# MAC 6711 - Tópicos de Análise de Algoritmos

*Departamento de Ciência da Computação*

Primeiro semestre de 2010

## Lista 3

1. Exercícios C.2-2, C.2-3, C.2-4, C.2-7, C.2-8 e C.2-9.

2. Exercícios C.3-2 e C.3-8.

3. Considere o seguinte algoritmo para calcular o máximo de um vetor $v[1\,..\,n]$.

   **Algoritmo** Máximo $(v, n)$
   1. $m \leftarrow v[1]$
   2. **para** $i = 2$ **até** $n$ **faça**
   3. **se** $v[i] > m$
   4. **então** $m \leftarrow v[i]$
   5. **devolva** $m$

   Suponha que $v$ é uma permutação escolhida uniformemente dentre todas as permutações de 1 a $n$. Qual é o número esperado de vezes que a linha 4 do algoritmo acima é executada?

4. Considere o seguinte algoritmo que determina o segundo maior elemento de um vetor $v[1\,..\,n]$ com $n \geq 2$ números positivos distintos.

   **Algoritmo** Máximo $(v, n)$
   1. $maior \leftarrow 0$
   2. *segundo_maior* $\leftarrow 0$
   3. **para** $i \leftarrow 1$ **até** $n$ **faça**
   4. **se** $v[i] > maior$
   5. **então** *segundo_maior* $\leftarrow maior$
   6. $maior \leftarrow v[i]$
   7. **senão se** $v[i] >$ *segundo_maior*
   8. **então** *segundo_maior* $\leftarrow v[i]$
   9. **devolva** *segundo_maior*

   Suponha que $v$ é uma permutação de 1 a $n$ escolhida ao acaso dentre todas as permutações de 1 a $n$, de acordo com a distribuição uniforme de probabilidade. Seja $X$ o número de vezes que a variável *segundo_maior* é alterada (ou seja, o número de execuções das linhas 5 e 8 do algoritmo) numa chamada de Máximo$(v, n)$. Note que $X$ é uma variável aleatória. Calcule o valor esperado de $X$.

5. Considere o seguinte algoritmo que calcula o maior e o menor elemento de um vetor $v[1\,..\,n]$ com elementos distintos.

   **Algoritmo** MaiorMenor $(v, n)$
   1. *maior* $\leftarrow v[1]$
   2. *menor* $\leftarrow v[1]$
   3. **para** $i \leftarrow 2$ **até** $n$ **faça**
   4. **se** $v[i] >$ *maior*
   5. **então** *maior* $\leftarrow v[i]$
   6. **senão se** $v[i] <$ *menor*
   7. **então** *menor* $\leftarrow v[i]$
   8. **devolva** *maior*, *menor*

Suponha que a entrada do algoritmo é uma permutação de 1 a $n$ escolhida uniformemente dentre todas as permutações de 1 a $n$.

Qual é o número esperado de comparações executadas na linha 6 do algoritmo? Qual é o número esperado de atribuições efetuadas na linha 7 do algoritmo?

6. Considere dois sorteios aleatórios independentes e uniformes, de um inteiro entre 1 e $k$, obtendo valores $X_1$ e $X_2$.

   (a) Quanto é $\mathbf{E}[\max\{X_1, X_2\}]$ e $\mathbf{E}[\min\{X_1, X_2\}]$?

   (b) Verifique que $\mathbf{E}[\max\{X_1, X_2\}] + \mathbf{E}[\min\{X_1, X_2\}] = \mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2]$.

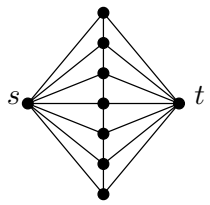
   (c) Prove que a identidade acima vale quaisquer que sejam as variáveis aleatórias $X_1$ e $X_2$.

7. Exercício 1 do cap. 13 do KT.

8. Exercício 12 do cap. 13 do KT.

9. Exercício 15 do cap. 13 do KT.

10. Considere a seguinte instância do $s$-$t$ corte.




Mostre que a probabilidade do algoritmo de Karger sugerido no exercício 12 do KT dar uma resposta correta, ou seja, um $s$-$t$ corte mínimo, é exponencialmente pequena no número $n$ de vértices deste grafo.