# Análise de Algoritmos

**Estes slides são adaptações de slides**

**do Prof. Paulo Feofiloff e do Prof. José Coelho de Pina.**

# Multiplicação de inteiros gigantescos

$n :=$ número de algarismos.

Problema: Dados dois números inteiros $X[1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n]$ calcular o produto $X \cdot Y$.

Entra: Exemplo com $n = 12$

| | 12 | | | | | | | | | | | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 9 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 4 | 5 | 6 | 2 | 9 | 8 |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y$ | 0 | 6 | 3 | 2 | 8 | 4 | 9 | 9 | 3 | 8 | 4 | 4 |

# Multiplicação de inteiros gigantescos

$n :=$ número de algarismos.

Problema: Dados dois números inteiros $X[1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n]$ calcular o produto $X \cdot Y$.

Entra: Exemplo com $n = 12$

| | 12 | | | | | | | | | | | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 9 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 4 | 5 | 6 | 2 | 9 | 8 |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y$ | 0 | 6 | 3 | 2 | 8 | 4 | 9 | 9 | 3 | 8 | 4 | 4 |

Sai:

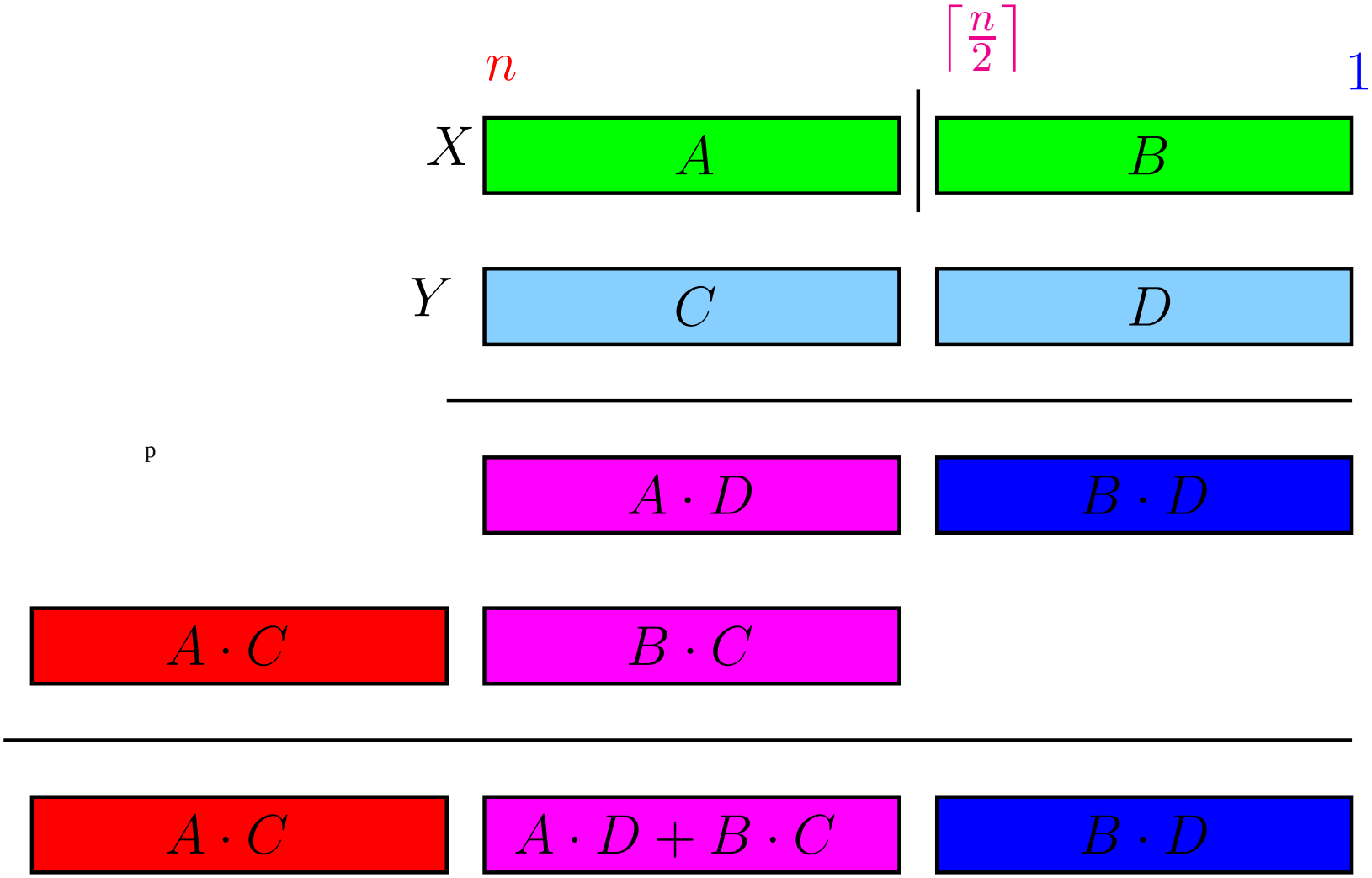
| 23 | | | | | | | | | | $X \cdot Y$ | | | | | | | | | | | | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 8 | 4 | 4 | 0 | 8 | 7 | 2 | 8 | 6 | 7 | 0 | 2 | 7 | 1 | 4 | 1 | 0 | 2 | 9 | 5 | 1 | 2 |

# Algoritmo do ensino fundamental

```
                                    * * * * * * * *
                                  × * * * * * * * *
                                  ---------------
                                    * * * * * * * *
                                  * * * * * * * *
                                * * * * * * * *
                              * * * * * * * *
                            * * * * * * * *
                          * * * * * * * *
                        * * * * * * * *
                      * * * * * * * *
                    * * * * * * * *
                  * * * * * * * *
                ---------------------------------
                * * * * * * * * * * * * * * * * *
```

O algoritmo do ensino fundamental é $\Theta(n^2)$.

# Divisão e conquista




$$X \cdot Y = A \cdot C \times 10^{n} + (A \cdot D + B \cdot C) \times 10^{\lceil n/2 \rceil} + B \cdot D$$

# Exemplo

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 4 | | 1 | | | 4 | | 1 |
| $X$ | 3 | 1 | 4 | 1 | | $Y$ | 5 | 9 | 3 | 6 |

# Exemplo

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 4 | | | 1 | | | 4 | | | 1 |
| $X$ | | 3 | 1 | 4 | 1 | $Y$ | | 5 | 9 | 3 | 6 |

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 3 | 1 | $B$ | 4 | 1 | $C$ | 5 | 9 | $D$ | 3 | 6 |

# Exemplo

| | 4 | | | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $X$ | 3 | 1 | 4 | 1 |

| | 4 | | | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $Y$ | 5 | 9 | 3 | 6 |

| | | |
|---|---|---|
| $A$ | 3 | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| $B$ | 4 | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| $C$ | 5 | 9 |

| | | |
|---|---|---|
| $D$ | 3 | 6 |

$$X \cdot Y = A \cdot C \times 10^4 + (A \cdot D + B \cdot C) \times 10^2 + B \cdot D$$

$A \cdot C = 1829$ $\qquad$ $(A \cdot D + B \cdot C) = 1116 + 2419 = 3535$

$B \cdot D = 1476$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A \cdot C$ | 1 | 8 | 2 | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $(A \cdot D + B \cdot C)$ | | | 3 | 5 | 3 | 5 | 0 | 0 |
| $B \cdot D$ | | | | | 1 | 4 | 7 | 6 |
| $X \cdot Y =$ | 1 | 8 | 6 | 4 | 4 | 9 | 7 | 6 |

# Algoritmo de Multi-DC

Algoritmo recebe inteiros $X[1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n]$ e devolve $X \cdot Y$.

MULT $(X, Y, n)$

1 **se** $n = 1$ **devolva** $X \cdot Y$
2 $q \leftarrow \lceil n/2 \rceil$
3 $A \leftarrow X[q+1\,..\,n] \qquad B \leftarrow X[1\,..\,q]$
4 $C \leftarrow Y[q+1\,..\,n] \qquad D \leftarrow Y[1\,..\,q]$
5 $E \leftarrow$ MULT$(A, C, \lfloor n/2 \rfloor)$
6 $F \leftarrow$ MULT$(B, D, \lceil n/2 \rceil)$
7 $G \leftarrow$ MULT$(A, D, \lceil n/2 \rceil)$
8 $H \leftarrow$ MULT$(B, C, \lceil n/2 \rceil)$
9 $R \leftarrow E \times 10^n + (G + H) \times 10^{\lceil n/2 \rceil} + F$
10 **devolva** $R$

$T(n) =$ consumo de tempo do algoritmo para multiplicar dois inteiros com $n$ algarismos.

# Consumo de tempo

| linha | | todas as execuções da linha |
|---|---|---|
| 1 | $=$ | $\Theta(1)$ |
| 2 | $=$ | $\Theta(1)$ |
| 3 | $=$ | $\Theta(n)$ |
| 4 | $=$ | $\Theta(n)$ |
| 5 | $=$ | $T(\lfloor n/2 \rfloor)$ |
| 6 | $=$ | $T(\lceil n/2 \rceil)$ |
| 7 | $=$ | $T(\lceil n/2 \rceil)$ |
| 8 | $=$ | $T(\lceil n/2 \rceil)$ |
| 9 | $=$ | $\Theta(n)$ |
| 10 | $=$ | $\Theta(n)$ |
| total | $=$ | $T(\lfloor n/2 \rfloor) + 3\,T(\lceil n/2 \rceil) + \Theta(n)$ |

# Consumo de tempo

Sabemos que

$$\begin{aligned} T(1) &= \Theta(1) \\ T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + 3\,T(\lceil n/2 \rceil) + \Theta(n) \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots \end{aligned}$$

está na mesma classe $\Theta$ que a solução de

$$T'(n) = 4T'(n/2) + n$$

| $n$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T'(n)$ | 1 | 6 | 28 | 120 | 496 | 2016 | 8128 | 32640 | 130816 | 523776 |

# Conclusões

$T'(n)$ é $\Theta(n^2)$.

$T(n)$ é $\Theta(n^2)$.

O consumo de tempo do algoritmo MULT é $\Theta(n^2)$.

Tanto trabalho por nada . . .
Será?!?

# Pensar pequeno

Olhar para números com 2 algarismos ($n$=2).

Suponha $X = a\,b$ e $Y = c\,d$.
Se cada multiplicação custa R$ 1,00 e
cada soma custa R$ 0,01, quanto custa $X \cdot Y$?

# Pensar pequeno

Olhar para números com 2 algarismos ($n$=2).

Suponha $X = a\,b$ e $Y = c\,d$.
Se cada multiplicação custa R$ 1,00 e
cada soma custa R$ 0,01, quanto custa $X \cdot Y$?
Eis $X \cdot Y$ por R$ 4,03:

$$
\begin{array}{lccc}
X & & a & b \\
Y & & c & d \\
\hline
 & & ad & bd \\
 & ac & bc & \\
\hline
X \cdot Y & ac & ad + bc & bd
\end{array}
$$

$$X \cdot Y = ac \times 10^2 + (ad + bc) \times 10^1 + bd$$

# Pensar pequeno

Olhar para números com 2 algarismos ($n$=2).

Suponha $X = a\,b$ e $Y = c\,d$.
Se cada multiplicação custa R$ 1,00 e
cada soma custa R$ 0,01, quanto custa $X \cdot Y$?
Eis $X \cdot Y$ por R$ 4,03:

$$
\begin{array}{lccc}
X & & a & b \\
Y & & c & d \\
\hline
 & & ad & bd \\
 & ac & bc & \\
\hline
X \cdot Y & ac & ad + bc & bd
\end{array}
$$

$$X \cdot Y = ac \times 10^2 + (ad + bc) \times 10^1 + bd$$

Solução mais barata?

# Pensar pequeno

Olhar para números com 2 algarismos ($n$=2).

Suponha $X = a\,b$ e $Y = c\,d$.
Se cada multiplicação custa R$ 1,00 e
cada soma custa R$ 0,01, quanto custa $X \cdot Y$?
Eis $X \cdot Y$ por R$ 4,03:

$$
\begin{array}{lccc}
X & & a & b \\
Y & & c & d \\
\hline
 & & ad & bd \\
 & ac & bc & \\
\hline
X \cdot Y & ac & ad + bc & bd
\end{array}
$$

$$X \cdot Y = ac \times 10^2 + (ad + bc) \times 10^1 + bd$$

Solução mais barata?
Gauss faz por R$ 3,06!

# $X \cdot Y$ por apenas R$ 3,06

| | | | |
|---|---|---|---|
| $X$ | | $a$ | $b$ |
| $Y$ | | $c$ | $d$ |
| | | $ad$ | $bd$ |
| | $ac$ | $bc$ | |
| $X \cdot Y$ | $ac$ | $ad + bc$ | $bd$ |

# $X \cdot Y$ por apenas R$ 3,06

| | | | |
|---|---|---|---|
| $X$ | | $a$ | $b$ |
| $Y$ | | $c$ | $d$ |
| | | $ad$ | $bd$ |
| | $ac$ | $bc$ | |
| $X \cdot Y$ | $ac$ | $ad + bc$ | $bd$ |

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd \Rightarrow$$
$$ad + bc = (a+b)(c+d) - ac - bd$$

$$g = (a+b)(c+d) \qquad e = ac \qquad f = bd \qquad h = g - e - f$$

$$X \cdot Y \text{ (por R\$ 3,06)} = e \times 10^2 + h \times 10^1 + f$$

# Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = ?$$

$$ac = ? \qquad bd = ? \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

# Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = ?$$
$$ac = ? \quad bd = ? \quad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 21 \quad Y = 23 \qquad X \cdot Y = ?$$
$$ac = ? \quad bd = ? \quad (a+b)(c+d) = ?$$

# Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = ?$$
$$ac = ? \qquad bd = ? \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 21 \quad Y = 23 \qquad X \cdot Y = ?$$
$$ac = ? \qquad bd = ? \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 2 \quad Y = 2 \quad X \cdot Y = 4$$

# Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = ?$$
$$ac = ? \quad bd = ? \quad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 21 \quad Y = 23 \qquad X \cdot Y = ?$$
$$ac = 4 \quad bd = ? \quad (a+b)(c+d) = ?$$

# Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = ?$$
$$ac = ? \qquad bd = ? \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 21 \quad Y = 23 \qquad X \cdot Y = ?$$
$$ac = 4 \qquad bd = ? \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 1 \quad Y = 3 \quad X \cdot Y = 3$$

# Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = ?$$
$$ac = ? \quad bd = ? \quad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 21 \quad Y = 23 \qquad X \cdot Y = ?$$
$$ac = 4 \quad bd = 3 \quad (a+b)(c+d) = ?$$

# Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = ?$$
$$ac = ? \qquad bd = ? \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 21 \quad Y = 23 \qquad X \cdot Y = ?$$
$$ac = 4 \qquad bd = 3 \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 3 \quad Y = 5 \quad X \cdot Y = 15$$

# Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = ?$$
$$ac = ? \quad bd = ? \quad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 21 \quad Y = 23 \qquad X \cdot Y = 483$$
$$ac = 4 \quad bd = 3 \quad (a+b)(c+d) = 15$$

# Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = ?$$

$$ac = 483 \quad bd = ? \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

# Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = ?$$
$$ac = 483 \quad bd = ? \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 33 \quad Y = 12 \qquad X \cdot Y = ?$$
$$ac = ? \quad bd = ? \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

# Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = ?$$
$$ac = 483 \quad bd = ? \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 33 \quad Y = 12 \qquad X \cdot Y = 396$$
$$ac = 3 \quad bd = 6 \qquad (a+b)(c+d) = 18$$

# Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = ?$$

$$ac = 483 \quad bd = 396 \quad (a+b)(c+d) = ?$$

# Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = ?$$
$$ac = 483 \quad bd = 396 \quad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 54 \quad Y = 35 \qquad X \cdot Y = ?$$
$$ac = ? \quad bd = ? \quad (a+b)(c+d) = ?$$

# Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = ?$$
$$ac = 483 \quad bd = 396 \quad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 54 \quad Y = 35 \qquad X \cdot Y = 1890$$
$$ac = 15 \quad bd = 20 \quad (a+b)(c+d) = 72$$

# Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = ?$$

$$ac = 483 \quad bd = 396 \quad (a+b)(c+d) = 1890$$

# Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = 4931496$$

$$ac = 483 \quad bd = 396 \quad (a+b)(c+d) = 1890$$

# Algoritmo Multi

Algoritmo recebe inteiros $X[1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n]$ e devolve $X \cdot Y$ (Karatsuba e Ofman).

KARATSUBA $(X, Y, n)$

1 **se** $n \leq 3$ **devolva** $X \cdot Y$
2 $q \leftarrow \lceil n/2 \rceil$
3 $A \leftarrow X[q+1\,..\,n] \qquad B \leftarrow X[1\,..\,q]$
4 $C \leftarrow Y[q+1\,..\,n] \qquad D \leftarrow Y[1\,..\,q]$
5 $E \leftarrow$ KARATSUBA$(A, C, \lfloor n/2 \rfloor)$
6 $F \leftarrow$ KARATSUBA$(B, D, \lceil n/2 \rceil)$
7 $G \leftarrow$ KARATSUBA$(A+B, C+D, \lceil n/2 \rceil + 1)$
8 $H \leftarrow G - F - E$
9 $R \leftarrow E \times 10^n + H \times 10^{\lceil n/2 \rceil} + F$
10 **devolva** $R$

$T(n) =$ consumo de tempo do algoritmo para multiplicar dois inteiros com $n$ algarismos.

# Consumo de tempo

| linha | | todas as execuções da linha |
|---|---|---|
| 1 | $=$ | $\Theta(1)$ |
| 2 | $=$ | $\Theta(1)$ |
| 3 | $=$ | $\Theta(n)$ |
| 4 | $=$ | $\Theta(n)$ |
| 5 | $=$ | $T(\lfloor n/2 \rfloor)$ |
| 6 | $=$ | $T(\lceil n/2 \rceil)$ |
| 7 | $=$ | $T(\lceil n/2 \rceil + 1)$ |
| 8 | $=$ | $\Theta(n)$ |
| 9 | $=$ | $\Theta(n)$ |
| 10 | $=$ | $\Theta(n)$ |
| total | $=$ | $T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lceil n/2 \rceil + 1) + \Theta(n)$ |

# Consumo de tempo

Sabemos que

$$
\begin{aligned}
T(n) &= \Theta(1) \quad \text{para } n = 1, 2, 3 \\
T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lceil n/2 \rceil + 1) + \Theta(n) \quad n \geq 4
\end{aligned}
$$

está na mesma classe $\Theta$ que a solução de

$$T'(n) = 3T'(n/2) + n$$

| $n$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T'(n)$ | 1 | 5 | 19 | 65 | 211 | 665 | 2059 | 6305 | 19171 | 58025 |

# Conclusões

$T'(n)$ é $\Theta(n^{\lg 3})$.

Logo $T(n)$ é $\Theta(n^{\lg 3})$.

O consumo de tempo do algoritmo KARATSUBA é $\Theta(n^{\lg 3})$ $(1{,}584 < \lg 3 < 1{,}585)$.

# Mais conclusões

Consumo de tempo de
algoritmos para multiplicação de inteiros:

| | |
|---|---|
| Jardim de infância | $\Theta(n\,10^n)$ |
| Ensino fundamental | $\Theta(n^2)$ |
| Karatsuba e Ofman'60 | $\mathrm{O}(n^{1.585})$ |
| Toom e Cook'63 | $\mathrm{O}(n^{1.465})$ |
| (divisão e conquista; generaliza o acima) | |
| Schönhage e Strassen'71 | $\mathrm{O}(n \lg n \lg \lg n)$ |
| (FFT em aneis de tamanho específico) | |
| Fürer'07 | $\mathrm{O}(n \lg n\, 2^{\mathrm{O}(\log^* n)})$ |

# Ambiente experimental

A plataforma utilizada nos experimentos é um PC rodando Linux Debian ?.? com um processador Pentium II de 233 MHz e 128MB de memória RAM .

Os códigos estão compilados com o gcc versão 2.7.2.1 e opção de compilação -O2.

As implementações comparadas neste experimento são as do algoritmo do ensino fundamental e do algoritmo KARATSUBA.

O programa foi escrito por Carl Burch:

`http://www-2.cs.cmu.edu/~cburch/251/karat/.`

# Resultados experimentais

| $n$ | Ensino Fund. | KARATSUBA |
|---|---|---|
| 4 | 0.005662 | 0.005815 |
| 8 | 0.010141 | 0.010600 |
| 16 | 0.020406 | 0.023643 |
| 32 | 0.051744 | 0.060335 |
| 64 | 0.155788 | 0.165563 |
| 128 | 0.532198 | 0.470810 |
| 256 | 1.941748 | 1.369863 |
| 512 | 7.352941 | 4.032258 |

Tempos em $10^3$ segundos.

# Multiplicação de matrizes

Problema: Dadas duas matrizes $X[1\,..\,n, 1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n, 1\,..\,n]$ calcular o produto $X \cdot Y$.

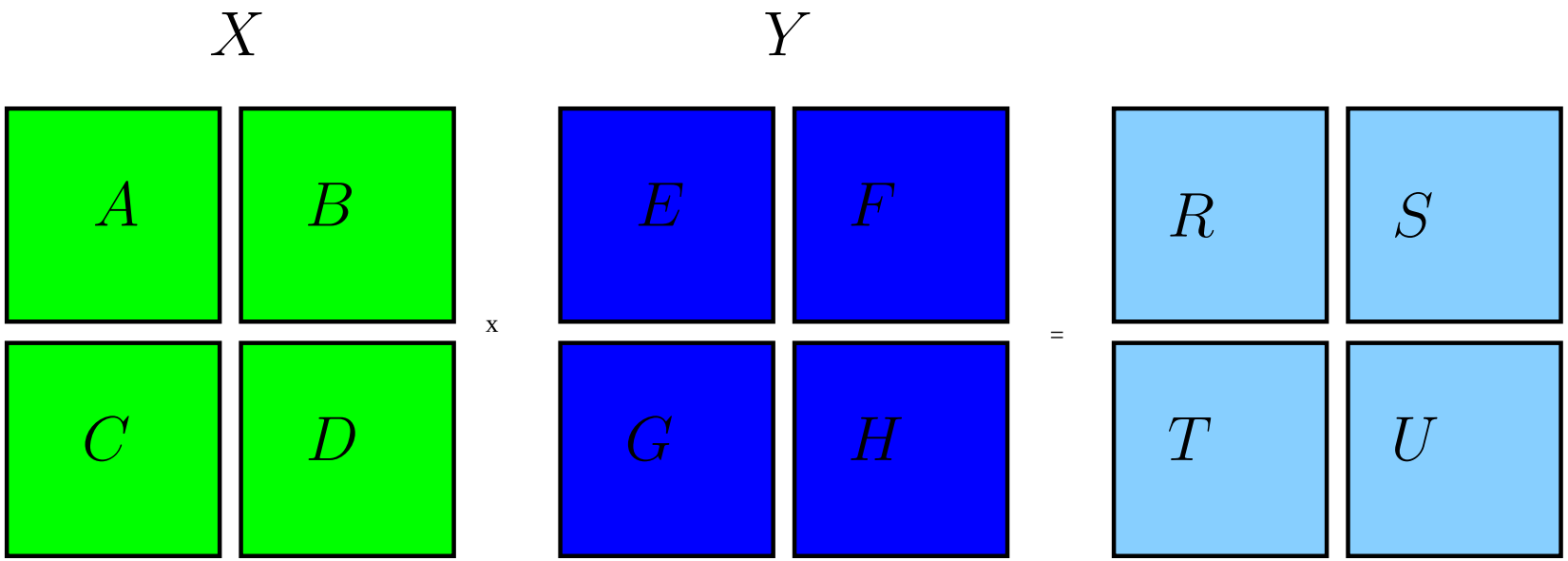
O algoritmo tradicional de multiplicação de matrizes consome tempo $\Theta(n^3)$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} r &= ae + bg \\ s &= af + bh \\ t &= ce + dg \\ u &= cf + dh \end{aligned} \tag{1}$$

Solução custa R$ 8,04

# Divisão e conquista




$$
\begin{aligned}
R &= AE + BG \\
S &= AF + BH \\
T &= CE + DG \\
U &= CF + DH
\end{aligned}
\tag{2}
$$

# Algoritmo de Multi-Mat

Algoritmo recebe inteiros $X[1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n]$ e devolve $X \cdot Y$.

MULTI-M $(X, Y, n)$

1 **se** $n = 1$ **devolva** $X \cdot Y$
2 $(A, B, C, D) \leftarrow$ PARTICIONE$(X, n)$
3 $(E, F, G, H) \leftarrow$ PARTICIONE$(Y, n)$
4 $R \leftarrow$ MULTI-M$(A, E, n/2) +$ MULTI-M$(B, G, n/2)$
5 $S \leftarrow$ MULTI-M$(A, F, n/2) +$ MULTI-M$(B, H, n/2)$
6 $T \leftarrow$ MULTI-M$(C, E, n/2) +$ MULTI-M$(D, G, n/2)$
7 $U \leftarrow$ MULTI-M$(C, F, n/2) +$ MULTI-M$(D, H, n/2)$
8 $P \leftarrow$ CONSTRÓI-MAT$(R, S, T, U)$
9 **devolva** $P$

$T(n) =$ consumo de tempo do algoritmo para multiplicar duas matrizes de $n$ linhas e $n$ colunas.

# Consumo de tempo

| linha | | todas as execuções da linha |
|---|---|---|
| 1 | $=$ | $\Theta(1)$ |
| 2 | $=$ | $\Theta(n^2)$ |
| 3 | $=$ | $\Theta(n^2)$ |
| 4 | $=$ | $T(n/2) + T(n/2)$ |
| 5 | $=$ | $T(n/2) + T(n/2)$ |
| 6 | $=$ | $T(n/2) + T(n/2)$ |
| 7 | $=$ | $T(n/2) + T(n/2)$ |
| 8 | $=$ | $\Theta(n^2)$ |
| 9 | $=$ | $\Theta(n^2)$ |
| total | $=$ | $8\,T(n/2) + \Theta(n^2)$ |

# Consumo de tempo

As dicas no nosso estudo de recorrências sugere que a solução da recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= \Theta(1) \\ T(n) &= 8\,T(n/2) + \Theta(n^2) \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots \end{aligned}$$

está na mesma classe $\Theta$ que a solução de

$$T'(n) = 8T'(n/2) + n^2$$

| $n$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T'(n)$ | 1 | 12 | 112 | 960 | 7936 | 64512 | 520192 | 4177920 | 33488896 |

# Conclusões

$T'(n)$ é $\Theta(n^3)$.

Logo $T(n)$ é $\Theta(n^3)$.

O consumo de tempo do algoritmo MULTI-M é $\Theta(n^3)$.

# Strassen: $X \cdot Y$ por apenas R$ 7,18

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

# Strassen: $X \cdot Y$ por apenas R$ 7,18

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
p_1 &= a(f-h) = af - ah \\
p_2 &= (a+b)h = ah + bh \\
p_3 &= (c+d)e = ce + de \\
p_4 &= d(g-e) = dg - de \\
p_5 &= (a+d)(e+h) = ae + ah + de + dh \\
p_6 &= (b-d)(g+h) = bg + bh - dg - dh \\
p_7 &= (a-c)(e+f) = ae + af - ce - cf
\end{aligned} \tag{4}$$

# Strassen: $X \cdot Y$ por apenas R$ 7,18

$$p_1 = a(f - h) = af - ah$$

$$p_2 = (a + b)h = ah + bh$$

$$p_3 = (c + d)e = ce + de$$

$$p_4 = d(g - e) = dg - de$$

$$p_5 = (a + d)(e + h) = ae + ah + de + dh$$

$$p_6 = (b - d)(g + h) = bg + bh - dg - dh$$

$$p_7 = (a - c)(e + f) = ae + af - ce - cfd$$

$$r = p_5 + p_4 - p_2 + p_6 = ae + bg$$

$$s = p_1 + p_2 = af + bh$$

$$t = p_3 + p_4 = ce + dg$$

$$u = p_5 + p_1 - p_3 - p_7 = cf + dh$$

# Algoritmo de Strassen

STRASSEN $(X, Y, n)$

**se** $n = 1$ **devolva** $X \cdot Y$
$(A, B, C, D) \leftarrow$ PARTICIONE$(X, n)$
$(E, F, G, H) \leftarrow$ PARTICIONE$(Y, n)$
$P_1 \leftarrow$ STRASSEN$(A, F - H, n/2)$
$P_2 \leftarrow$ STRASSEN$(A + B, H, n/2)$
$P_3 \leftarrow$ STRASSEN$(C + D, E, n/2)$
$P_4 \leftarrow$ STRASSEN$(D, G - E, n/2)$
$P_5 \leftarrow$ STRASSEN$(A + D, E + H, n/2)$
$P_6 \leftarrow$ STRASSEN$(B - D, G + H, n/2)$
$P_7 \leftarrow$ STRASSEN$(A - C, E + F, n/2)$
$R \leftarrow P_5 + P_4 - P_2 + P_6$
$S \leftarrow P_1 + P_2$
$T \leftarrow P_3 + P_4$
$U \leftarrow P_5 + P_1 - P_3 - P_7$
**devolva** $P \leftarrow$ CONSTRÓI-MAT$(R, S, T, U)$

# Consumo de tempo

| linha | | todas as execuções da linha |
|---|---|---|
| 1 | $=$ | $\Theta(1)$ |
| 2-3 | $=$ | $\Theta(n^2)$ |
| 4-10 | $=$ | $7, T(n/2) + \Theta(n^2)$ |
| 11-14 | $=$ | $\Theta(n^2)$ |
| 15 | $=$ | $\Theta(n^2)$ |
| total | $=$ | $7\,T(n/2) + \Theta(n^2)$ |

# Consumo de tempo

As dicas no nosso estudo de recorrências sugeri que a solução da recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= \Theta(1) \\ T(n) &= 7\,T(n/2) + \Theta(n^2) \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots \end{aligned}$$

está na mesma classe $\Theta$ que a solução de

$$T'(n) = 7T'(n/2) + n^2$$

| $n$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T'(n)$ | 1 | 11 | 93 | 715 | 5261 | 37851 | 269053 | 1899755 | 13363821 |

# Conclusões

$T'(n)$ é $\Theta(n^{\lg 7})$.

Logo $T(n)$ é $\Theta(n^{\lg 7})$.

O consumo de tempo do algoritmo STRASSEN é $\Theta(n^{\lg 7})$ $(2{,}80 < \lg 7 < 2{,}81)$.

# Mais conclusões

Consumo de tempo de algoritmos para multiplicação de matrizes:

| | |
|---|---|
| Ensino fundamental | $\Theta(n^3)$ |
| Strassen (1969) | $\mathrm{O}(n^{2.81})$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| Coppersmith e Winograd (1987) | $\mathrm{O}(n^{2.3755})$ |
| Stothers (2010) | $\mathrm{O}(n^{2.3736})$ |
| Williams (2011) | $\mathrm{O}(n^{2.3727})$ |