, então

$$
\begin{aligned}
S(n) &\leq \frac{2}{n} \sum_{h=a}^{n-1} S(h) + n - 1 \leq \frac{2}{n} \sum_{h=a}^{n-1} 4h + n - 1 \\
&= \frac{8}{n} \Big(\sum_{h=1}^{n-1} h - \sum_{h=1}^{a-1} h \Big) + n - 1 = \frac{4}{n}(n(n-1) - a(a-1)) + n \\
&= 4(n-1) - \frac{4a(a-1)}{n} + n - 1
\end{aligned}
$$

$S(n) \leq 4n$ por indução em n

$S(1) = 0$ e $S(n) \leq \frac{2}{n}\sum_{h=a}^{n-1} S(h) + n - 1$ para $n = 2, 3, \ldots$

Se $n \geq 2$, então

$$
\begin{aligned}
S(n) &\leq \frac{2}{n}\sum_{h=a}^{n-1} S(h) + n - 1 \;\leq\; \frac{2}{n}\sum_{h=a}^{n-1} 4h + n - 1 \\
&= \frac{8}{n}\Big(\sum_{h=1}^{n-1} h - \sum_{h=1}^{a-1} h\Big) + n - 1 \;=\; \frac{4}{n}(n(n-1) - a(a-1)) + n \\
&= 4(n-1) - \frac{4a(a-1)}{n} + n - 1 \\
&\leq 4(n-1) - \frac{4(n-1)(n-3)}{4n} + n - 1
\end{aligned}
$$

$S(n) \leq 4n$ por indução em n

$S(1) = 0$ e $S(n) \leq \frac{2}{n}\sum_{h=a}^{n-1} S(h) + n - 1$ para $n = 2, 3, \ldots$

Se $n \geq 2$, então

$$
\begin{aligned}
S(n) &\leq \frac{2}{n}\sum_{h=a}^{n-1} S(h) + n - 1 \;\leq\; \frac{2}{n}\sum_{h=a}^{n-1} 4h + n - 1 \\
&= \frac{8}{n}\Big(\sum_{h=1}^{n-1} h - \sum_{h=1}^{a-1} h\Big) + n - 1 \;=\; \frac{4}{n}(n(n-1) - a(a-1)) + n \\
&\leq 4(n-1) - \frac{4(n-1)(n-3)}{4n} + n - 1 \\
&= 4(n-1) + \frac{(n-1)n - (n-1)(n-3)}{n}
\end{aligned}
$$

$S(n) \leq 4n$ por indução em n

$S(1) = 0$ e $S(n) \leq \frac{2}{n}\sum_{h=a}^{n-1} S(h) + n - 1$ para $n = 2, 3, \ldots$

Se $n \geq 2$, então

$$
\begin{aligned}
S(n) &\leq \frac{2}{n}\sum_{h=a}^{n-1} S(h) + n - 1 \ \leq \ \frac{2}{n}\sum_{h=a}^{n-1} 4h + n - 1 \\
&= \frac{8}{n}(\sum_{h=1}^{n-1} h - \sum_{h=1}^{a-1} h) + n - 1 \ = \ \frac{4}{n}(n(n-1) - a(a-1)) + n \\
&\leq 4(n-1) - \frac{4(n-1)(n-3)}{4n} + n - 1 \\
&= 4(n-1) + \frac{3(n-1)}{n}
\end{aligned}
$$

$S(n) \le 4n$ por indução em n

$S(1) = 0$ e $S(n) \le \frac{2}{n}\sum_{h=a}^{n-1} S(h) + n - 1$ para $n = 2, 3, \ldots$

Se $n \ge 2$, então

$$
\begin{aligned}
S(n) &\le \frac{2}{n}\sum_{h=a}^{n-1} S(h) + n - 1 \ \le\ \frac{2}{n}\sum_{h=a}^{n-1} 4h + n - 1 \\
&= \frac{8}{n}\Big(\sum_{h=1}^{n-1} h - \sum_{h=1}^{a-1} h\Big) + n - 1 \ =\ \frac{4}{n}(n(n-1) - a(a-1)) + n \\
&\le 4(n-1) - \frac{4(n-1)(n-3)}{4n} + n - 1 \\
&= 4(n-1) + \frac{3(n-1)}{n} \\
&< 4n - 4 + 3 \ <\ 4n.
\end{aligned}
$$

Conclusões

O consumo de tempo esperado do algoritmo SELECT-ALEA é $\mathrm{O}(n)$.