Geometria Computacional

Cristina G. Fernandes

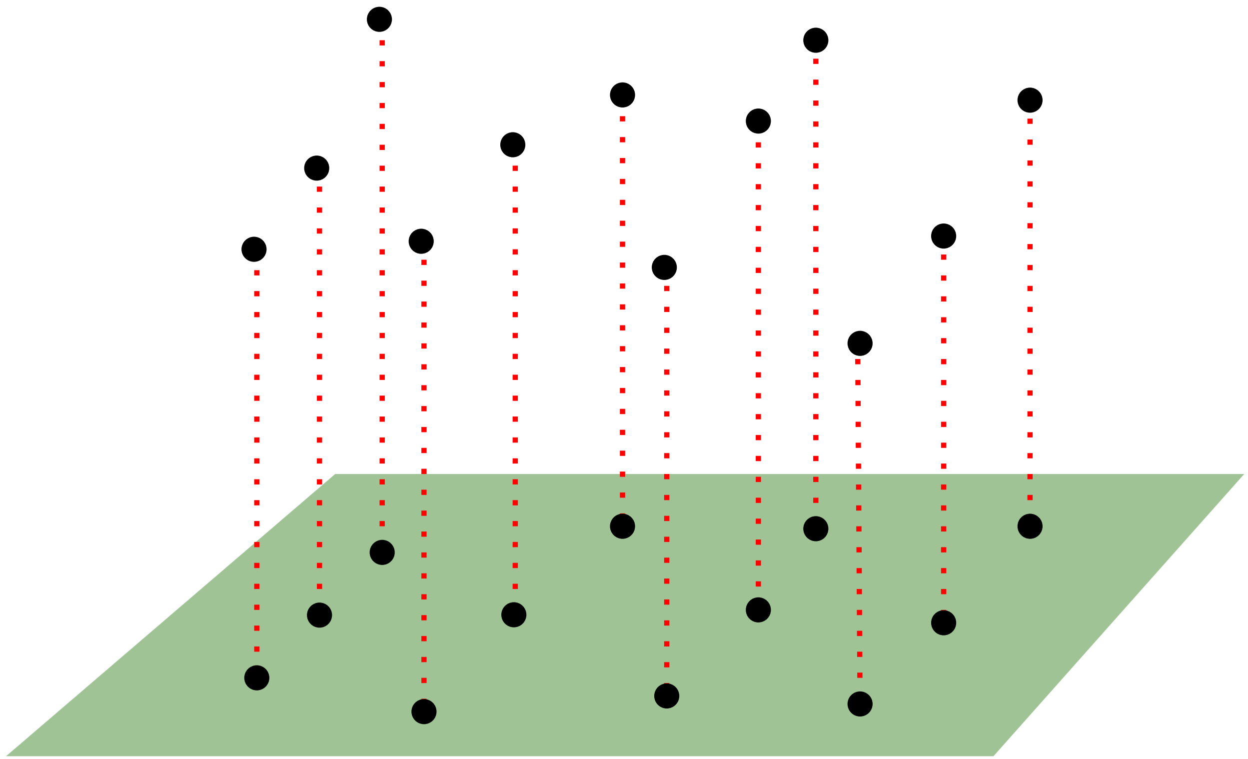
Departamento de Ciência da Computação do IME-USP

http://www.ime.usp.br/~cris/

segundo semestre de 2011

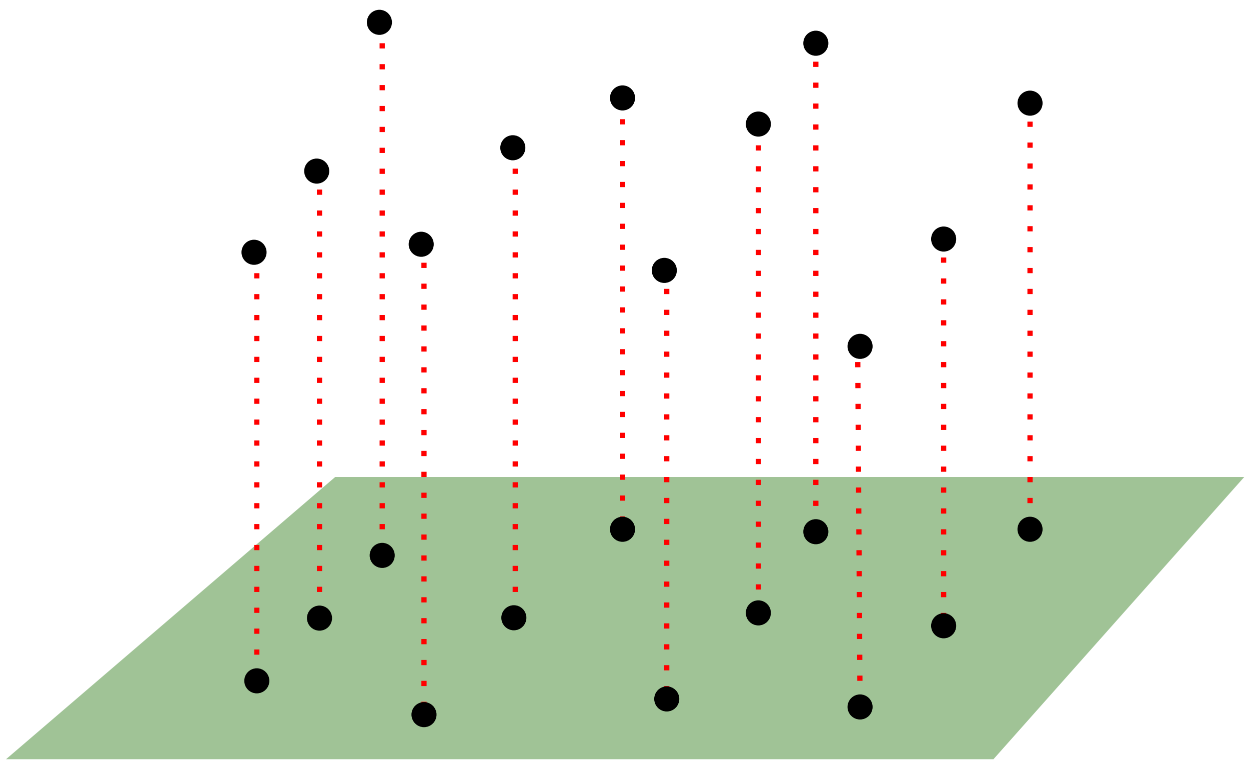
Relevos

Medimos a altura de vários pontos em um terreno.



Relevos

Medimos a altura de vários pontos em um terreno.

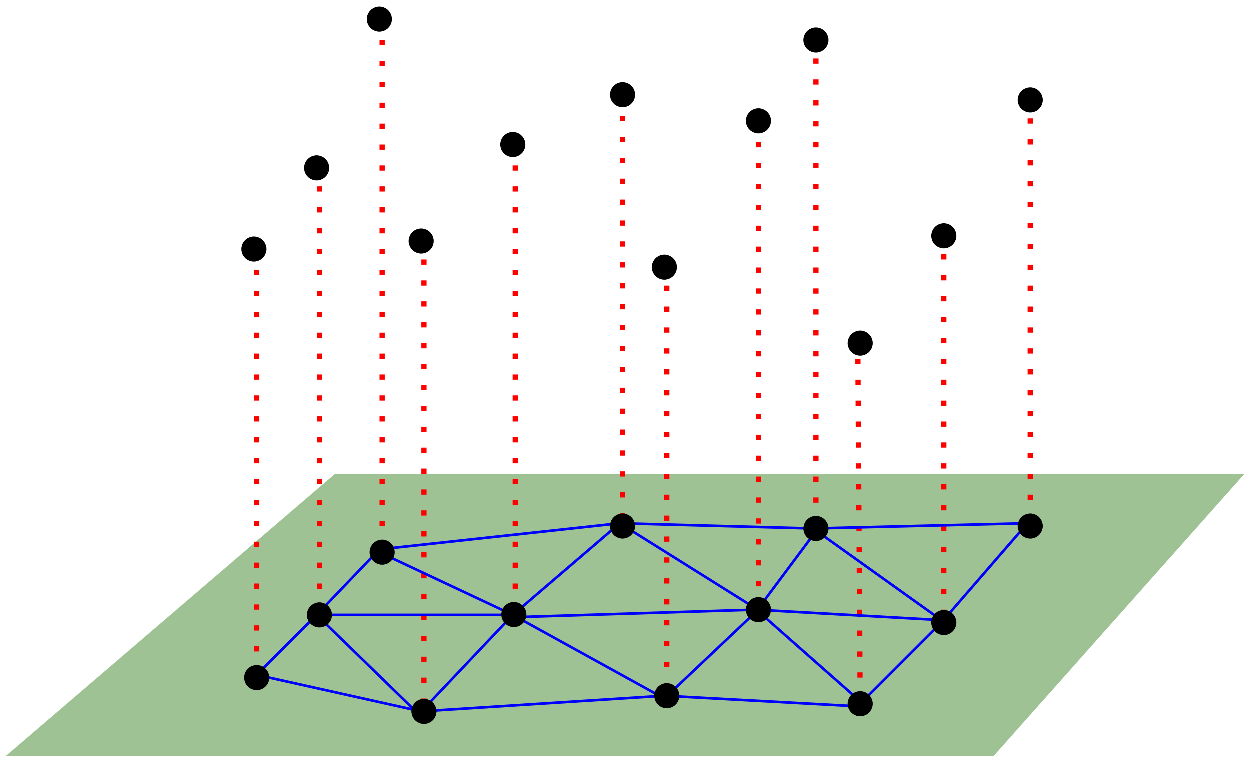


Queremos estimar o relevo do terreno por uma superfície.

Como fazer?

Relevos

Medimos a altura de vários pontos em um terreno.



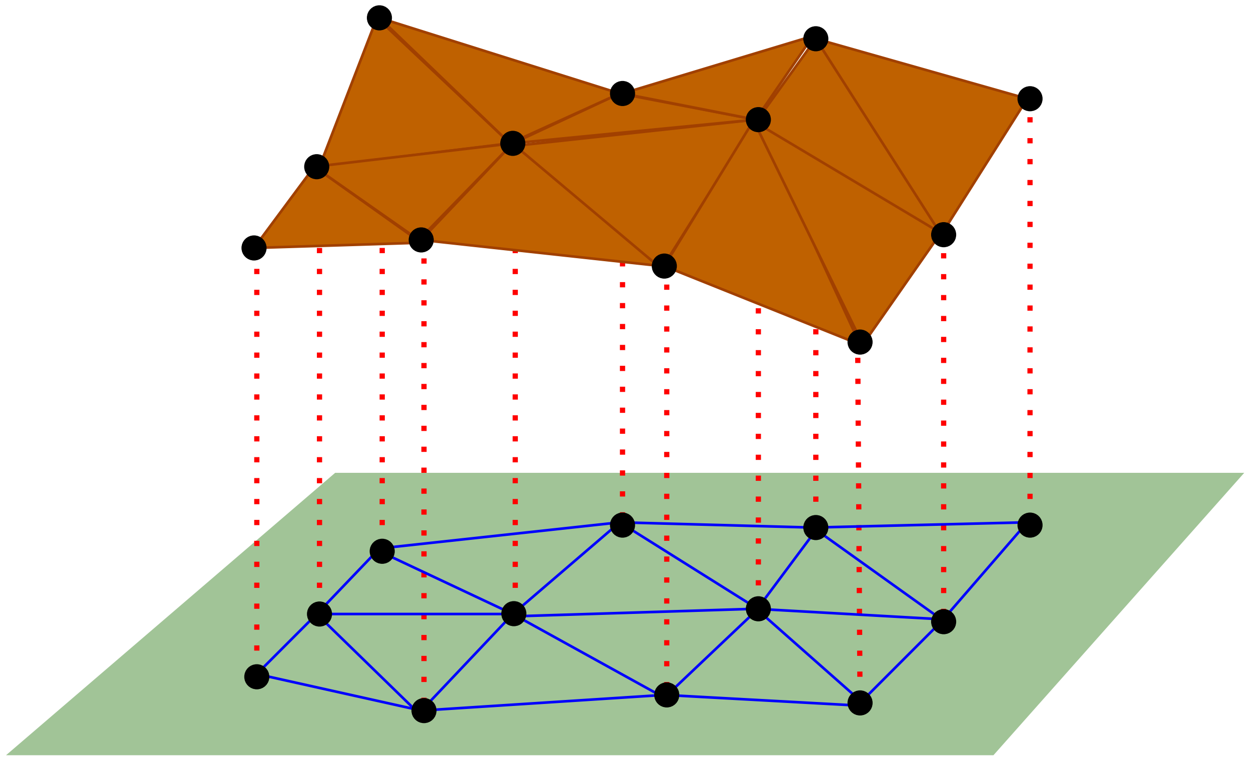
Queremos estimar o relevo do terreno por uma superfície.

Como fazer?

Triangularizamos a projeção no plano e...

Relevos

Medimos a altura de vários pontos em um terreno.

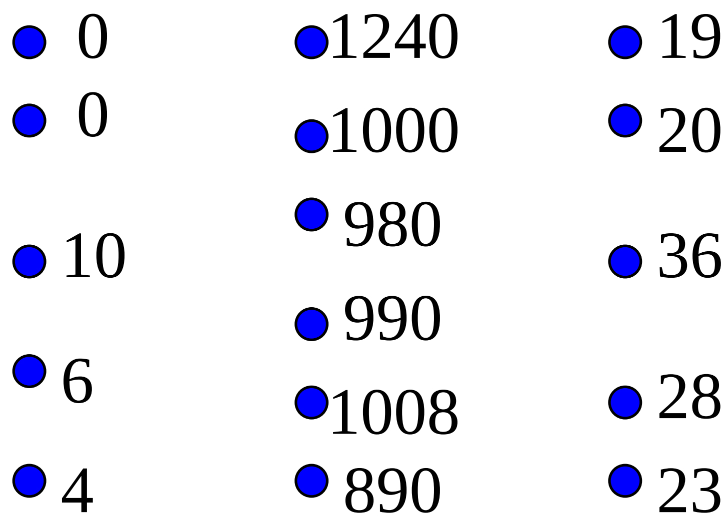


Queremos estimar o relevo do terreno por uma superfície.

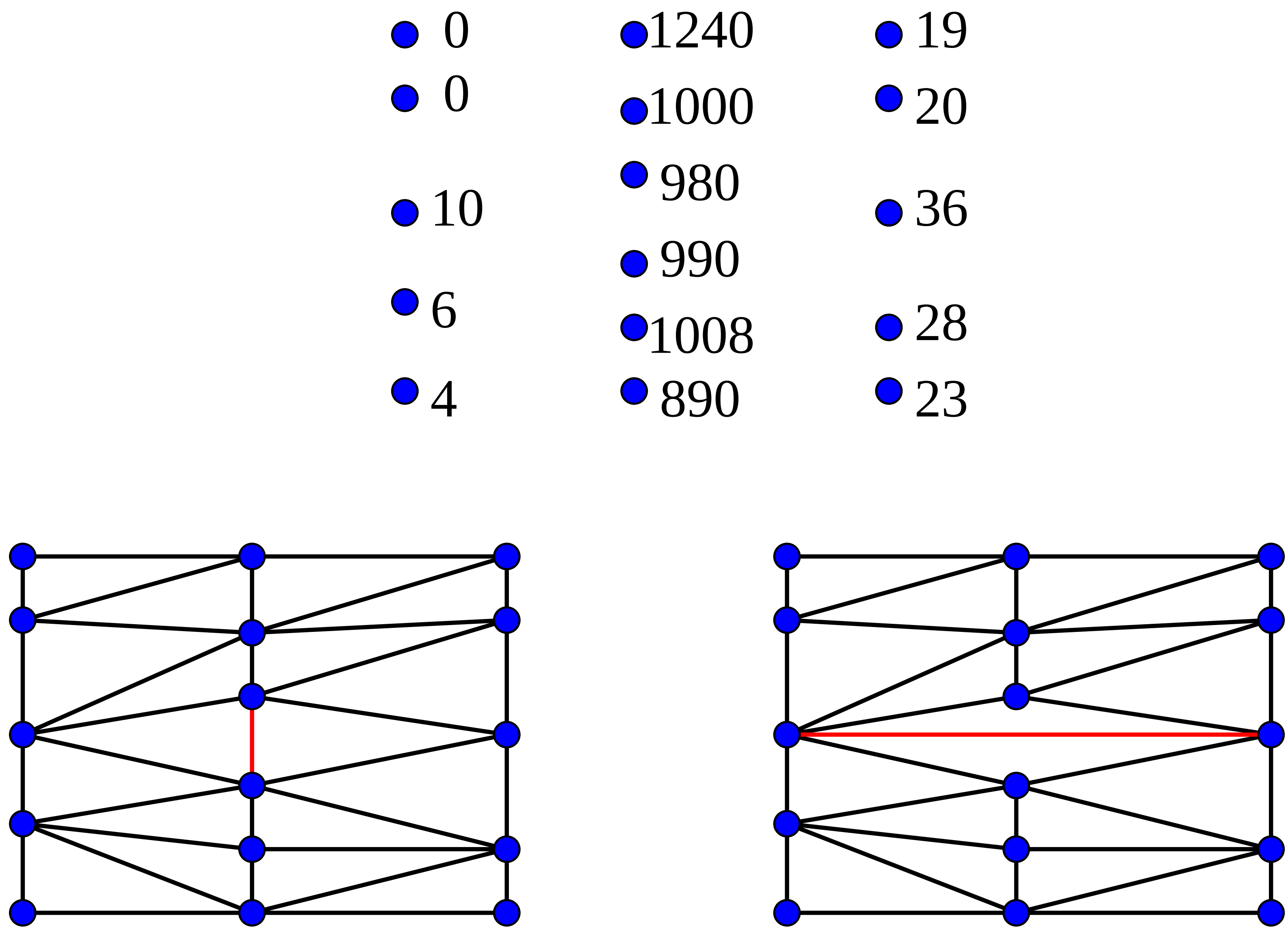
Como fazer?

Triangularizamos a projeção no plano e levantamos!

Qual triangulação é melhor?



Qual triangulação é melhor?



Vetor de ângulos

P: conjunto de pontos
T: triangulação de P
m: número de triângulos em T

$A(T)$: vetor de ângulos $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{3m})$ de T
onde os α_i são os ângulos internos
dos m triângulos de T, em ordem não-decrescente.

Vetor de ângulos

P: conjunto de pontos
T: triangulação de P
m: número de triângulos em T

$A(T)$: vetor de ângulos $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{3m})$ de T
onde os α_i são os ângulos internos
dos m triângulos de T, em ordem não-decrescente.

Seja T' uma outra triangulação de P.

Escrevemos $A(T) > A(T')$
se $A(T)$ é lexicograficamente maior que $A(T')$.

Vetor de ângulos

P: conjunto de pontos
T: triangulação de P
m: número de triângulos em T

$A(T)$: vetor de ângulos $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{3m})$ de T
onde os α_i são os ângulos internos
dos m triângulos de T, em ordem não-decrescente.

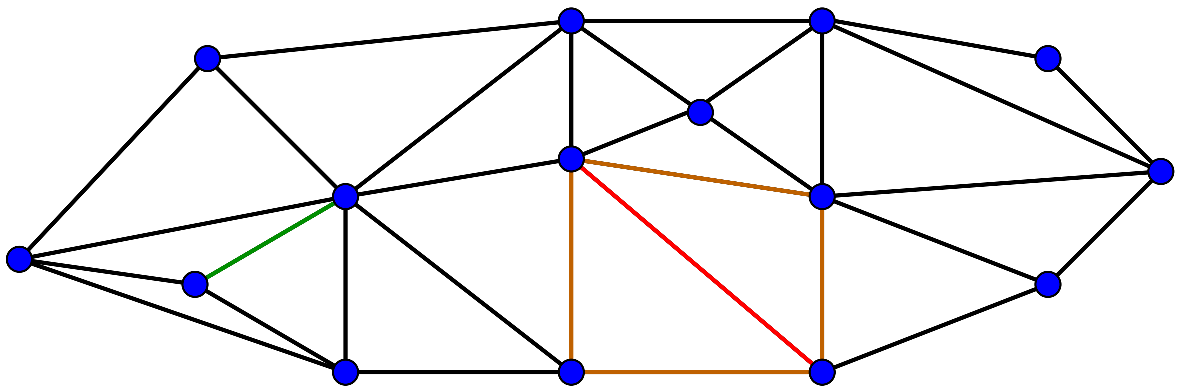
Seja T' uma outra triangulação de P.

Escrevemos $A(T) > A(T')$
se $A(T)$ é lexicograficamente maior que $A(T')$.

T é ângulo-ótima
se $A(T) \geq A(T')$ para toda triangulação T' de P.

Triangulação legal

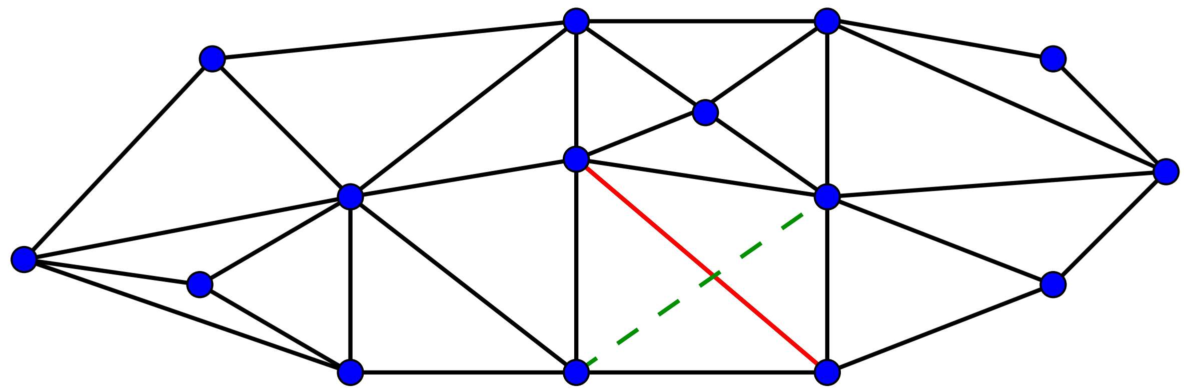
T: triangulação da coleção P de pontos do plano.



e: aresta interna de T cujos triângulos de T que a compartilham formam um quadrilátero convexo (a aresta verde não satisfaz esta condição)

Triangulação legal

T: triangulação da coleção P de pontos do plano.



e: aresta interna de T cujos triângulos de T que a compartilham formam um quadrilátero convexo

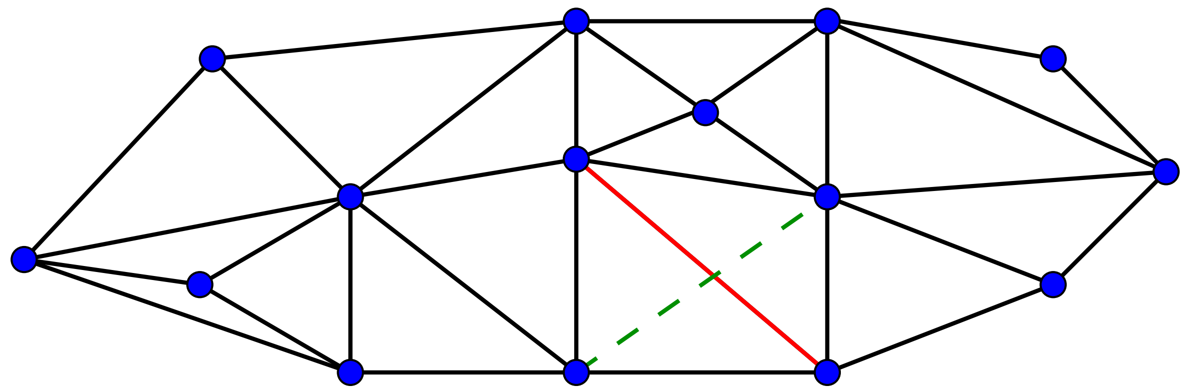
f: outra diagonal do quadrilátero de e

$(\alpha_1, \ldots, \alpha_6)$: sequência de ângulos ordenados dos Δs de e
$(\beta_1, \ldots, \beta_6)$: sequência de ângulos ordenados dos Δs de f

e é ilegal se $(\beta_1, \ldots, \beta_6) > (\alpha_1, \ldots, \alpha_6)$

Triangulação legal

T: triangulação da coleção P de pontos do plano.



e: aresta interna de T cujos triângulos de T que a compartilham formam um quadrilátero convexo

f: outra diagonal do quadrilátero de e

$(\alpha_1, \ldots, \alpha_6)$: sequência de ângulos ordenados dos Δs de e
$(\beta_1, \ldots, \beta_6)$: sequência de ângulos ordenados dos Δs de f

e é ilegal se $(\beta_1, \ldots, \beta_6) > (\alpha_1, \ldots, \alpha_6)$

T é legal se não tem arestas ilegais

Triangulação de Delaunay

O grafo de Delaunay $DG(P)$ é o grafo plano que tem como conjunto de vértices os pontos de P e uma aresta entre os pontos u e v, representada pelo segmento uv, se $\mathcal{V}(u)$ e $\mathcal{V}(v)$ compartilham uma aresta de $\mathrm{Vor}(P)$.

Triangulação de Delaunay

O grafo de Delaunay $DG(P)$ é o grafo plano que tem como conjunto de vértices os pontos de P e uma aresta entre os pontos u e v, representada pelo segmento uv, se $\mathcal{V}(u)$ e $\mathcal{V}(v)$ compartilham uma aresta de $\mathrm{Vor}(P)$.

Qualquer triangulação de $DG(P)$ é chamada de triangulação de Delaunay.

Veja que, se P está em posição geral, então os vértices de $\mathrm{Vor}(P)$ têm grau 3 e $DG(P)$ já é uma triangulação de P: a sua única triangulação de Delaunay.

Triangulação de Delaunay

O grafo de Delaunay $DG(P)$ é o grafo plano que tem como conjunto de vértices os pontos de P e uma aresta entre os pontos u e v, representada pelo segmento uv, se $\mathcal{V}(u)$ e $\mathcal{V}(v)$ compartilham uma aresta de $\mathrm{Vor}(P)$.

Qualquer triangulação de $DG(P)$ é chamada de triangulação de Delaunay.

Veja que, se P está em posição geral, então os vértices de $\mathrm{Vor}(P)$ têm grau 3 e $DG(P)$ já é uma triangulação de P: a sua única triangulação de Delaunay.

Teorema. Uma triangulação de P é legal se e somente se é uma triangulação de Delaunay de P.

Relações

É fácil ver que
se T é uma triangulação ângulo-ótima, então T é legal.

Relações

É fácil ver que
se T é uma triangulação ângulo-ótima, então T é legal.

Mas então...
toda triangulação ângulo-ótima é de Delaunay!

Relações

É fácil ver que
se T é uma triangulação ângulo-ótima, então T é legal.

Mas então...
toda triangulação ângulo-ótima é de Delaunay!

Em particular, se P está em posição geral,
$DG(P)$ é a única triangulação ângulo-ótima de P!

Relações

É fácil ver que
se T é uma triangulação ângulo-ótima, então T é legal.

Mas então...
toda triangulação ângulo-ótima é de Delaunay!

Em particular, se P está em posição geral,
$DG(P)$ é a única triangulação ângulo-ótima de P!

Caso P não esteja em posição geral,
suas triangulações de Delaunay têm seus vetores de ângulos parecidos, e com a primeira coordenada igual.

Ou seja,
triangulações de Delaunay maximizam o ângulo mínimo!