Análise de Algoritmos

Estes slides são adaptações de slides

do Prof. Paulo Feofiloff e do Prof. José Coelho de Pina.

i-ésimo menor elemento

CLRS 9

i-ésimo menor

Problema: Encontrar o i-ésimo menor elemento de $A[1\,..\,n]$.

Suponha $A[1\,..\,n]$ sem elementos repetidos.

Exemplo: 33 é o 4o. menor elemento de:

1									10	
22	99	32	88	34	**33**	11	97	55	66	A

1			4						10	
11	22	32	**33**	34	55	66	88	97	99	ordenado

Mediana

Mediana é o $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$-ésimo menor ou o $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$-ésimo menor elemento.

Exemplo: a mediana é 34 ou 55:

1									10	
22	99	32	88	**34**	33	11	97	**55**	66	A

1				5	6				10	
11	22	32	33	**34**	**55**	66	88	97	99	ordenado

i-ésimo menor

Recebe $A[1\,..\,n]$ e i tal que $1 \leq i \leq n$
e devolve valor do i-ésimo menor elemento de $A[1\,..\,n]$.

```
SELECT-ORD (A, n, i)
1    ORDENE (A, n)
2    devolva A[i]
```

O consumo de tempo do SELECT-ORD é $\Theta(n \lg n)$.

i-ésimo menor

Recebe $A[1\,..\,n]$ e i tal que $1 \leq i \leq n$
e devolve valor do i-ésimo menor elemento de $A[1\,..\,n]$.

```
SELECT-ORD (A, n, i)
1    ORDENE (A, n)
2    devolva A[i]
```

O consumo de tempo do SELECT-ORD é $\Theta(n \lg n)$.

Dá para fazer melhor?

Menor

Recebe um vetor $A[1\,..\,n]$ e devolve o valor do menor elemento.

```
MENOR (A, n)
1    menor ← A[1]
2    para k ← 2 até n faça
3         se A[k] < menor
4              então menor ← A[k]
5    devolva menor
```

O consumo de tempo do algoritmo MENOR é $\Theta(n)$.

Segundo menor

Recebe um vetor $A[1\,..\,n]$ e devolve o valor do segundo menor elemento, supondo $n \geq 2$.

SEG-MENOR (A, n)

```
menor ← min{A[1], A[2]}      segmenor ← max{A[1], A[2]}
para k ← 3 até n faça
      se A[k] < menor
            então segmenor ← menor
                  menor ← A[k]
      senão se A[k] < segmenor
            então segmenor ← A[k]
devolva segmenor
```

O consumo de tempo do SEG-MENOR é $\Theta(n)$.

Algoritmo linear?

Será que conseguimos fazer um algoritmo linear

- para a mediana?
- para o i-ésimo menor?

Algoritmo linear?

Será que conseguimos fazer um algoritmo linear

para a mediana?

para o i-ésimo menor?

Sim!

Usaremos o PARTICIONE do QUICKSORT!

Particione

Rearranja $A[p\,..\,r]$ de modo que $p \le q \le r$ e $A[p\,..\,q{-}1] \le A[q] < A[q{+}1\,..\,r]$

```
PARTICIONE (A, p, r)
    x ← A[r]                ▷ x é o "pivô"
    i ← p−1
    para j ← p até r − 1 faça
        se A[j] ≤ x
            então i ← i + 1
                  A[i] ↔ A[j]
    A[i+1] ↔ A[r]
    devolva i + 1
```

	p									r
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

Particione

Rearranja $A[p\,..\,r]$ de modo que $p \le q \le r$ e
$A[p\,..\,q{-}1] \le A[q] < A[q{+}1\,..\,r]$

```
PARTICIONE (A, p, r)
    x ← A[r]            ▷ x é o "pivô"
    i ← p−1
    para j ← p até r − 1 faça
        se A[j] ≤ x
            então i ← i + 1
                  A[i] ↔ A[j]
    A[i+1] ↔ A[r]
    devolva i + 1
```

	p				q					r
A	33	11	22	33	44	55	88	66	77	99

Particione

Rearranja $A[p\,..\,r]$ de modo que $p \leq q \leq r$ e $A[p\,..\,q{-}1] \leq A[q] < A[q{+}1\,..\,r]$

```
PARTICIONE (A, p, r)
1   x ← A[r]            ▷ x é o "pivô"
2   i ← p−1
3   para j ← p até r − 1 faça
4         se A[j] ≤ x
5               então i ← i + 1
6                     A[i] ↔ A[j]
7   A[i+1] ↔ A[r]
8   devolva i + 1
```

O algoritmo PARTICIONE consome tempo $\Theta(n)$.

Algoritmo SELECT

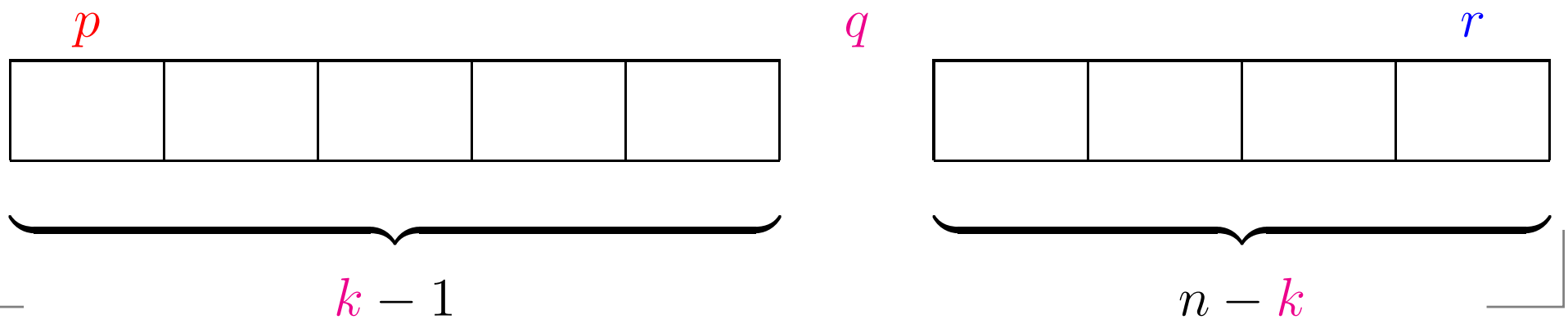
Recebe $A[p\,..\,r]$ e i tal que $1 \leq i \leq r-p+1$
e devolve valor do i-ésimo menor elemento de $A[p\,..\,r]$.

SELECT(A, p, r, i)

```
se p = r
        então devolva A[p]
q ← PARTICIONE (p, r)
k ← q − p + 1
se k = i
        então devolva A[q]
se k > i
        então devolva SELECT (A, p, q − 1, i)
        senão devolva SELECT (A, q + 1, r, i − k)
```

Algoritmo SELECT

```
SELECT(A, p, r, i)
    se p = r
        então devolva A[p]
    q ← PARTICIONE (A, p, r)
    k ← q − p + 1
    se k = i
        então devolva A[q]
    se k > i
        então devolva SELECT (A, p, q − 1, i)
        senão devolva SELECT (A, q + 1, r, i − k)
```



Consumo de tempo

$T(n) =$ consumo de tempo máximo quando $n = r - p + 1$

linha	consumo de todas as execuções da linha
1-2	$= \Theta(1)$
3	$= \Theta(n)$
4-7	$= \Theta(1)$
8	$= T(k-1)$
9	$= T(n-k)$

$$T(n) = \Theta(n) + \max\{T(k-1), T(n-k)\}$$

Consumo de tempo

$T(n) =$ consumo de tempo máximo quando $n = r - p + 1$

linha	consumo de todas as execuções da linha
1-2	$= \Theta(1)$
3	$= \Theta(n)$
4-7	$= \Theta(1)$
8	$= T(k-1)$
9	$= T(n-k)$

$$T(n) = \Theta(n) + \max\{T(k-1), T(n-k)\}$$

Pior caso: $T(n) = \Theta(n) + T(n-1)$

Consumo de tempo

$T(n) =$ consumo de tempo máximo quando $n = r - p + 1$

linha	consumo de todas as execuções da linha
1-2	$= \Theta(1)$
3	$= \Theta(n)$
4-7	$= \Theta(1)$
8	$= T(k-1)$
9	$= T(n-k)$

$$T(n) = \Theta(n) + \max\{T(k-1), T(n-k)\}$$

Pior caso: $T(n) = \Theta(n) + T(n-1) = \Theta(n^2)$

Seleção em tempo linear

Como fazer algo melhor?

Seleção em tempo linear

Como fazer algo melhor?

Vamos usar de novo divisão e conquista.

Veremos o algoritmo BFPRT,
de Blum, Floyd, Pratt, Rivest e Tarjan.

Seleção em tempo linear

Como fazer algo melhor?

Vamos usar de novo divisão e conquista.

Veremos o algoritmo BFPRT,
de Blum, Floyd, Pratt, Rivest e Tarjan.

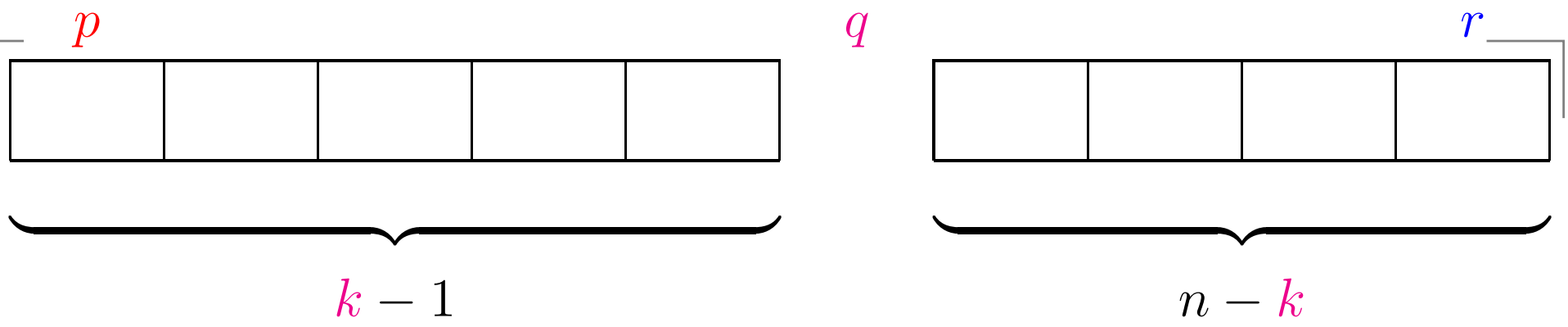
Se o pivô do PARTICIONE for a mediana do vetor,
qual seria o consumo de tempo do SELECT?

Select-BFPRT

Recebe $A[p\,..\,r]$ e i tal que $1 \leq i \leq r-p+1$
e devolve um índice q tal que $A[q]$ é o i-ésimo menor elemento de $A[p\,..\,r]$

```
SELECT-BFPRT(A, p, r, i)
    se p = r
        então devolva p        ▷ p e não A[p]
    q ← PARTICIONE-BFPRT (A, p, r)
    k ← q − p + 1
    se k = i
        então devolva q        ▷ q e não A[q]
    se k > i
        então devolva SELECT-BFPRT (A, p, q − 1, i)
        senão devolva SELECT-BFPRT (A, q + 1, r, i − k)
```

Particione-BFPRT



Rearranja $A[p\,..\,r]$ e devolve um índice q, $p \le q \le r$, tal que $A[p\,..\,q{-}1] \le A[q] < A[q{+}1\,..\,r]$ **e**

$$\max\{k-1, n-k\} \le \frac{7n}{10} + 3,$$

onde $n = r - p + 1$ e $k = q - p + 1$.

Suponha que

$P(n) :=$ consumo de tempo máximo do algoritmo PARTICIONE-BFPRT quando $n = r - p + 1$

Consumo de tempo

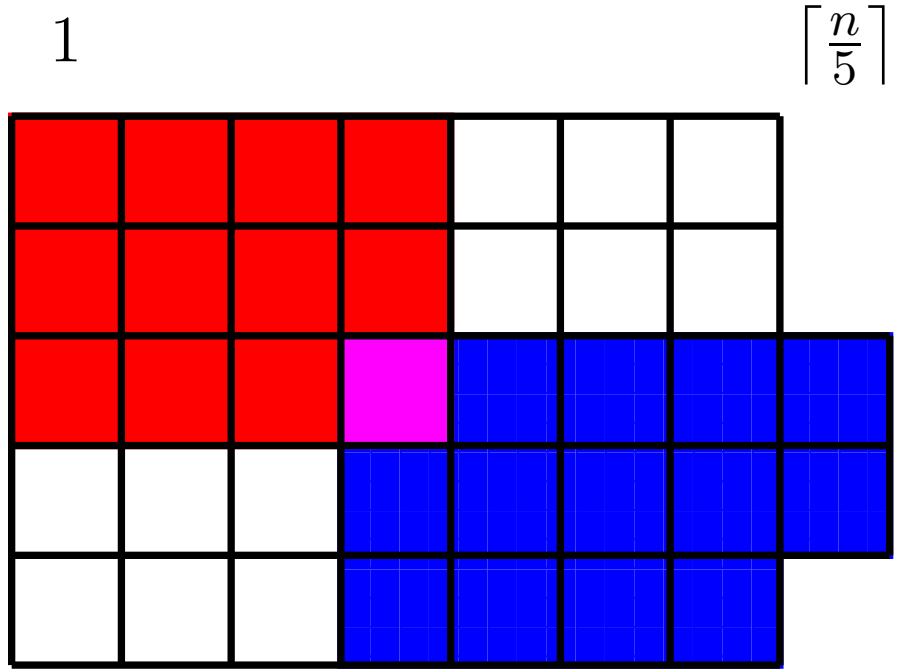
$T(n) :=$ consumo de tempo máximo do algoritmo SELECT-BFPRT quando $n = r - p + 1$

linha	consumo de todas as execuções da linha
1-2	$= \Theta(1)$
3	$= P(n)$
4-7	$= \Theta(1)$
8	$= T(k-1)$
9	$= T(n-k)$

$$T(n) = \Theta(1) + P(n) + \max\{T(k-1), T(n-k)\}$$

$$\leq \Theta(1) + P(n) + T(\lceil \tfrac{7n}{10} \rceil + 3)$$

Particione-BFPRT



$$\max\{k-1, n-k\} \leq n - \left(3\left\lceil \frac{1}{2}\left\lceil \frac{n}{5}\right\rceil\right\rceil - 3\right)$$

$$\leq n - \left(\frac{3n}{10} - 3\right) = \frac{7n}{10} + 3$$

Particione-BFPRT

$n := r - p + 1$

PARTICIONE-BFPRT (A, p, r)

para $j \leftarrow p, p{+}5, p{+}5 \cdot 2, \ldots$ **até** $p{+}5(\lceil n/5 \rceil{-}1)$ **faça**
    ORDENE $(A, j, j{+}4)$
ORDENE $(A, p{+}5\lfloor n/5 \rfloor, r)$

para $j \leftarrow 1$ **até** $\lceil n/5 \rceil{-}1$ **faça**
    $B[j] \leftarrow A[p{+}5j{-}3]$
$B[\lceil n/5 \rceil] \leftarrow A[\lfloor (p{+}5\lfloor n/5 \rfloor{+}r)/2 \rfloor]$

$k \leftarrow$ SELECT-BFPRT$(B, 1, \lceil n/5 \rceil, \lfloor (\lceil n/5 \rceil{+}1)/2 \rfloor)$

$A[k] \leftrightarrow A[r]$
devolva PARTICIONE (A, p, r)

Particione-BFPRT

$n := r - p + 1$

PARTICIONE-BFPRT (A, p, r)

para $j \leftarrow p, p{+}5, p{+}5 \cdot 2, \ldots$ **até** $p{+}5(\lceil n/5 \rceil{-}1)$ **faça**
    ORDENE $(A, j, j{+}4)$
ORDENE $(A, p{+}5\lfloor n/5 \rfloor, r)$

para $j \leftarrow 1$ **até** $\lceil n/5 \rceil{-}1$ **faça**
    $A[p{-}1{+}j] \leftrightarrow A[p{+}5j{-}3]$
$A[p{-}1{+}\lceil n/5 \rceil] \leftrightarrow A[\lfloor (p{+}5\lfloor n/5 \rfloor{+}r)/2 \rfloor]$

$k \leftarrow$ SELECT-BFPRT$(A, p, p{+}\lceil n/5 \rceil{-}1, \lfloor (\lceil n/5 \rceil{+}1)/2 \rfloor)$

$A[k] \leftrightarrow A[r]$
devolva PARTICIONE (A, p, r)

Consumo de tempo do Particione-BFPRT

$P(n) :=$ consumo de tempo máximo do algoritmo PARTICIONE-BFPRT quando $n = r - p + 1$

linha	consumo de todas as execuções da linha
1-3	$= \lceil n/5 \rceil \, \Theta(1) \;=\; \Theta(n)$
4-6	$= \lceil n/5 \rceil \, \Theta(1) \;=\; \Theta(n)$
7	$= T(\lceil n/5 \rceil)$
8	$= \Theta(1)$
9	$= \Theta(n)$

$$P(n) = \Theta(n) + T(\lceil n/5 \rceil)$$

Consumo de tempo do Select-BFPRT

$T(n) :=$ consumo de tempo máximo do algoritmo SELECT-BFPRT quando $n = r - p + 1$

Temos que

$$T(1) = \Theta(1)$$

$$\begin{aligned} T(n) &\leq \Theta(1) + P(n) + T\left(\left\lceil \frac{7n}{10} \right\rceil + 3\right) \\ &\leq \Theta(1) + \Theta(n) + T\left(\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil\right) + T\left(\left\lceil \frac{7n}{10} \right\rceil + 3\right) \\ &= \Theta(n) + T\left(\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil\right) + T\left(\left\lceil \frac{7n}{10} \right\rceil + 3\right) \end{aligned}$$

para $n = 2, 3, \ldots$,

Consumo de tempo do Select-BFPRT

$T(n)$ pertence a mesma classe O que:

$$S(n) = 1 \quad \text{para } n < 30$$

$$S(n) \leq S\left(\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil\right) + S\left(\left\lceil \frac{7n}{10} \right\rceil + 3\right) + n \quad \text{para } n \geq 30$$

n	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300
$S(n)$	32	144	280	362	514	640	802	940	1114	1261

Vamos verificar que $S(n) < 80\,n$ para $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

Prova: Se $n = 1, \ldots, 29$, então $S(n) = 1 < 80 < 80n$.
Se $n = 30, \ldots, 99$, então

$$S(n) < S(120) = 362 < 80 \times 30 \leq 80n.$$

Recorrência

Se $n \geq 100$, então

$$
\begin{aligned}
S(n) &\leq S\left(\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil\right) + S\left(\left\lceil \frac{7n}{10} \right\rceil + 3\right) + n \\
&\overset{\text{hi}}{<} 80\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil + 80\left(\left\lceil \frac{7n}{10} \right\rceil + 3\right) + n \\
&\leq 80\left(\frac{n}{5} + 1\right) + 80\left(\frac{7n}{10} + 4\right) + n \\
&= 80\frac{n}{5} + 80 + 80\frac{7n}{10} + 320 + n \\
&= 16n + 56n + n + 400 \\
&= 73n + 400 \\
&< 80n \quad \text{(pois } n \geq 100\text{)}.
\end{aligned}
$$

Logo, $T(n)$ é $\mathrm{O}(n)$.

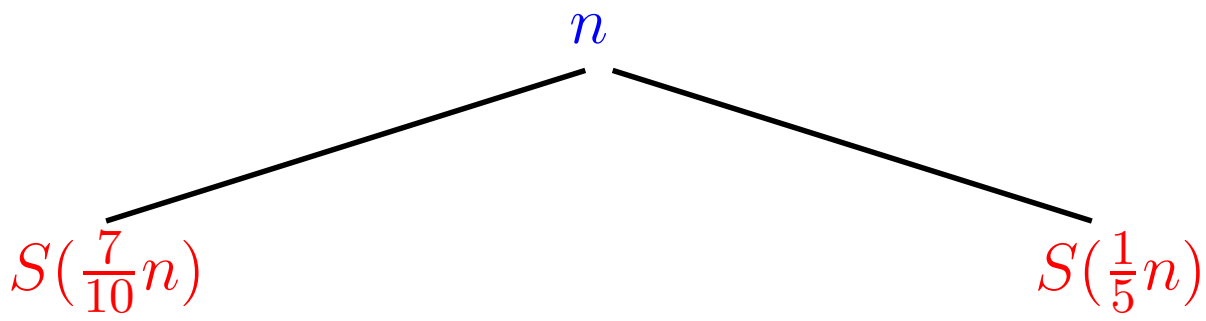
Como adivinhei classe O?

Árvore da recorrência:

$$S(n)$$

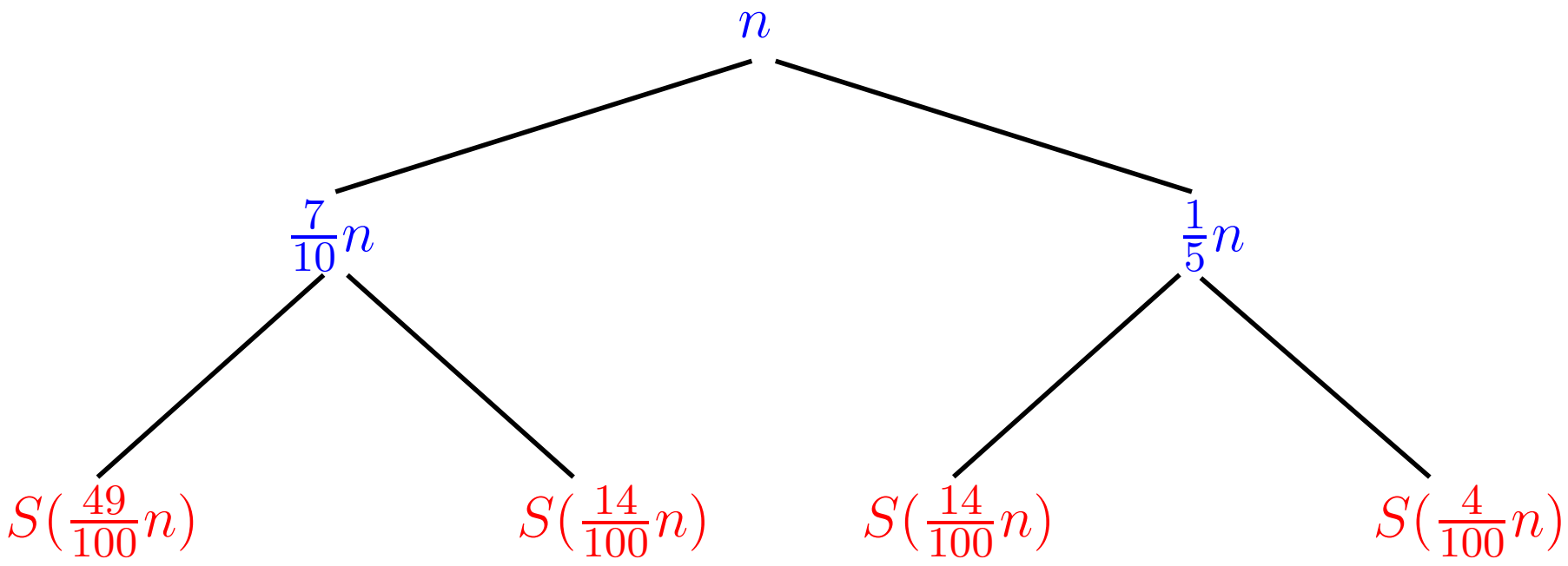
Como adivinhei classe O?

Árvore da recorrência:



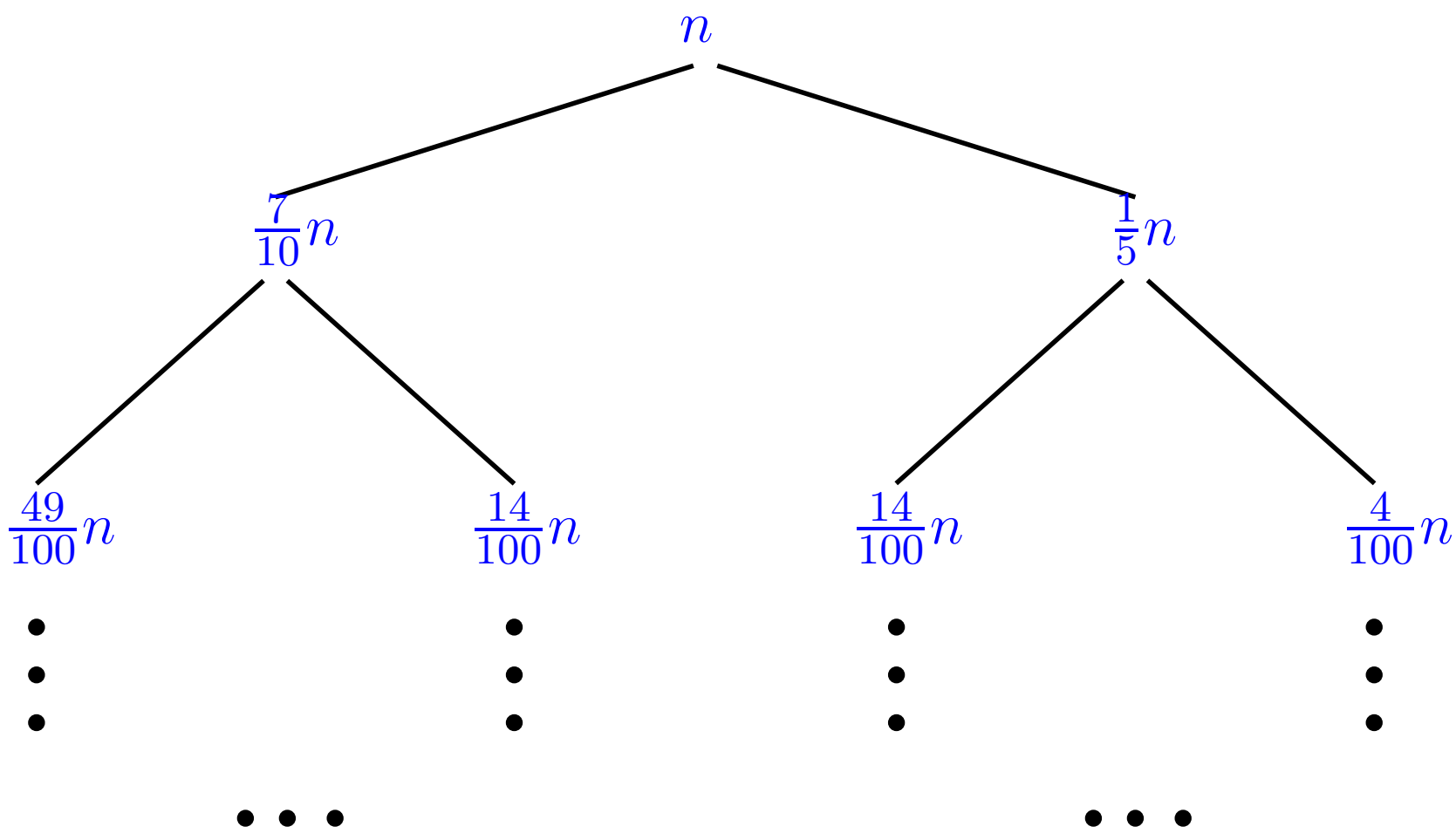
Como adivinhei classe O?

Árvore da recorrência:



Como adivinhei classe O?

Árvore da recorrência:



Contas

nível	0	1	2	$\ldots$	$k-1$	k
soma	n	$\frac{9}{10}n$	$\frac{9^2}{10^2}n$	$\ldots$	$\frac{9^{k-1}}{10^{k-1}}n$	$\frac{9^k}{10^k}n$

$$\frac{10^{k-1}}{9^{k-1}} < n \leq \frac{10^k}{9^k} \Rightarrow k = \lceil \log_{\frac{10}{9}} n \rceil$$

$$\begin{aligned} S(n) &= n + \frac{9}{10}n + \cdots + \frac{9^{k-1}}{10^{k-1}}n + \frac{9^k}{10^k}n \\ &= (1 + \frac{9}{10} + \cdots + \frac{9^k}{10^k})n \\ &= 10(1 - \frac{9^{k+1}}{10^{k+1}})n \\ &< 10n \end{aligned}$$

Conclusão

O consumo de tempo do SELECT-BFPRT é $\mathrm{O}(n)$.