

Análise de Algoritmos

**Estes slides são adaptações de slides
do Prof. Paulo Feofiloff e do Prof. José Coelho de Pina.**

Matroides e o método guloso

U : conjunto finito arbitrário.

\mathcal{C} : família não vazia de subconjuntos de U hereditária.
(subconjuntos de conjuntos em \mathcal{C} estão em \mathcal{C})

Matroides e o método guloso

U : conjunto finito arbitrário.

\mathcal{C} : família não vazia de subconjuntos de U hereditária.

Problema 1: Dado um peso binário w_e para cada e de U , encontrar um conjunto de \mathcal{C} de peso máximo.

Matroides e o método guloso

U : conjunto finito arbitrário.

\mathcal{C} : família não vazia de subconjuntos de U hereditária.

Problema 1: Dado um peso binário w_e para cada e de U , encontrar um conjunto de \mathcal{C} de peso máximo.

GULOSO (U, w, \mathcal{C})

- 1 $U_1 \leftarrow \{e \in U : w_e = 1\}$ $S \leftarrow \emptyset$
- 2 **enquanto** existe e em U_1 tal que $S \cup \{e\} \in \mathcal{C}$ **faça**
- 3 $S \leftarrow S \cup \{e\}$
- 4 **devolva** S

Matroides e o método guloso

U : conjunto finito arbitrário.

\mathcal{C} : família não vazia de subconjuntos de U hereditária.

Problema 1: Dado um peso binário w_e para cada e de U , encontrar um conjunto de \mathcal{C} de peso máximo.

GULOSO (U, w, \mathcal{C})

- 1 $U_1 \leftarrow \{e \in U : w_e = 1\}$ $S \leftarrow \emptyset$
- 2 **enquanto** existe e em U_1 tal que $S \cup \{e\} \in \mathcal{C}$ **faça**
- 3 $S \leftarrow S \cup \{e\}$
- 4 **devolva** S

GULOSO encontra um conjunto de \mathcal{C} de peso **maximal**.

\mathcal{C} é um **matroide** se todo conjunto de \mathcal{C} de peso **maximal** tem o mesmo tamanho.

Matroides e o método guloso

U : conjunto finito.

\mathcal{C} : família não vazia de subconjuntos de U hereditária.

Pesos positivos para os elementos de U .

Problema 2: Encontrar um conjunto de \mathcal{C} de peso máximo.

Matroides e o método guloso

U : conjunto finito.

\mathcal{C} : família não vazia de subconjuntos de U hereditária.

Pesos positivos para os elementos de U .

Problema 2: Encontrar um conjunto de \mathcal{C} de peso máximo.

GULOSO (U, w, \mathcal{C})

1 $(e_1, \dots, e_n) \leftarrow \text{ORDENE}(U, w)$ \triangleright ordem dos pesos

2 $S \leftarrow \emptyset$

3 **para** $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**

4 **se** $S \cup \{e_i\} \in \mathcal{C}$

5 **então** $S \leftarrow S \cup \{e_i\}$

6 **devolva** S

Matroides e o método guloso

U : conjunto finito.

\mathcal{C} : família não vazia de subconjuntos de U hereditária.

Pesos positivos para os elementos de U .

Problema 2: Encontrar um conjunto de \mathcal{C} de peso máximo.

GULOSO (U, w, \mathcal{C})

1 $(e_1, \dots, e_n) \leftarrow \text{ORDENE}(U, w)$ \triangleright ordem dos pesos

2 $S \leftarrow \emptyset$

3 **para** $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**

4 **se** $S \cup \{e_i\} \in \mathcal{C}$

5 **então** $S \leftarrow S \cup \{e_i\}$

6 **devolva** S

Teorema: Se \mathcal{C} é um matroide, então o algoritmo acima resolve o Problema 2.

Exemplos de matroides

Dado um espaço vetorial, a coleção de todos os conjuntos de vetores LI deste espaço é um matroide.

Exemplos de matroides

Dado um espaço vetorial, a coleção de todos os conjuntos de vetores LI deste espaço é um matroide.

Dado um grafo G , a coleção de arestas de todas as florestas de G é um matroide.

Exemplos de matroides

Dado um espaço vetorial, a coleção de todos os **conjuntos de vetores LI** deste espaço é um matroide.

Dado um grafo G , a coleção de arestas de todas as **florestas** de G é um matroide.

Grafo bipartido $G = (U \times V, E)$.

M_U : todos os conjuntos S de arestas de G tq no máximo uma aresta de S é incidente a cada vértice de U .

M_U é um matroide.

Exemplos de matroides

Dado um espaço vetorial, a coleção de todos os **conjuntos de vetores LI** deste espaço é um matroide.

Dado um grafo G , a coleção de arestas de todas as **florestas** de G é um matroide.

Grafo bipartido $G = (U \times V, E)$.

M_U : todos os conjuntos S de arestas de G tq no máximo uma aresta de S é incidente a cada vértice de U .

M_U é um matroide.

M_V : a coleção análoga com V no lugar de U .

Claro que M_V também é um matroide.

Exemplos de matroides

Dado um espaço vetorial, a coleção de todos os **conjuntos de vetores LI** deste espaço é um matroide.

Dado um grafo G , a coleção de arestas de todas as **florestas** de G é um matroide.

Grafo bipartido $G = (U \times V, E)$.

M_U : todos os conjuntos S de arestas de G tq no máximo uma aresta de S é incidente a cada vértice de U .

M_U é um matroide.

M_V : a coleção análoga com V no lugar de U .

Claro que M_V também é um matroide.

E $M_U \cap M_V$? É ou não é um matroide?

Exemplos de matroides

Grafo bipartido $G = (U \times V, E)$.

M_U : todos os conjuntos S de arestas de G tq no máximo uma aresta de S é incidente a cada vértice de U .

M_V : a coleção analoga com V no lugar de U .

M_U e M_V são matroides.

Exemplos de matroides

Grafo bipartido $G = (U \times V, E)$.

M_U : todos os conjuntos S de arestas de G tq no máximo uma aresta de S é incidente a cada vértice de U .

M_V : a coleção analoga com V no lugar de U .

M_U e M_V são matroides.

O que é $M_U \cap M_V$?

O que é um conjunto da coleção $M_U \cap M_V$ em G ?

Exemplos de matroides

Grafo bipartido $G = (U \times V, E)$.

M_U : todos os conjuntos S de arestas de G tq no máximo uma aresta de S é incidente a cada vértice de U .

M_V : a coleção analoga com V no lugar de U .

M_U e M_V são matroides.

O que é $M_U \cap M_V$?

O que é um conjunto da coleção $M_U \cap M_V$ em G ?

Cada conjunto de $M_U \cap M_V$ é um **emparelhamento** em G .

Exemplos de matroides

Grafo bipartido $G = (U \times V, E)$.

M_U : todos os conjuntos S de arestas de G tq no máximo uma aresta de S é incidente a cada vértice de U .

M_V : a coleção analoga com V no lugar de U .

M_U e M_V são matroides.

O que é $M_U \cap M_V$?

O que é um conjunto da coleção $M_U \cap M_V$ em G ?

Cada conjunto de $M_U \cap M_V$ é um **emparelhamento** em G .

Esta coleção é ou não é um matroide?

Exemplos de matroides

Grafo bipartido $G = (U \times V, E)$.

M_U : todos os conjuntos S de arestas de G tq no máximo uma aresta de S é incidente a cada vértice de U .

M_V : a coleção analoga com V no lugar de U .

M_U e M_V são matroides.

O que é $M_U \cap M_V$?

O que é um conjunto da coleção $M_U \cap M_V$ em G ?

Cada conjunto de $M_U \cap M_V$ é um **emparelhamento** em G .

Esta coleção é ou não é um matroide?

Não é... (nem todo emparelhamento maximal é máximo)

Mas é a **interseção** de dois matroides.

Exemplos de matroides

Grafo bipartido $G = (U \times V, E)$.

M_U : todos os conjuntos S de arestas de G tq no máximo uma aresta de S é incidente a cada vértice de U .

M_V : a coleção analoga com V no lugar de U .

M_U e M_V são matroides.

$M_U \cap M_V$ é a coleção dos **emparelhamentos** de G .

Esta coleção não é um matroide.

Exemplos de matroides

Grafo bipartido $G = (U \times V, E)$.

M_U : todos os conjuntos S de arestas de G tq no máximo uma aresta de S é incidente a cada vértice de U .

M_V : a coleção analoga com V no lugar de U .

M_U e M_V são matroides.

$M_U \cap M_V$ é a coleção dos **emparelhamentos** de G .

Esta coleção não é um matroide.

Mas é a **interseção** de dois matroides.

Exemplos de matroides

Grafo bipartido $G = (U \times V, E)$.

M_U : todos os conjuntos S de arestas de G tq no máximo uma aresta de S é incidente a cada vértice de U .

M_V : a coleção analoga com V no lugar de U .

M_U e M_V são matroides.

$M_U \cap M_V$ é a coleção dos **emparelhamentos** de G .

Esta coleção não é um matroide.

Mas é a **interseção** de dois matroides.

Existe algoritmo polinomial para encontrar um conjunto (de peso) máximo na interseção de dois matroides.

Definição alternativa de matroides

U : conjunto finito arbitrário.

\mathcal{C} : família não vazia de subconjuntos de U hereditária.

Definição alternativa de matroides

U : conjunto finito arbitrário.

\mathcal{C} : família não vazia de subconjuntos de U hereditária.

\mathcal{C} é um **matroide** se, para todo par A, B de conjuntos de \mathcal{C} para os quais $|A| < |B|$, existe $e \in B \setminus A$ tal que $A \cup \{e\} \in \mathcal{C}$.

Definição alternativa de matroides

U : conjunto finito arbitrário.

\mathcal{C} : família não vazia de subconjuntos de U hereditária.

\mathcal{C} é um **matroide** se, para todo par A, B de conjuntos de \mathcal{C} para os quais $|A| < |B|$, existe $e \in B \setminus A$ tal que $A \cup \{e\} \in \mathcal{C}$.

Esta é a definição do CLRS.

Definição alternativa de matroides

U : conjunto finito arbitrário.

\mathcal{C} : família não vazia de subconjuntos de U hereditária.

\mathcal{C} é um **matroide** se, para todo par A, B de conjuntos de \mathcal{C} para os quais $|A| < |B|$, existe $e \in B \setminus A$ tal que $A \cup \{e\} \in \mathcal{C}$.

Esta é a definição do CLRS.

Exercício: Mostre que esta definição é análoga a anterior.