Análise de Algoritmos

Estes slides são adaptações de slides

do Prof. Paulo Feofiloff e do Prof. José Coelho de Pina.

Aula 2

Divisão e conquista

Exemplo 1: Número de inversões de uma permutação
(problema 2-4 do CLRS; veja também sec 5.4 do KT)

Exemplo 2: Par de pontos mais próximos
(sec 33.4 do CLRS)

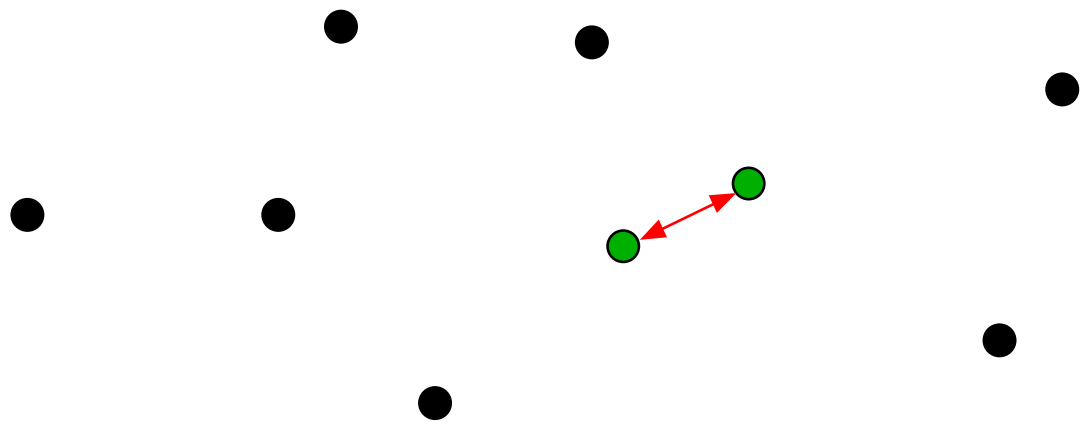
Essas transparências foram adaptadas das transparências do Prof. Paulo Feofiloff e do Prof. José Coelho de Pina.

Par de pontos mais próximos

Problema: Dados n pontos no plano,
determinar dois deles que estão à distância mínima.

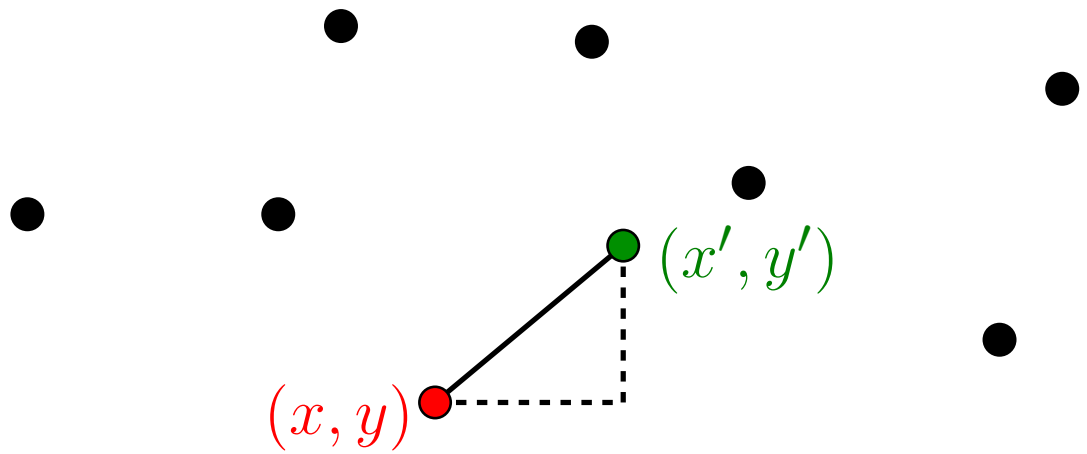
Par de pontos mais próximos

Problema: Dados n pontos no plano,
determinar dois deles que estão à distância mínima.



Par de pontos mais próximos

Problema: Dados n pontos no plano,
determinar dois deles que estão à distância mínima.



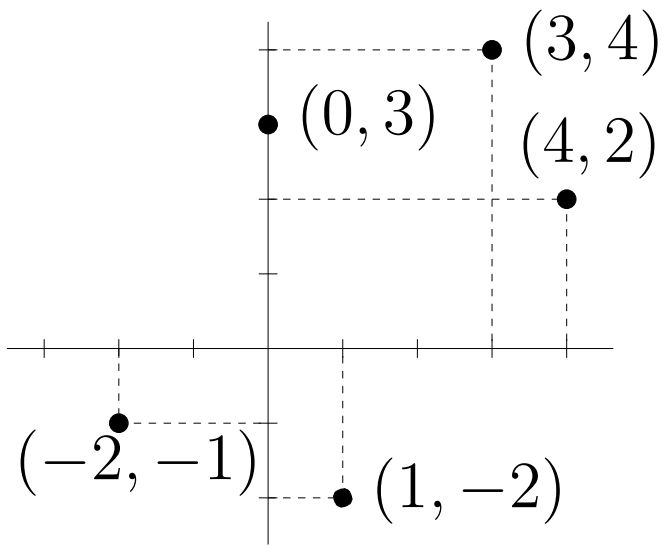
Lembre-se que, para dois pontos (x, y) e (x', y') no plano,

$$\text{DIST}(x, y, x', y') \;=\; \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

Par de pontos mais próximos

Problema: Dados n pontos no plano, determinar dois deles que estão à distância mínima.

Entrada: coleção de n pontos representada por vetores $X[1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n]$.

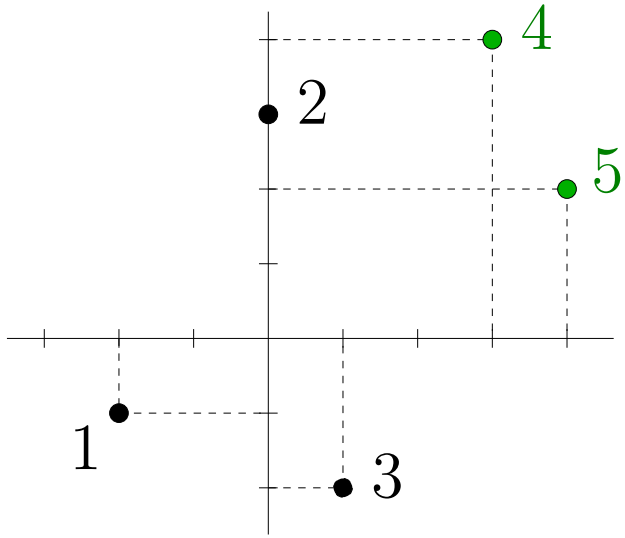


X	-2	0	1	3	4
Y	-1	3	-2	4	2
	1	2	3	4	5

Par de pontos mais próximos

Problema: Dados n pontos no plano, determinar dois deles que estão à distância mínima.

Entrada: coleção de n pontos representada por vetores $X[1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n]$.



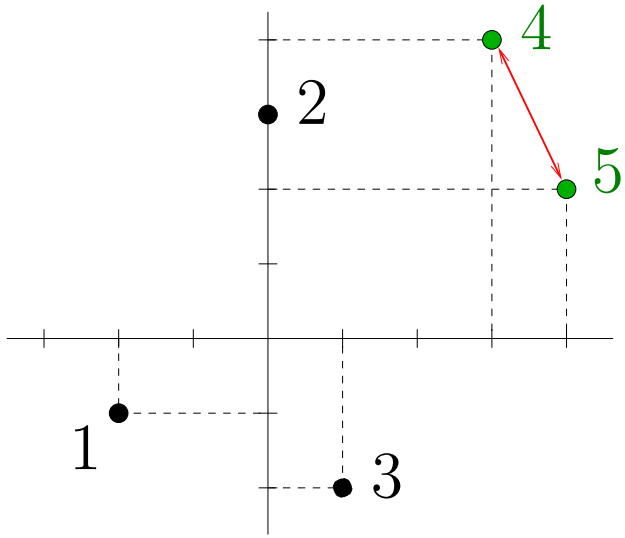
X	-2	0	1	3	4
Y	-1	3	-2	4	2
	1	2	3	4	5

Saída: índices i e j indicando dois pontos à distância mínima.

Par de pontos mais próximos

Problema: Dados n pontos no plano, determinar dois deles que estão à distância mínima.

Entrada: coleção de n pontos representada por vetores $X[1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n]$.



X	-2	0	1	3	4
Y	-1	3	-2	4	2
	1	2	3	4	5

Saída: menor distância entre dois pontos da coleção.

Par de pontos mais próximos

Problema: Dados n pontos no plano,
determinar dois deles que estão à distância mínima.

Entrada: vetores $X[1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n]$
Saída: menor distância entre dois pontos da coleção

Par de pontos mais próximos

Problema: Dados n pontos no plano,
determinar dois deles que estão à distância mínima.

Entrada: vetores $X[1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n]$
Saída: menor distância entre dois pontos da coleção

Primeira solução: algoritmo quadrático,
que testa todos os pares de pontos.

Par de pontos mais próximos

Problema: Dados n pontos no plano,
determinar dois deles que estão à distância mínima.

Entrada: vetores $X[1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n]$
Saída: menor distância entre dois pontos da coleção

Primeira solução: algoritmo quadrático,
que testa todos os pares de pontos.

```
ELEMENTAR(X, Y, n)
1  d ← +∞
2  para i ← 2 até n faça
3      para j ← 1 até i − 1 faça
4          se DIST(X[i], Y[i], X[j], Y[j]) < d
5              então d ← DIST(X[i], Y[i], X[j], Y[j])
6  devolva d
```

Algoritmo elementar

```
ELEMENTAR(X, Y, n)
d ← +∞
para i ← 2 até n faça
    para j ← 1 até i − 1 faça
        se DIST(X[i], Y[i], X[j], Y[j]) < d
            então d ← DIST(X[i], Y[i], X[j], Y[j])
devolva d
```

Algoritmo elementar

```
ELEMENTAR(X, Y, n)
1  d ← +∞
2  para i ← 2 até n faça
3      para j ← 1 até i − 1 faça
4          se DIST(X[i], Y[i], X[j], Y[j]) < d
5              então d ← DIST(X[i], Y[i], X[j], Y[j])
6  devolva d
```

Invariante: d é a menor distância entre os pontos da coleção $X[1\,..\,i-1], Y[1\,..\,i-1]$.

Algoritmo elementar

```
ELEMENTAR(X, Y, n)
1  d ← +∞
2  para i ← 2 até n faça
3      para j ← 1 até i − 1 faça
4          se DIST(X[i], Y[i], X[j], Y[j]) < d
5              então d ← DIST(X[i], Y[i], X[j], Y[j])
6  devolva d
```

Invariante: d é a menor distância entre os pontos da coleção $X[1\,..\,i-1], Y[1\,..\,i-1]$.

Consumo de tempo: linha 4 é executada

$$\sum_{i=2}^{n}(i-1) \;=\; \sum_{i=1}^{n-1} i \;=\; \frac{n(n-1)}{2} \;=\; \Theta(n^2).$$

Algoritmo elementar

```
ELEMENTAR(X, Y, n)
1  d ← +∞
2  para i ← 2 até n faça
3      para j ← 1 até i − 1 faça
4          se DIST(X[i], Y[i], X[j], Y[j]) < d
5              então d ← DIST(X[i], Y[i], X[j], Y[j])
6  devolva d
```

Invariante: d é a menor distância entre os pontos da coleção $X[1\,..\,i-1], Y[1\,..\,i-1]$.

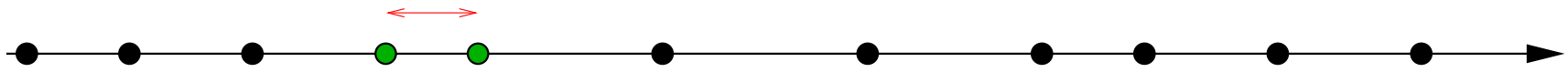
Consumo de tempo: linha 4 é executada

$$\sum_{i=2}^{n}(i-1) \;=\; \sum_{i=1}^{n-1} i \;=\; \frac{n(n-1)}{2} \;=\; \Theta(n^2).$$

É possível projetar um algoritmo mais eficiente que este?

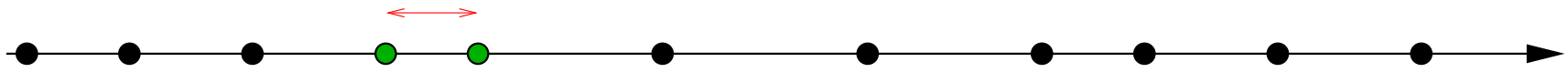
Par mais próximo na reta

Problema: Dados n pontos numa reta, determinar dois deles que estão à distância mínima.



Par mais próximo na reta

Problema: Dados n pontos numa reta, determinar dois deles que estão à distância mínima.

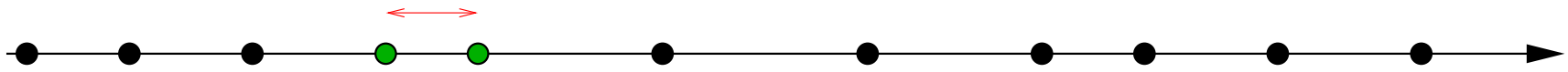


Primeira solução: ordene os pontos, e encontre os dois consecutivos mais próximos.

Tempo consumido: $\mathrm{O}(n \lg n)$.

Par mais próximo na reta

Problema: Dados n pontos numa reta, determinar dois deles que estão à distância mínima.



Primeira solução: ordene os pontos, e encontre os dois consecutivos mais próximos.

Tempo consumido: $\mathrm{O}(n \lg n)$.

Problema com essa solução:

não sei como generalizá-la para o plano...

Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

Divisão: dividir a instância do problema em instâncias menores do problema.

Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

Divisão: dividir a instância do problema em instâncias menores do problema.

Conquista: resolver o problema nas instâncias menores recursivamente (ou diretamente, se elas forem pequenas o suficiente).

Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

Divisão: dividir a instância do problema em instâncias menores do problema.

Conquista: resolver o problema nas instâncias menores recursivamente (ou diretamente, se elas forem pequenas o suficiente).

Combinação: combinar as soluções das instâncias menores para gerar uma solução da instância original.

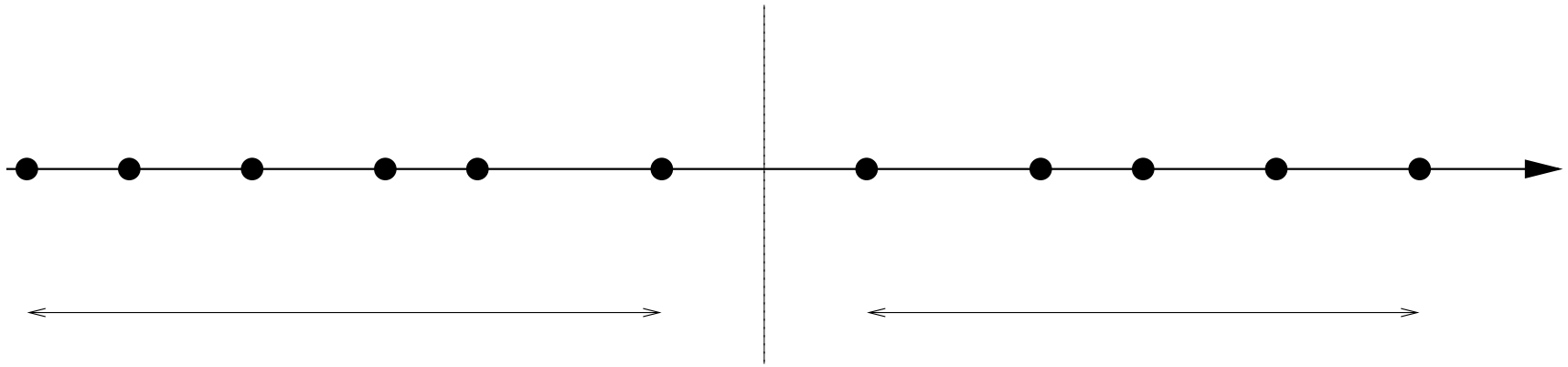
Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

Divisão: dividir a instância do problema em instâncias menores do problema.

Conquista: resolver o problema nas instâncias menores recursivamente (ou diretamente, se elas forem pequenas o suficiente).

Combinação: combinar as soluções das instâncias menores para gerar uma solução da instância original.



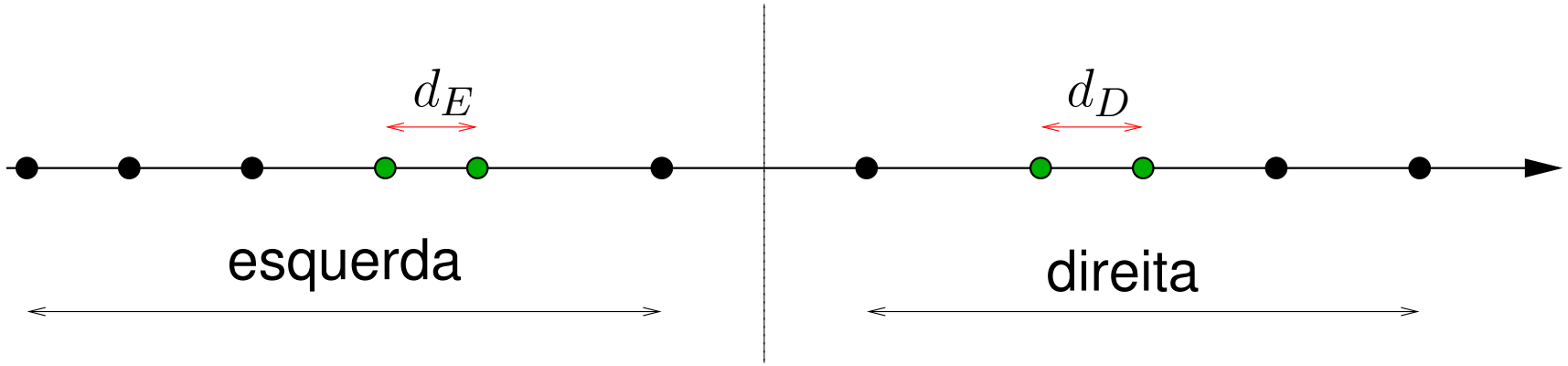
Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

Divisão: dividir a instância do problema em instâncias menores do problema.

Conquista: resolver o problema nas instâncias menores recursivamente (ou diretamente, se elas forem pequenas o suficiente).

Combinação: combinar as soluções das instâncias menores para gerar uma solução da instância original.



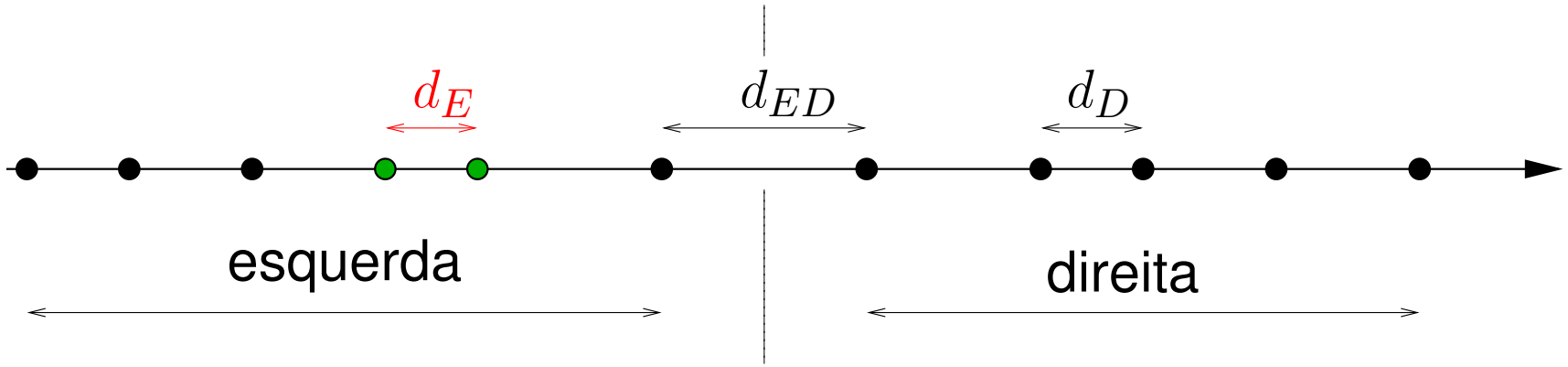
Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

Divisão: dividir a instância do problema em instâncias menores do problema.

Conquista: resolver o problema nas instâncias menores recursivamente (ou diretamente, se elas forem pequenas o suficiente).

Combinação: combinar as soluções das instâncias menores para gerar uma solução da instância original.



Par mais próximo na reta

Pré-processamento: ordenar os pontos.

Par mais próximo na reta

Pré-processamento: ordenar os pontos.

DISTÂNCIARETA(X, n)
1 MERGESORT$(X, 1, n)$
2 devolva DISTÂNCIARETAREC $(X, 1, n)$

Par mais próximo na reta

Pré-processamento: ordenar os pontos.

DISTÂNCIARETA(X, n)
1 MERGESORT$(X, 1, n)$
2 devolva DISTÂNCIARETAREC $(X, 1, n)$

DISTÂNCIARETAREC: divisão e conquista.

Par mais próximo na reta

Pré-processamento: ordenar os pontos.

DISTÂNCIARETA(X, n)
1 MERGESORT$(X, 1, n)$
2 devolva DISTÂNCIARETAREC $(X, 1, n)$

DISTÂNCIARETAREC: divisão e conquista.

Tempo consumido pelo DISTÂNCIARETA:
$\mathrm{O}(n \lg n)$ mais o tempo do DISTÂNCIARETAREC.

Par mais próximo na reta

```
DISTÂNCIARETAREC (X, p, r)        ▷ Divisão e conquista
1  se r ≤ p + 1
2      então  se r = p
3                 então devolva +∞
4                 senão devolva X[r] − X[p]
5      senão q ← ⌊(p + r)/2⌋
6            d_E ← DISTÂNCIARETAREC(X, p, q)
7            d_D ← DISTÂNCIARETAREC(X, q + 1, r)
8            d ← min{d_E, d_D, X[q+1] − X[q]}
9            devolva d
```

Par mais próximo na reta

```
DistânciaRetaRec (X, p, r)        ▷ Divisão e conquista
1  se r ≤ p + 1
2      então  se r = p
3                 então devolva +∞
4                 senão devolva X[r] − X[p]
5      senão q ← ⌊(p + r)/2⌋
6            d_E ← DistânciaRetaRec(X, p, q)
7            d_D ← DistânciaRetaRec(X, q + 1, r)
8            d ← min{d_E, d_D, X[q+1] − X[q]}
9            devolva d
```

Consumo de tempo:

$$T(n) \;=\; T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(1)$$

onde $n = r - p + 1$.

Par mais próximo na reta

```
DISTÂNCIARETAREC (X, p, r)        ▷ Divisão e conquista
1  se r ≤ p + 1
2      então  se r = p
3                 então devolva +∞
4                 senão devolva X[r] − X[p]
5      senão q ← ⌊(p + r)/2⌋
6            d_E ← DISTÂNCIARETAREC(X, p, q)
7            d_D ← DISTÂNCIARETAREC(X, q + 1, r)
8            d ← min{d_E, d_D, X[q+1] − X[q]}
9            devolva d
```

Consumo de tempo:

$$T(n) \;=\; T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + \Theta(1)$$

onde $n = r - p + 1$. Quanto vale $T(n)$?

Par mais próximo na reta

```
DistânciaRetaRec (X, p, r)        ▷ Divisão e conquista
1  se r ≤ p + 1
2      então  se r = p
3                 então devolva +∞
4                 senão devolva X[r] − X[p]
5      senão q ← ⌊(p + r)/2⌋
6            d_E ← DistânciaRetaRec(X, p, q)
7            d_D ← DistânciaRetaRec(X, q + 1, r)
8            d ← min{d_E, d_D, X[q+1] − X[q]}
9            devolva d
```

Consumo de tempo:

$$T(n) \;=\; T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + \Theta(1)$$

onde $n = r - p + 1$. Quanto vale $T(n)$? $T(n) = \Theta(n)$.

Par mais próximo na reta

Voltando...

DISTÂNCIARETA(X, n)
1 MERGESORT$(X, 1, n)$
2 devolva DISTÂNCIARETAREC $(X, 1, n)$

Par mais próximo na reta

Voltando...

DISTÂNCIARETA(X, n)
1 MERGESORT$(X, 1, n)$
2 devolva DISTÂNCIARETAREC $(X, 1, n)$

MERGESORT consome tempo $\mathrm{O}(n \lg n)$.

DISTÂNCIARETAREC consome tempo $\Theta(n)$.

Par mais próximo na reta

Voltando...

DISTÂNCIARETA(X, n)
1 MERGESORT$(X, 1, n)$
2 devolva DISTÂNCIARETAREC $(X, 1, n)$

MERGESORT consome tempo $\mathrm{O}(n \lg n)$.

DISTÂNCIARETAREC consome tempo $\Theta(n)$.

Tempo consumido pelo DISTÂNCIARETA: $\mathrm{O}(n \lg n)$.

Par mais próximo no plano

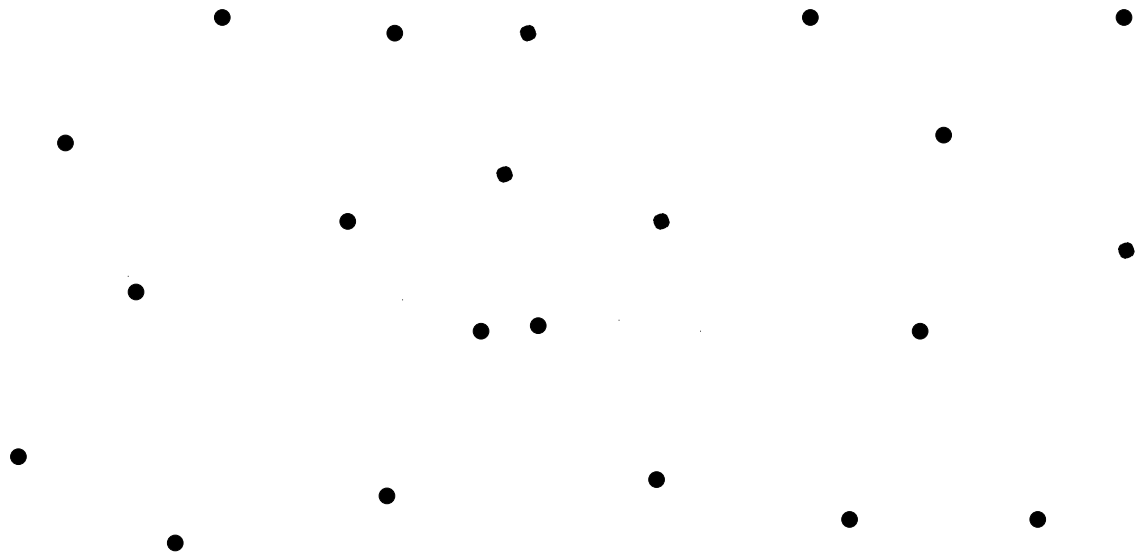
Obtivemos um algoritmo $\mathrm{O}(n \lg n)$ para pontos na reta.

Como generalizar essa ideia para o plano?

Par mais próximo no plano

Obtivemos um algoritmo $\mathrm{O}(n \lg n)$ para pontos na reta.

Como generalizar essa ideia para o plano?

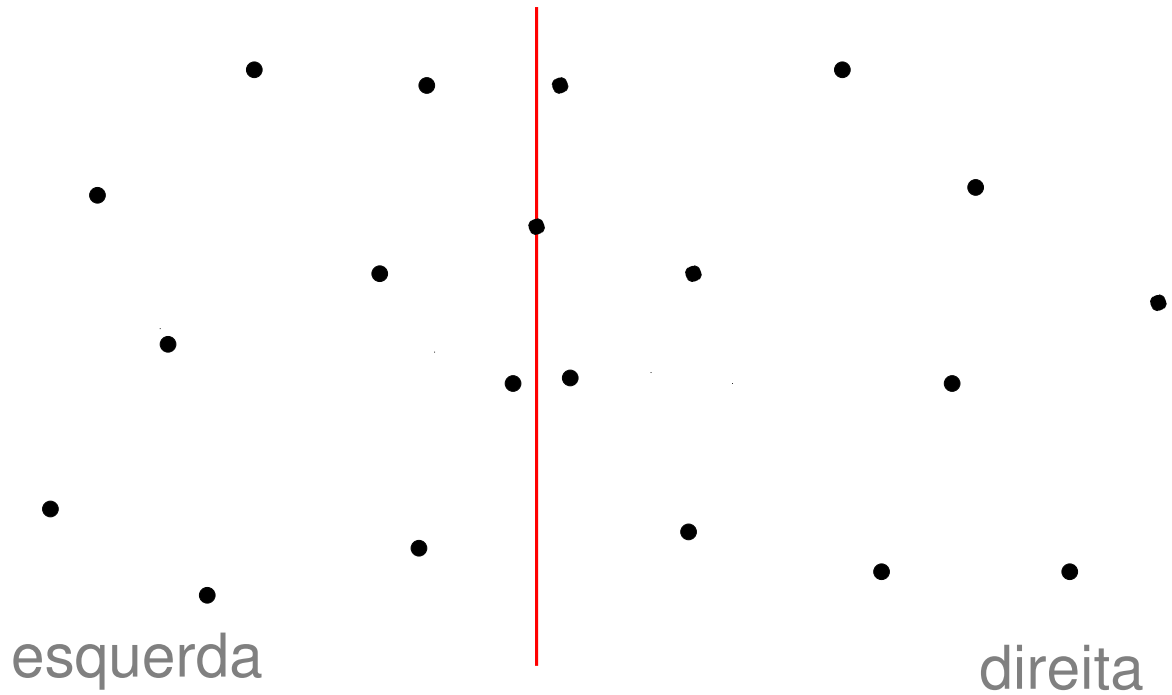


Par mais próximo no plano

Obtivemos um algoritmo $\mathrm{O}(n \lg n)$ para pontos na reta.

Como generalizar essa ideia para o plano?

Divide...

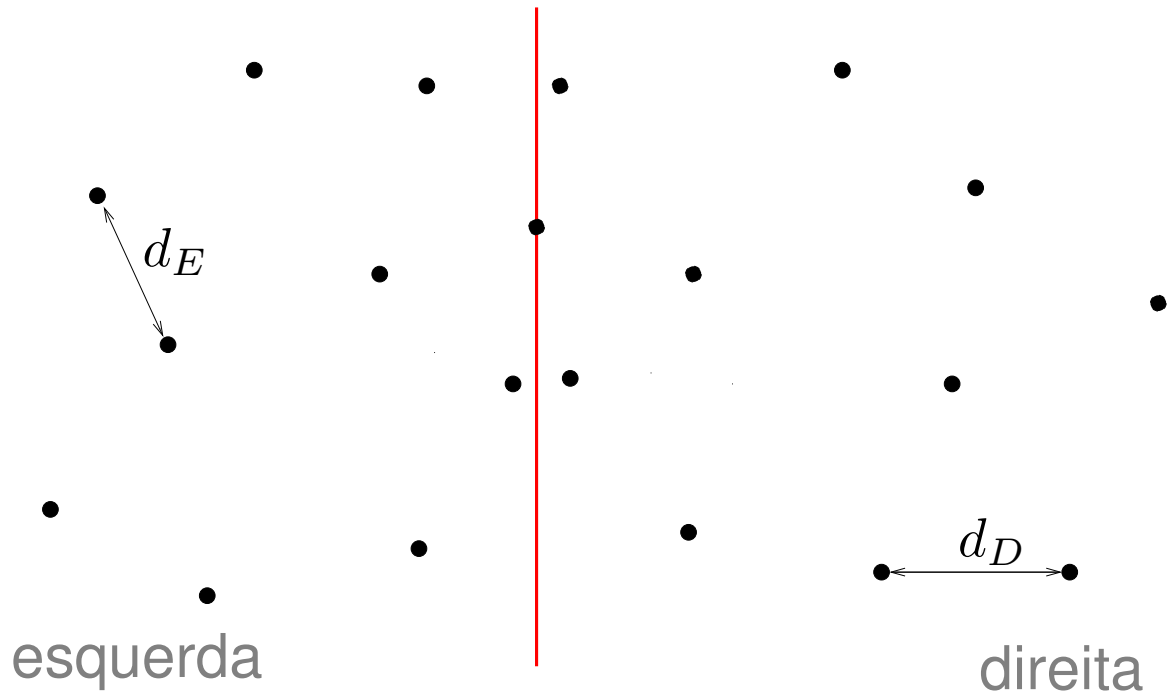


Par mais próximo no plano

Obtivemos um algoritmo $\mathrm{O}(n \lg n)$ para pontos na reta.

Como generalizar essa ideia para o plano?

Divide... Conquista...

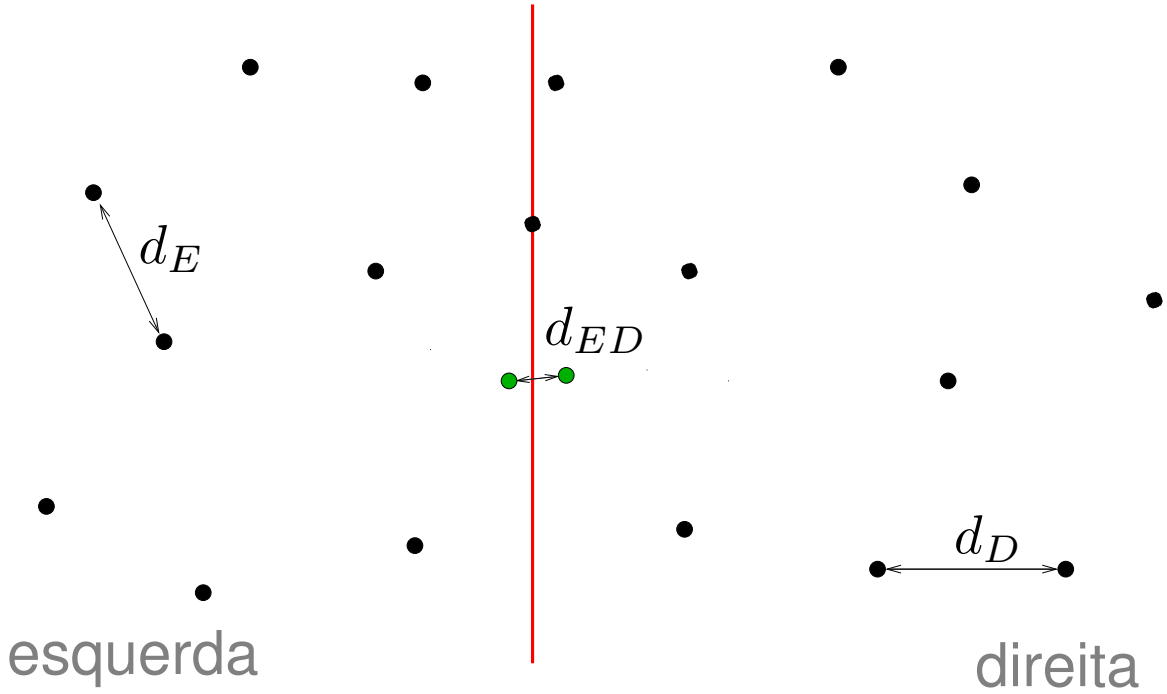


Par mais próximo no plano

Obtivemos um algoritmo $\mathrm{O}(n \lg n)$ para pontos na reta.

Como generalizar essa ideia para o plano?

Divide... Conquista... Combina...



Algoritmo de Shamos e Hoey

Pré-processamento: ordenar os pontos pela X-coordenada

Algoritmo de Shamos e Hoey

Pré-processamento: ordenar os pontos pela X-coordenada

DISTÂNCIA-SH(X, Y, n)
1 MERGESORT$(X, Y, 1, n)$
2 devolva DISTÂNCIAREC-SH $(X, Y, 1, n)$

Algoritmo de Shamos e Hoey

Pré-processamento: ordenar os pontos pela X-coordenada

DISTÂNCIA-SH(X, Y, n)
1 MERGESORT$(X, Y, 1, n)$
2 devolva DISTÂNCIAREC-SH $(X, Y, 1, n)$

Consumo de tempo:
$\mathrm{O}(n \lg n)$ mais o tempo do DISTÂNCIAREC-SH.

Divisão e conquista

DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, p, r)

Dividir: $X[p\,..\,q], Y[p\,..\,q]$ (esquerda)
$X[q{+}1\,..\,r], Y[q{+}1\,..\,r]$ (direita)
onde $q := \lfloor (p+r)/2 \rfloor$.

Divisão e conquista

DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, p, r)

Dividir: $X[p\,..\,q], Y[p\,..\,q]$ (esquerda)
$X[q{+}1\,..\,r], Y[q{+}1\,..\,r]$ (direita)
onde $q := \lfloor (p+r)/2 \rfloor$.

Conquistar: Determine, recursivamente, a menor distância d_E entre dois pontos da esquerda e a menor distância d_D entre dois pontos da direita.

Divisão e conquista

DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, p, r)

Dividir: $X[p\,..\,q], Y[p\,..\,q]$ (esquerda)
$X[q{+}1\,..\,r], Y[q{+}1\,..\,r]$ (direita)
onde $q := \lfloor (p+r)/2 \rfloor$.

Conquistar: Determine, recursivamente, a menor distância d_E entre dois pontos da esquerda e a menor distância d_D entre dois pontos da direita.

Combinar: Devolva o mínimo entre d_E, d_D e a menor distância d_{ED} entre um ponto da esquerda e um ponto da direita.

Algoritmo de Shamos e Hoey

```
DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, p, r)        ▷ Divisão e conquista
1  se r ≤ p + 2
2      então  ▷ resolva o problema diretamente
3      senão  q ← ⌊(p + r)/2⌋
4             d_E ← DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, p, q)
5             d_D ← DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, q+1, r)
6             devolva COMBINE (X, Y, p, r, d_E, d_D)
```

Algoritmo de Shamos e Hoey

```
DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, p, r)        ▷ Divisão e conquista
1  se r ≤ p + 2
2      então  ▷ resolva o problema diretamente
3      senão  q ← ⌊(p + r)/2⌋
4             d_E ← DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, p, q)
5             d_D ← DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, q+1, r)
6             devolva COMBINE (X, Y, p, r, d_E, d_D)
```

Suponha que COMBINE é linear.

Algoritmo de Shamos e Hoey

DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, p, r) ▷ Divisão e conquista

```
se r ≤ p + 2
    então  ▷ resolva o problema diretamente
    senão  q ← ⌊(p + r)/2⌋
           d_E ← DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, p, q)
           d_D ← DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, q+1, r)
           devolva COMBINE (X, Y, p, r, d_E, d_D)
```

Suponha que COMBINE é linear.

Consumo de tempo do DISTÂNCIAREC-SH:

$$T(n) \;=\; T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \mathrm{O}(n)$$

onde $n = r - p + 1$.

Algoritmo de Shamos e Hoey

```
DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, p, r)        ▷ Divisão e conquista
1  se r ≤ p + 2
2      então  ▷ resolva o problema diretamente
3      senão  q ← ⌊(p + r)/2⌋
4             d_E ← DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, p, q)
5             d_D ← DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, q+1, r)
6             devolva COMBINE (X, Y, p, r, d_E, d_D)
```

Suponha que COMBINE é linear.

Consumo de tempo:

$$T(n) \;=\; T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \mathrm{O}(n)$$

onde $n = r - p + 1$. Quanto vale $T(n)$?

Algoritmo de Shamos e Hoey

DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, p, r) ▷ Divisão e conquista

```
se r ≤ p + 2
    então ▷ resolva o problema diretamente
    senão q ← ⌊(p + r)/2⌋
          d_E ← DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, p, q)
          d_D ← DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, q+1, r)
          devolva COMBINE (X, Y, p, r, d_E, d_D)
```

Suponha que COMBINE é linear.

Consumo de tempo:

$$T(n) \;=\; T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \mathrm{O}(n)$$

onde $n = r - p + 1$. Quanto vale $T(n)$? $T(n) = \mathrm{O}(n \lg n)$.

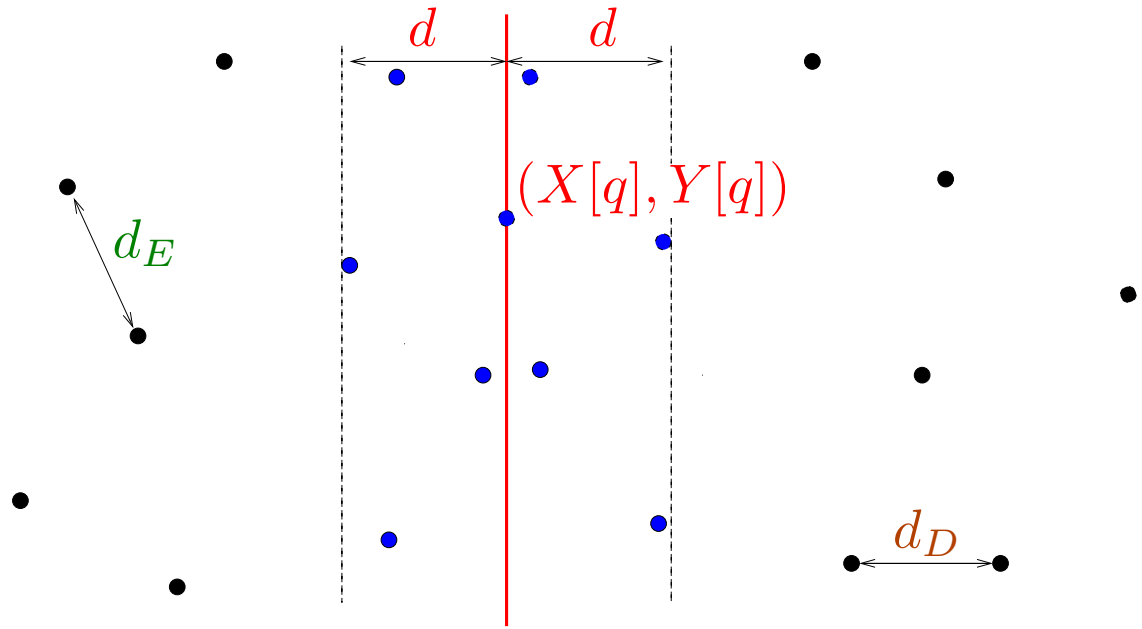
Algoritmo de Shamos e Hoey

Como fazer o COMBINE linear?

Algoritmo de Shamos e Hoey

Como fazer o COMBINE linear?

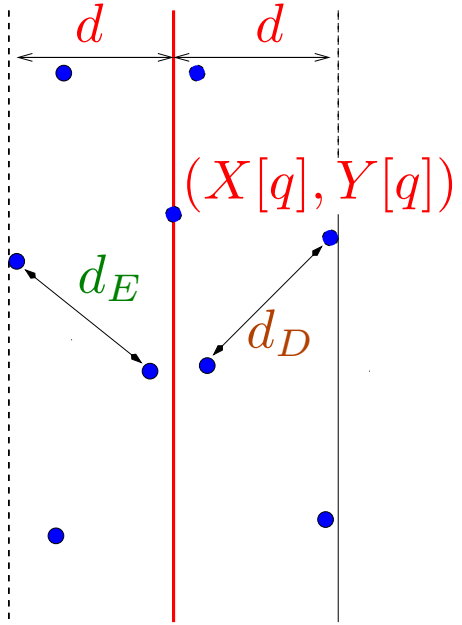
COMBINE precisa considerar apenas pontos que estão a uma distância menor que $d = \min\{d_E, d_D\}$ da reta vertical $x = X[q]$.



Algoritmo de Shamos e Hoey

Como fazer o COMBINE linear?

COMBINE precisa considerar apenas pontos que estão a uma distância menor que $d = \min\{d_E, d_D\}$ da reta vertical $x = X[q]$.



Infelizmente todos os pontos podem estar nesta faixa...

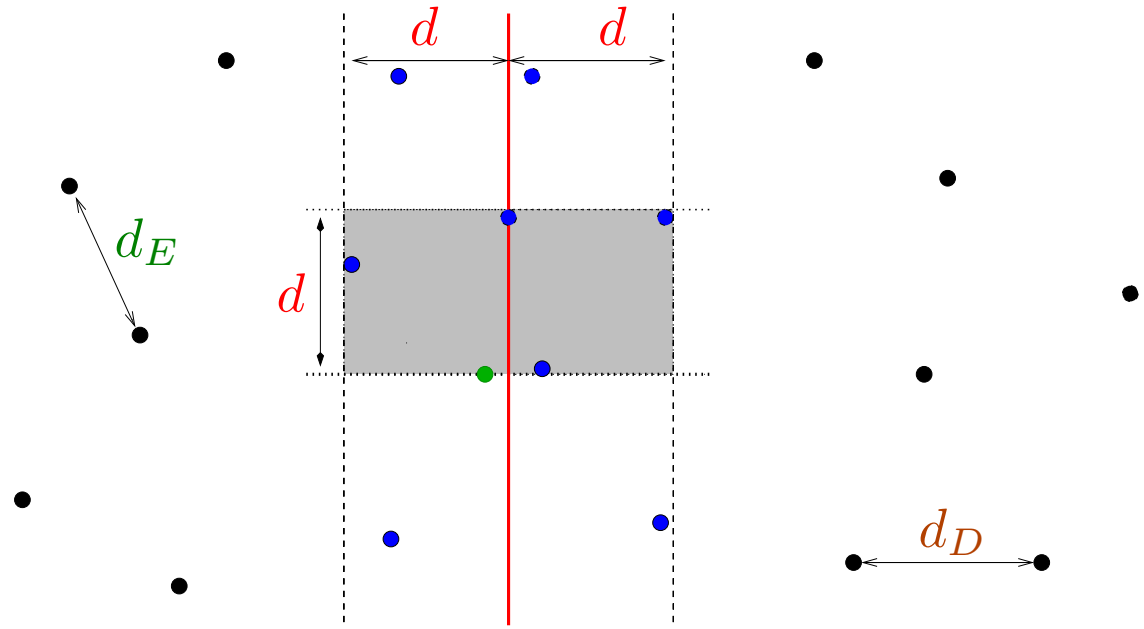
Algoritmo de Shamos e Hoey

Como fazer o COMBINE linear?

Algoritmo de Shamos e Hoey

Como fazer o COMBINE linear?

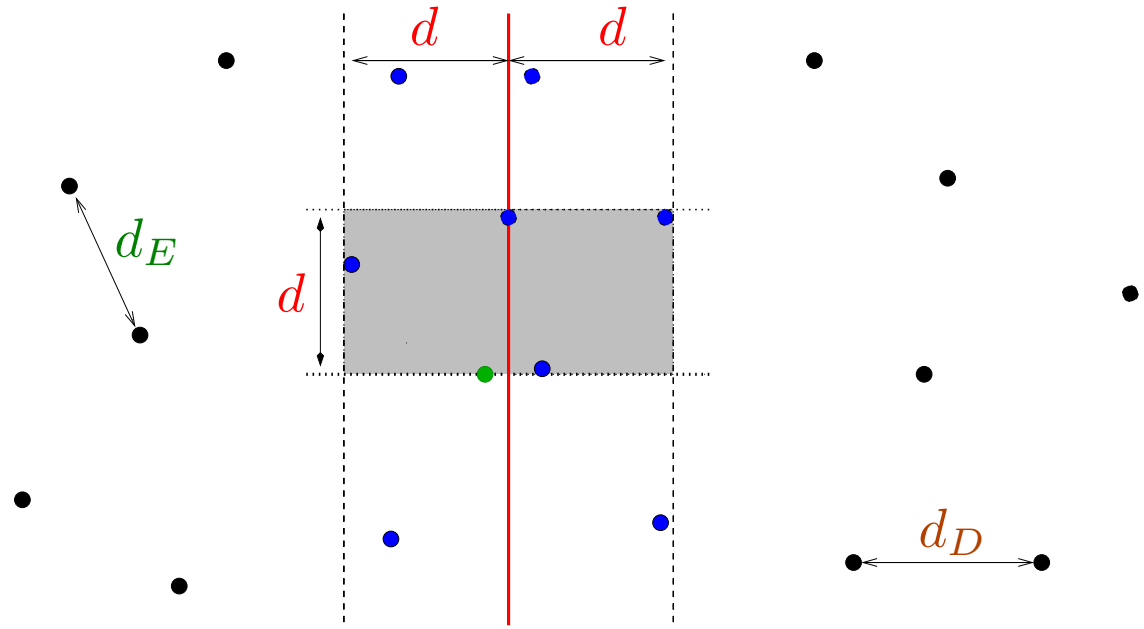
Ideia...



Algoritmo de Shamos e Hoey

Como fazer o COMBINE linear?

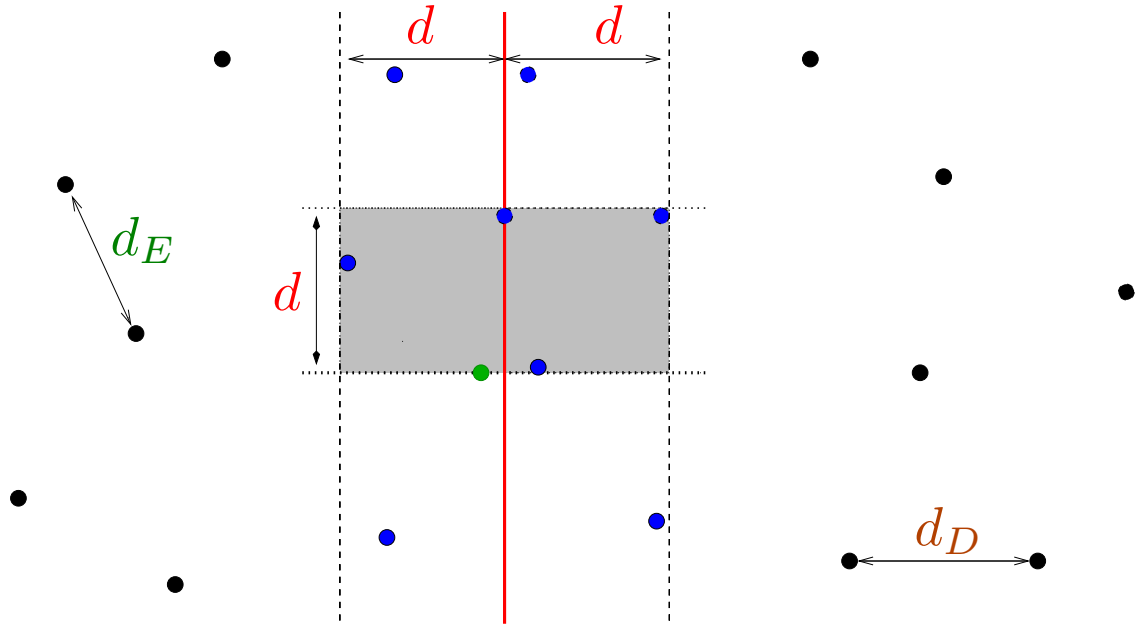
Ideia...



Para cada ponto na faixa, olhamos apenas para pontos da faixa que tenham Y-coordenada no máximo d mais que este ponto.

Algoritmo de Shamos e Hoey

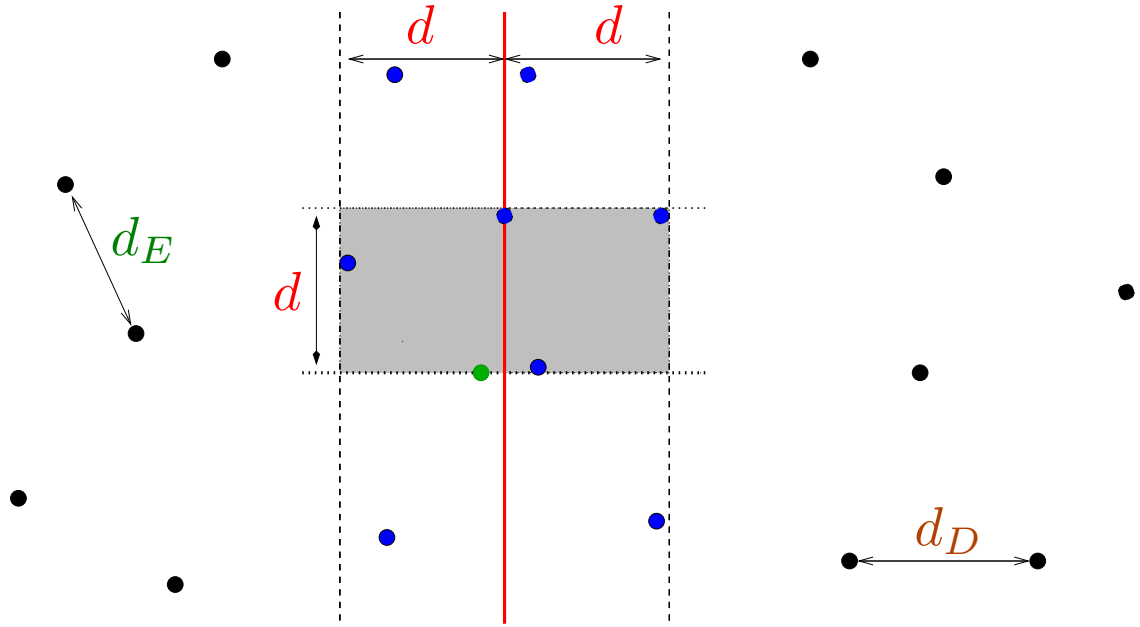
Como fazer o COMBINE linear?



Quantos pontos assim há?

Algoritmo de Shamos e Hoey

Como fazer o COMBINE linear?

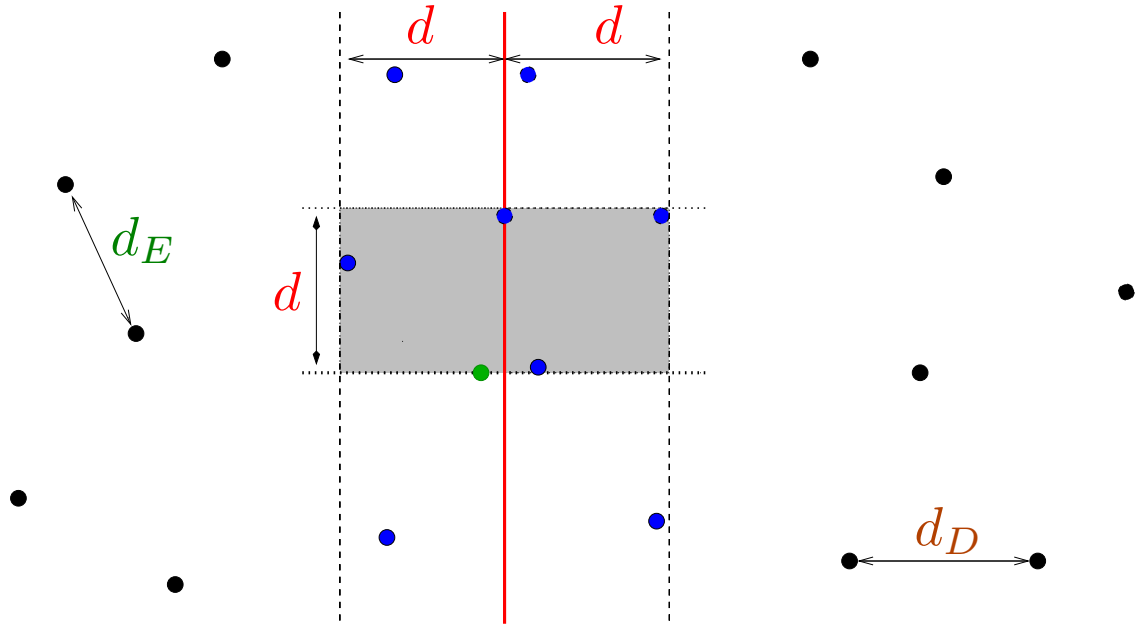


Quantos pontos assim há?

Em cada um dos dois quadrados de lado d,
há no máximo 4 pontos porque $d \leq d_E$ e $d \leq d_D$.

Algoritmo de Shamos e Hoey

Como fazer o COMBINE linear?



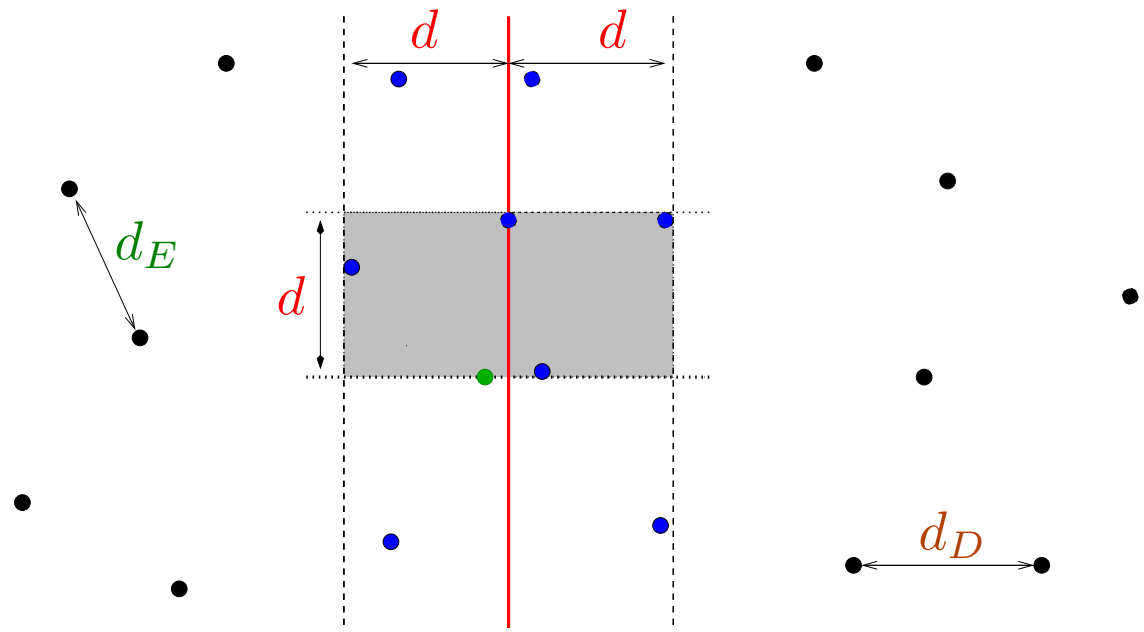
Quantos pontos assim há?

Em cada um dos dois quadrados de lado d,
há no máximo 4 pontos porque $d \leq d_E$ e $d \leq d_D$.

Logo há não mais que 7 pontos assim (excluindo o ponto).

Algoritmo de Shamos e Hoey

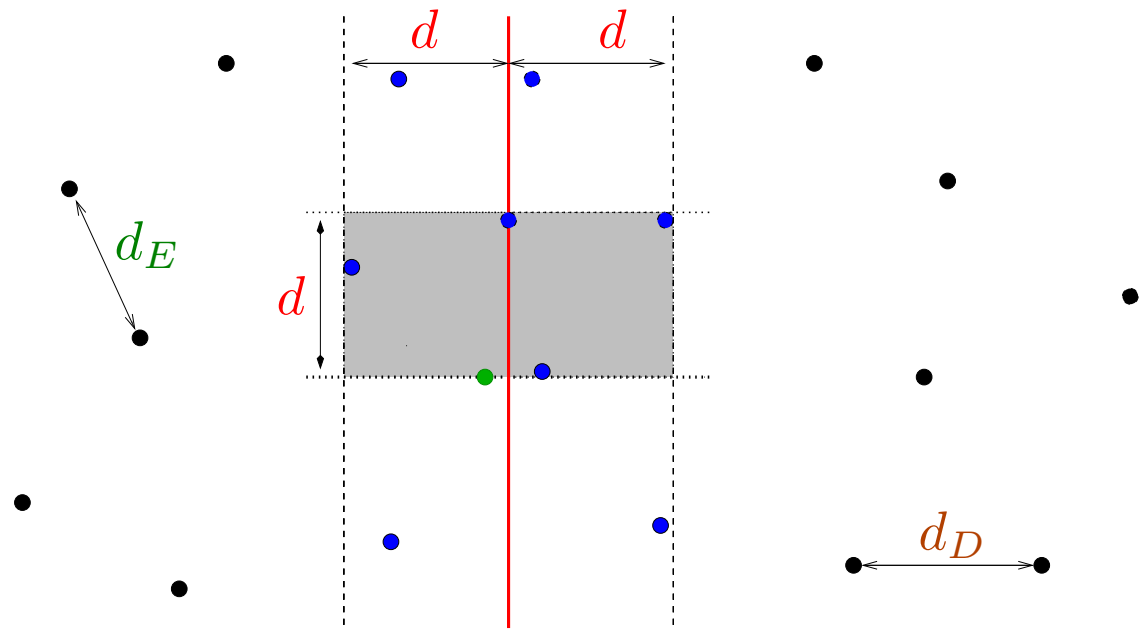
Como fazer o COMBINE linear?



Mas como ter acesso rápido a estes pontos?

Algoritmo de Shamos e Hoey

Como fazer o COMBINE linear?

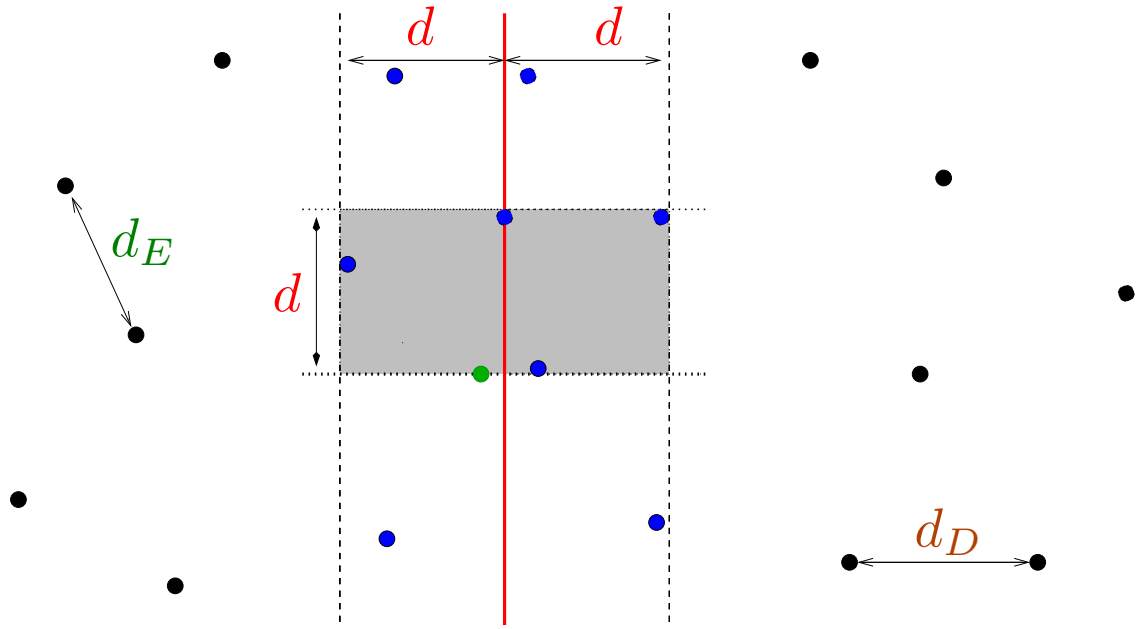


Mas como ter acesso rápido a estes pontos?

No COMBINE, precisamos ter acesso aos pontos ordenados pelas suas Y-coordenadas.

Algoritmo de Shamos e Hoey

Como fazer o COMBINE linear?



Mas como ter acesso rápido a estes pontos?

No COMBINE, precisamos ter acesso aos pontos ordenados pelas suas Y-coordenadas.

Façamos o DISTÂNCIAREC-SH devolver os pontos ordenados pelas suas Y-coordenadas!

Divisão e conquista

DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, p, r)

Dividir: $X[p\,..\,q], Y[p\,..\,q]$ (esquerda)
$X[q{+}1\,..\,r], Y[q{+}1\,..\,r]$ (direita)
onde $q := \lfloor (p+r)/2 \rfloor$.

Conquistar: Determine, recursivamente, a menor distância d_E entre dois pontos da esquerda e a menor distância d_D entre dois pontos da direita, e reorganize os pontos para que estejam ordenados por suas Y-coordenadas.

Combinar: Devolva o mínimo entre d_E, d_D e a menor distância d_{ED} entre um ponto da esquerda e um ponto da direita.

Algoritmo de Shamos e Hoey

```
DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, p, r)        ▷ Divisão e conquista
1  se r ≤ p + 2
2      então  ▷ resolva o problema diretamente
3      senão  q ← ⌊(p + r)/2⌋      x_f ← X[q]
4             d_E ← DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, p, q)
5             d_D ← DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, q + 1, r)
6             INTERCALE (Y, X, p, q, r)
7             devolva COMBINE (X, Y, p, r, d_E, d_D, x_f)
```

Algoritmo de Shamos e Hoey

```
DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, p, r)        ▷ Divisão e conquista
1  se r ≤ p + 2
2      então  ▷ resolva o problema diretamente
3      senão  q ← ⌊(p + r)/2⌋      x_f ← X[q]
4             d_E ← DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, p, q)
5             d_D ← DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, q + 1, r)
6             INTERCALE (Y, X, p, q, r)
7             devolva COMBINE (X, Y, p, r, d_E, d_D, x_f)
```

Não se esqueça de ordenar na base!

Algoritmo de Shamos e Hoey

```
DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, p, r)        ▷ Divisão e conquista
1  se r ≤ p + 2
2      então  ▷ resolva o problema diretamente
3      senão  q ← ⌊(p + r)/2⌋      x_f ← X[q]
4             d_E ← DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, p, q)
5             d_D ← DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, q + 1, r)
6             INTERCALE (Y, X, p, q, r)
7             devolva COMBINE (X, Y, p, r, d_E, d_D, x_f)
```

INTERCALE e COMBINE são algoritmos lineares.

Algoritmo de Shamos e Hoey

```
DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, p, r)        ▷ Divisão e conquista
1  se r ≤ p + 2
2      então  ▷ resolva o problema diretamente
3      senão  q ← ⌊(p + r)/2⌋      x_f ← X[q]
4             d_E ← DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, p, q)
5             d_D ← DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, q + 1, r)
6             INTERCALE (Y, X, p, q, r)
7             devolva COMBINE (X, Y, p, r, d_E, d_D, x_f)
```

INTERCALE e COMBINE são algoritmos lineares.

Consumo de tempo:

$$T(n) \;=\; T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + \mathrm{O}(n)$$

onde $n = r - p + 1$.

Algoritmo de Shamos e Hoey

```
DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, p, r)        ▷ Divisão e conquista
1  se r ≤ p + 2
2      então  ▷ resolva o problema diretamente
3      senão  q ← ⌊(p + r)/2⌋      x_f ← X[q]
4             d_E ← DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, p, q)
5             d_D ← DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, q + 1, r)
6             INTERCALE (Y, X, p, q, r)
7             devolva COMBINE (X, Y, p, r, d_E, d_D, x_f)
```

INTERCALE e COMBINE são algoritmos lineares.

Consumo de tempo:

$$T(n) \;=\; T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + \mathrm{O}(n)$$

onde $n = r - p + 1$. Como antes, $T(n) = \mathrm{O}(n \lg n)$.

Algoritmo de Shamos e Hoey

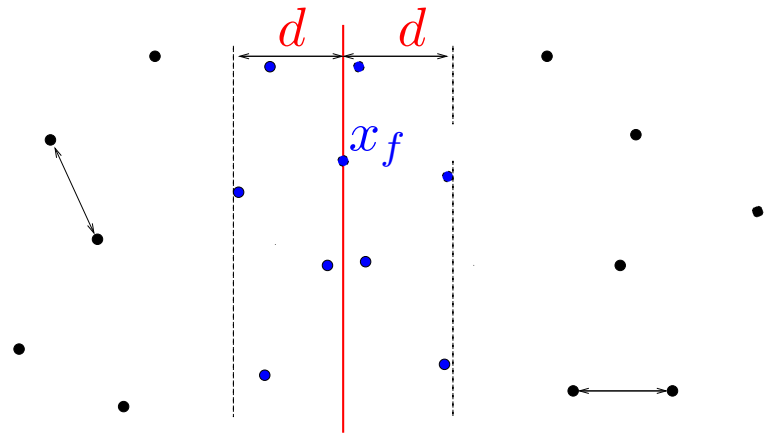
A rotina abaixo identifica os pontos que estão na faixa, ordenados pela Y-coordenada.

Algoritmo de Shamos e Hoey

A rotina abaixo identifica os pontos que estão na faixa, ordenados pela Y-coordenada.

CANDIDATOS (X, p, r, d, x_f)

```
t ← 0
para k ← p até r faça
    se |X[k] − x_f| < d
        então t ← t + 1
              f[t] ← k
devolva (f, t)
```



Algoritmo de Shamos e Hoey

A rotina abaixo identifica os pontos que estão na faixa, ordenados pela Y-coordenada.

CANDIDATOS (X, p, r, d, x_f)

```
t ← 0
para k ← p até r faça
    se |X[k] − x_f| < d
        então t ← t + 1
              f[t] ← k
devolva (f, t)
```

X	1	-2	4	0	3
Y	-2	-1	2	3	4

	1	2	3	4	5
f					

$x_f = 1 \quad d = \sqrt{5}$

Algoritmo de Shamos e Hoey

A rotina abaixo identifica os pontos que estão na faixa, ordenados pela Y-coordenada.

CANDIDATOS (X, p, r, d, x_f)

```
t ← 0
para k ← p até r faça
    se |X[k] − x_f| < d
        então t ← t + 1
              f[t] ← k
devolva (f, t)
```

X	1	-2	4	0	3
Y	-2	-1	2	3	4

	1	2	3	4	5
f	1	4	5		

$x_f = 1 \quad d = \sqrt{5}$

Algoritmo de Shamos e Hoey

A rotina abaixo identifica os pontos que estão na faixa, ordenados pela Y-coordenada.

CANDIDATOS (X, p, r, d, x_f)

```
t ← 0
para k ← p até r faça
    se |X[k] − x_f| < d
        então t ← t + 1
              f[t] ← k
devolva (f, t)
```

X	1	-2	4	0	3
Y	-2	-1	2	3	4

	1	2	3
f	1	4	5

$x_f = 1 \quad d = \sqrt{5}$

Consumo de tempo:

É fácil ver que o consumo é $\Theta(n)$ onde $n = r - p + 1$.

Algoritmo de Shamos e Hoey

```
COMBINE (X, Y, p, r, d_E, d_D, x_f)
d ← min{d_E, d_D}
(f, t) ← CANDIDATOS (X, p, r, d, x_f)        ▷ pontos na faixa
para i ← 1 até t − 1 faça
    para j ← i + 1 até min{i + 7, t} faça    ▷ ≤ 7 próximos
        d′ ← DIST(X[f[i]], Y[f[i]], X[f[j]], Y[f[j]])
        se d′ < d
            então d ← d′
devolva d
```

Algoritmo de Shamos e Hoey

```
COMBINE (X, Y, p, r, d_E, d_D, x_f)
1  d ← min{d_E, d_D}
2  (f, t) ← CANDIDATOS (X, p, r, d, x_f)      ▷ pontos na faixa
3  para i ← 1 até t − 1 faça
4      para j ← i + 1 até min{i + 7, t} faça      ▷ ≤ 7 próximos
5          d′ ← DIST(X[f[i]], Y[f[i]], X[f[j]], Y[f[j]])
6          se d′ < d
7              então d ← d′
8  devolva d
```

Consumo de tempo:

É fácil ver que o consumo é $\Theta(n)$ onde $n = r - p + 1$.

Algoritmo de Shamos e Hoey

```
COMBINE (X, Y, p, r, d_E, d_D, x_f)
d ← min{d_E, d_D}
(f, t) ← CANDIDATOS (X, p, r, d, x_f)        ▷ pontos na faixa
para i ← 1 até t − 1 faça
    j ← i + 1
    enquanto j ≤ t e Y[f[j]] − Y[f[i]] < d faça        ▷ ≤ 7 próximos
        d′ ← DIST(X[f[i]], Y[f[i]], X[f[j]], Y[f[j]])
        se d′ < d
            então d ← d′
        j ← j + 1
devolva d
```

Algoritmo de Shamos e Hoey

```
COMBINE (X, Y, p, r, d_E, d_D, x_f)
d ← min{d_E, d_D}
(f, t) ← CANDIDATOS (X, p, r, d, x_f)        ▷ pontos na faixa
para i ← 1 até t − 1 faça
    j ← i + 1
    enquanto j ≤ t e Y[f[j]] − Y[f[i]] < d faça        ▷ ≤ 7 próximos
        d′ ← DIST(X[f[i]], Y[f[i]], X[f[j]], Y[f[j]])
        se d′ < d
            então d ← d′
        j ← j + 1
devolva d
```

Consumo de tempo: $\Theta(n)$ onde $n = r - p + 1$.

Exercícios

Exercício: Adapte os algoritmos vistos nesta aula para que devolvam dois pontos da coleção que estejam à distância mínima (em vez de devolver a distância apenas).

Exercícios

Exercício: Adapte os algoritmos vistos nesta aula para que devolvam dois pontos da coleção que estejam à distância mínima (em vez de devolver a distância apenas).

Exercício: O algoritmo de divisão e conquista funciona se trocarmos o 7 na implementação com o comando **para** por 6? E se trocarmos o 6 por 5?

Exercícios

Exercício: Adapte os algoritmos vistos nesta aula para que devolvam dois pontos da coleção que estejam à distância mínima (em vez de devolver a distância apenas).

Exercício: O algoritmo de divisão e conquista funciona se trocarmos o 7 na implementação com o comando **para** por 6? E se trocarmos o 6 por 5?

Tarefa 1: UVA 10810 – Ultra-QuickSort
http://acm.uva.es/p/v108/10810.html

Exercícios

Exercício: Adapte os algoritmos vistos nesta aula para que devolvam dois pontos da coleção que estejam à distância mínima (em vez de devolver a distância apenas).

Exercício: O algoritmo de divisão e conquista funciona se trocarmos o 7 na implementação com o comando **para** por 6? E se trocarmos o 6 por 5?

Tarefa 1: UVA 10810 – Ultra-QuickSort
http://acm.uva.es/p/v108/10810.html

Tarefa 2: UVA 10245 – The Closest Pair Problem
http://acm.uva.es/p/v102/10245.html

Exercícios

Exercício: Adapte os algoritmos vistos nesta aula para que devolvam dois pontos da coleção que estejam à distância mínima (em vez de devolver a distância apenas).

Exercício: O algoritmo de divisão e conquista funciona se trocarmos o 7 na implementação com o comando **para** por 6? E se trocarmos o 6 por 5?

Tarefa 1: UVA 10810 – Ultra-QuickSort
http://acm.uva.es/p/v108/10810.html

Tarefa 2: UVA 10245 – The Closest Pair Problem
http://acm.uva.es/p/v102/10245.html

Agora, às animações!