

# Geometria Computacional

**Cristina G. Fernandes**

Departamento de Ciência da Computação do IME-USP

<http://www.ime.usp.br/~cris/>

segundo semestre de 2011

# Ponto $q$ está no polígono?

$P$  convexo

# Ponto $q$ está no polígono?

$P$  convexo

Algoritmo trivial:

verifique se  $q$  está à esquerda de todas as arestas de  $P$

# Ponto $q$ está no polígono?

$P$  convexo

**Algoritmo trivial:**

verifique se  $q$  está à esquerda de todas as arestas de  $P$

**Complexidade:** linear

# Ponto $q$ está no polígono?

$P$  convexo

Algoritmo trivial:

verifique se  $q$  está à esquerda de todas as arestas de  $P$

Complexidade: linear

Algo mais rápido?

# Ponto $q$ está no polígono?

$P$  convexo

Algoritmo trivial:

verifique se  $q$  está à esquerda de todas as arestas de  $P$

Complexidade: linear

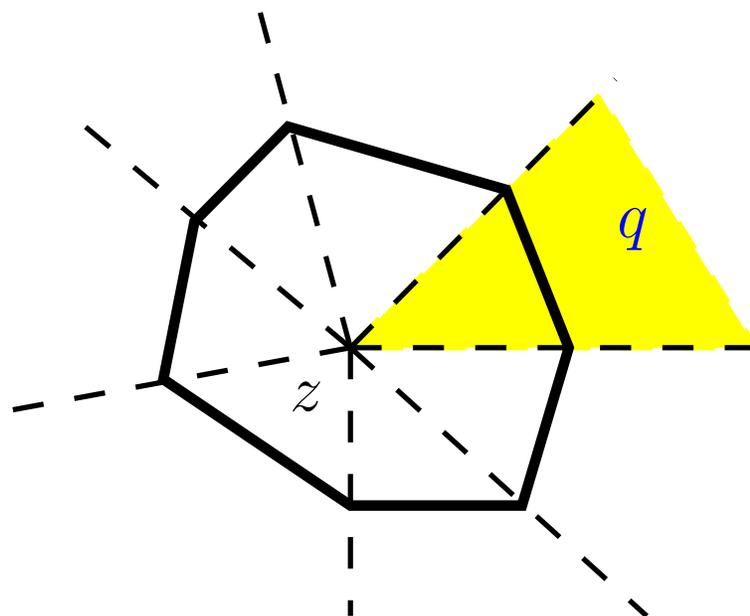
Algo mais rápido?

Várias *queries*:

pré-processamento linear e *queries* usando busca binária!

Procure a fatia onde  $q$  está.

$q$  está à esquerda ou à direita da aresta na fatia?



# Ponto $q$ está no polígono?

E se  $P$  não for **convexo**?

# Ponto $q$ está no polígono?

E se  $P$  não for **convexo**?

Os dois algoritmos anteriores funcionam para alguns polígonos não convexos.

Quais?

# Ponto $q$ está no polígono?

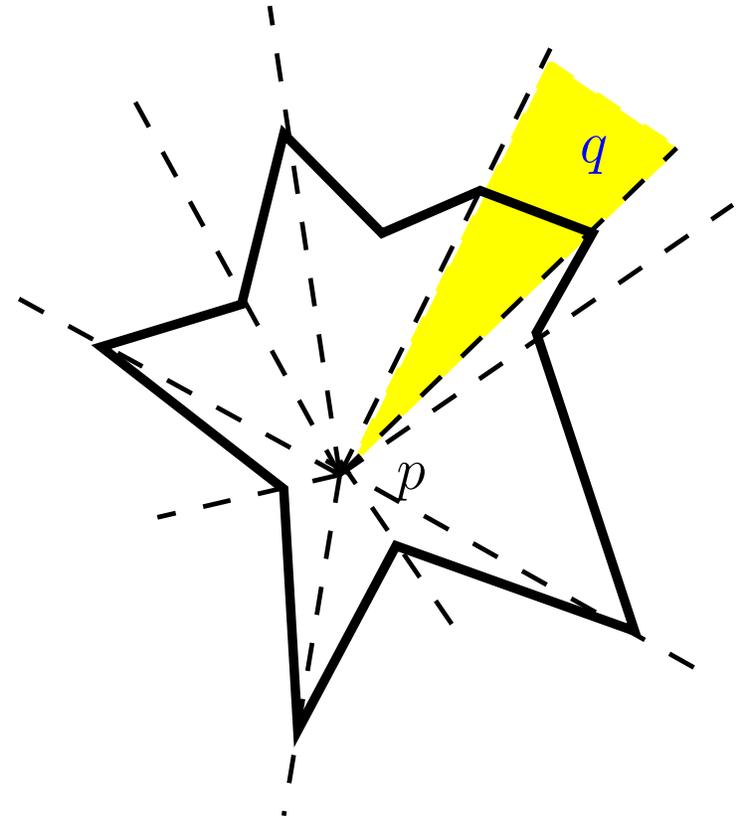
E se  $P$  não for **convexo**?

Os dois algoritmos anteriores funcionam para alguns polígonos não convexos.

Quais?

Polígonos estrela  
(star polygon)

$P$  tem um ponto  $p$  que enxerga todos os outros pontos de  $P$ .



# Polígonos arbitrários

**Problema:** Dados  $P$  e  $q$ , decidir se  $q$  está ou não em  $P$ .

# Polígonos arbitrários

**Problema:** Dados  $P$  e  $q$ , decidir se  $q$  está ou não em  $P$ .

Dois algoritmos **lineares**:

- número de voltas (**winding number**)
- cruzamentos de um raio (**ray crossings**)

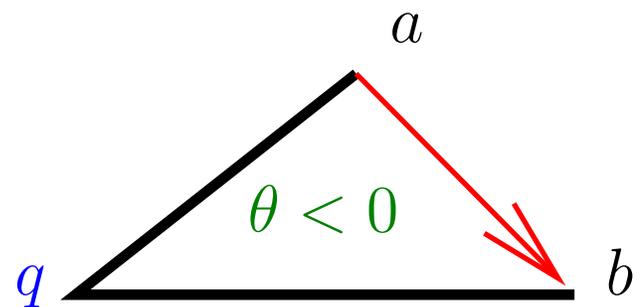
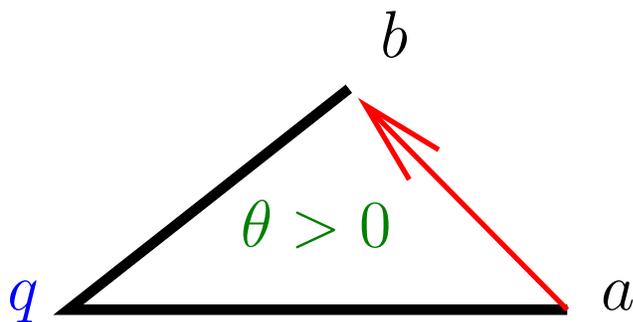
# Polígonos arbitrários

**Problema:** Dados  $P$  e  $q$ , decidir se  $q$  está ou não em  $P$ .

Dois algoritmos **lineares**:

- número de voltas (**winding number**)
- cruzamentos de um raio (**ray crossings**)

Ângulo **com sinal** de  $\vec{ab}$  em relação a  $q$ :



# Winding number

**Problema:** Dados  $P$  e  $q$ , decidir se  $q$  está ou não em  $P$ .

# Winding number

**Problema:** Dados  $P$  e  $q$ , decidir se  $q$  está ou não em  $P$ .

Calcule a soma dos ângulos com sinal de cada aresta de  $\delta P$  em relação a  $q$ .

# Winding number

**Problema:** Dados  $P$  e  $q$ , decidir se  $q$  está ou não em  $P$ .

Calcule a soma dos ângulos com sinal de cada aresta de  $\delta P$  em relação a  $q$ .

Esse número é ou zero ou  $2\pi$ .

# Winding number

**Problema:** Dados  $P$  e  $q$ , decidir se  $q$  está ou não em  $P$ .

Calcule a soma dos ângulos com sinal de cada aresta de  $\delta P$  em relação a  $q$ .

Esse número é ou zero ou  $2\pi$ .

**Winding number:** essa soma dividida por  $2\pi$

# Winding number

**Problema:** Dados  $P$  e  $q$ , decidir se  $q$  está ou não em  $P$ .

Calcule a soma dos ângulos com sinal de cada aresta de  $\delta P$  em relação a  $q$ .

Esse número é ou zero ou  $2\pi$ .

**Winding number:** essa soma dividida por  $2\pi$

Se o winding number é zero,  $q$  não está em  $P$ .  
Senão  $q$  está em  $P$ .

# Ray crossings

**Problema:** Dados  $P$  e  $q$ , decidir se  $q$  está ou não em  $P$ .

# Ray crossings

**Problema:** Dados  $P$  e  $q$ , decidir se  $q$  está ou não em  $P$ .

$R$ : raio horizontal saindo de  $q$  para  $x = +\infty$

Quantas vezes que  $R$  cruza  $\delta P$ ?

# Ray crossings

**Problema:** Dados  $P$  e  $q$ , decidir se  $q$  está ou não em  $P$ .

$R$ : raio horizontal saindo de  $q$  para  $x = +\infty$

Quantas vezes que  $R$  cruza  $\delta P$ ?

Quantas arestas de  $\delta P$  o raio  $R$  cruza?

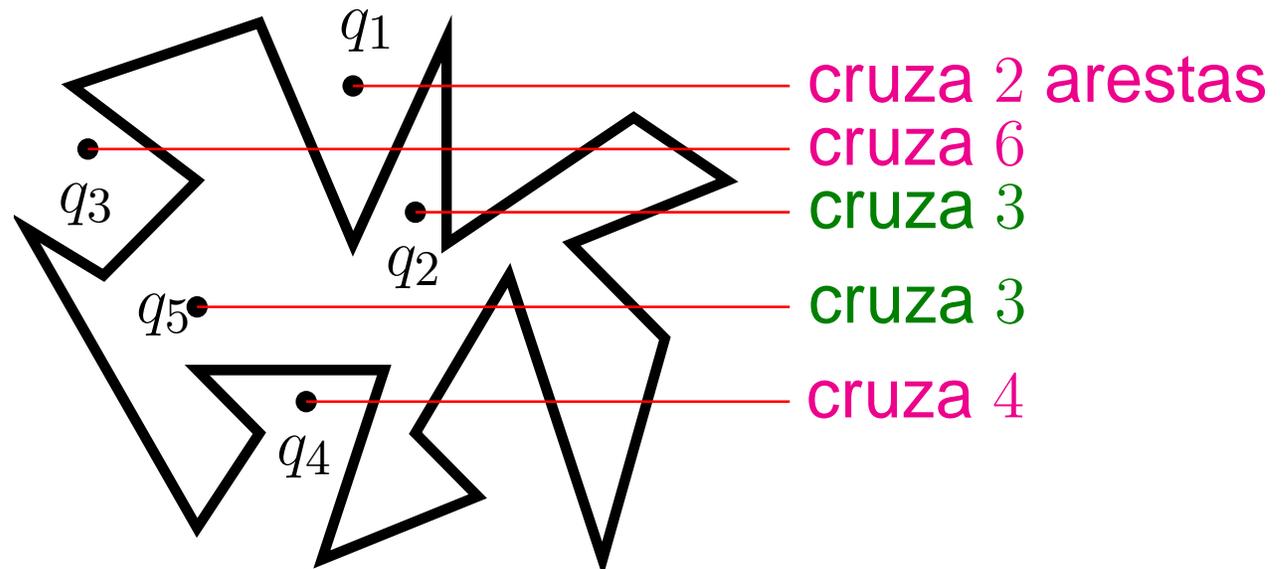
# Ray crossings

**Problema:** Dados  $P$  e  $q$ , decidir se  $q$  está ou não em  $P$ .

$R$ : raio horizontal saindo de  $q$  para  $x = +\infty$

Quantas vezes que  $R$  cruza  $\delta P$ ?

Quantas arestas de  $\delta P$  o raio  $R$  cruza?



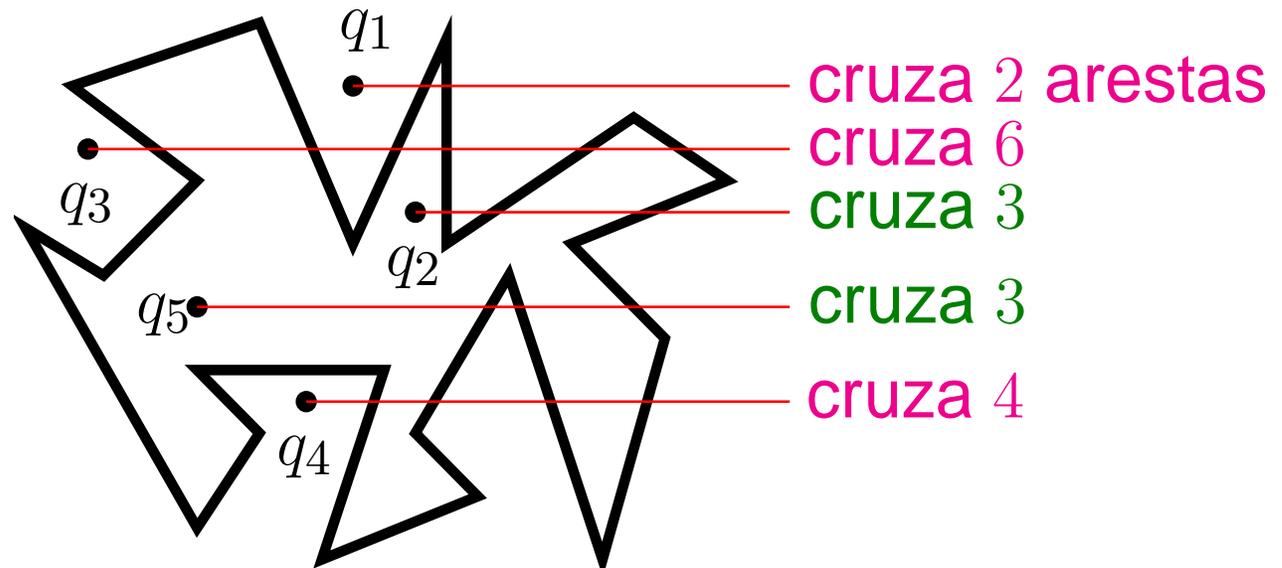
# Ray crossings

**Problema:** Dados  $P$  e  $q$ , decidir se  $q$  está ou não em  $P$ .

$R$ : raio horizontal saindo de  $q$  para  $x = +\infty$

Quantas vezes que  $R$  cruza  $\delta P$ ?

Quantas arestas de  $\delta P$  o raio  $R$  cruza?



Se cruza um número **par** de arestas,  $q$  **não está em  $P$** .

Senão  $q$  **está em  $P$** .

# Casos especiais

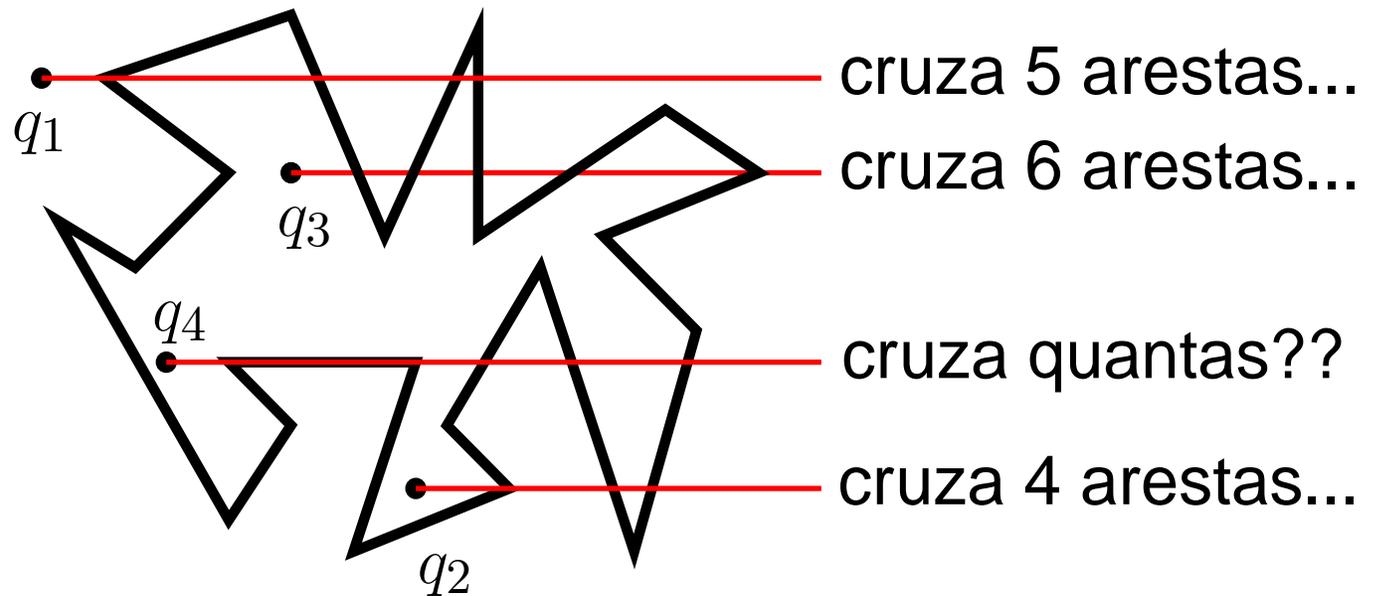
$R$ : raio horizontal saindo de  $q$  para  $x = +\infty$

Quantas arestas de  $\delta P$  o raio  $R$  cruza?

# Casos especiais

$R$ : raio horizontal saindo de  $q$  para  $x = +\infty$

Quantas arestas de  $\delta P$  o raio  $R$  cruza?

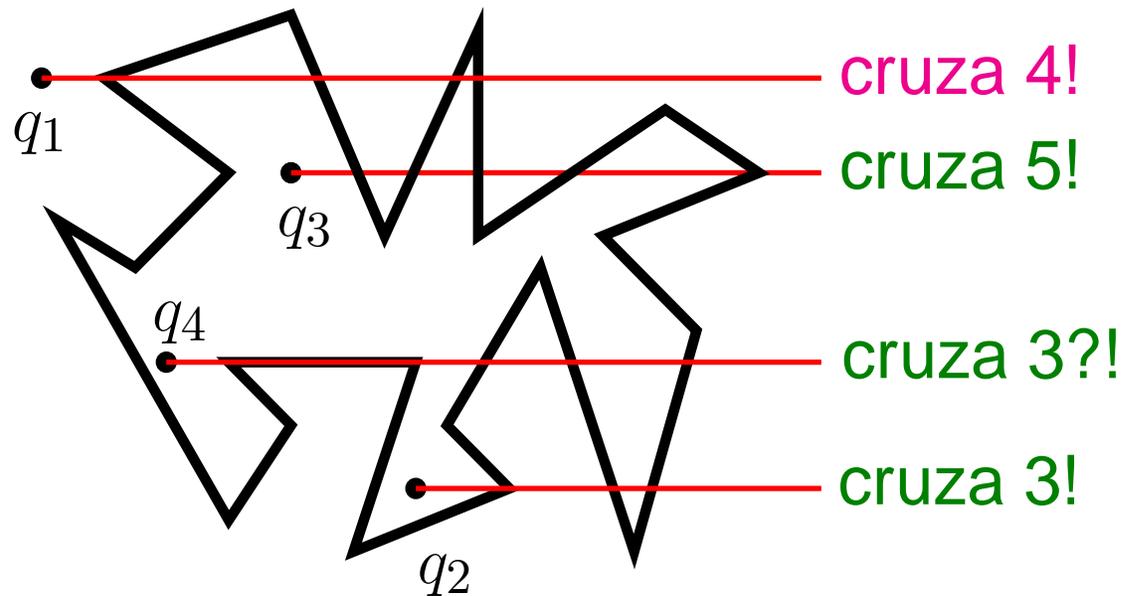


Como tratar destes casos?

# Casos especiais

$R$ : raio horizontal saindo de  $q$  para  $x = +\infty$

Quantas arestas de  $\delta P$  o raio  $R$  cruza?



Considere cada aresta  
fechada no extremo inferior e aberta no superior!

**Cruza:** um extremo estritamente acima, outro abaixo.

# Primeira versão do algoritmo

Suponha que  $q$  é a origem.

Em-Polígono-v0( $P, n$ )

```
1   $c \leftarrow 0$ 
2  para  $i \leftarrow 0$  até  $n - 1$  faça
3     $j \leftarrow (i + n - 1) \bmod n$  ▷ vértice  $i - 1$ 
4    se ( $P[i][Y] > 0$  e  $P[j][Y] \leq 0$ )
      ou ( $P[j][Y] > 0$  e  $P[i][Y] \leq 0$ )
5      então  $x \leftarrow (P[i][X] * P[j][Y] - P[j][X] * P[i][Y])$ 
               $/(P[j][Y] - P[i][Y])$  ▷ intersecção c/ eixo  $x$ 
6          se  $x > 0$ 
7              então  $c \leftarrow c + 1$ 
8  se  $c$  é ímpar
9      então devolva DENTRO
10     senão devolva FORA
```

# Primeira versão do algoritmo

Suponha que  $q$  é a origem.

Em-Polígono-v0( $P, n$ )

```
1   $c \leftarrow 0$ 
2  para  $i \leftarrow 0$  até  $n - 1$  faça
3     $j \leftarrow (i + n - 1) \bmod n$  ▷ vértice  $i - 1$ 
4    se ( $P[i][Y] > 0$  e  $P[j][Y] \leq 0$ )
      ou ( $P[j][Y] > 0$  e  $P[i][Y] \leq 0$ )
5      então  $x \leftarrow (P[i][X] * P[j][Y] - P[j][X] * P[i][Y])$ 
               $/(P[j][Y] - P[i][Y])$  ▷ intersecção c/ eixo  $x$ 
6          se  $x > 0$ 
7              então  $c \leftarrow c + 1$ 
8  se  $c$  é ímpar
9      então devolva DENTRO
10     senão devolva FORA
```

Nem sempre funciona quando  $q$  está na fronteira de  $P$ ...

# Pontos na fronteira

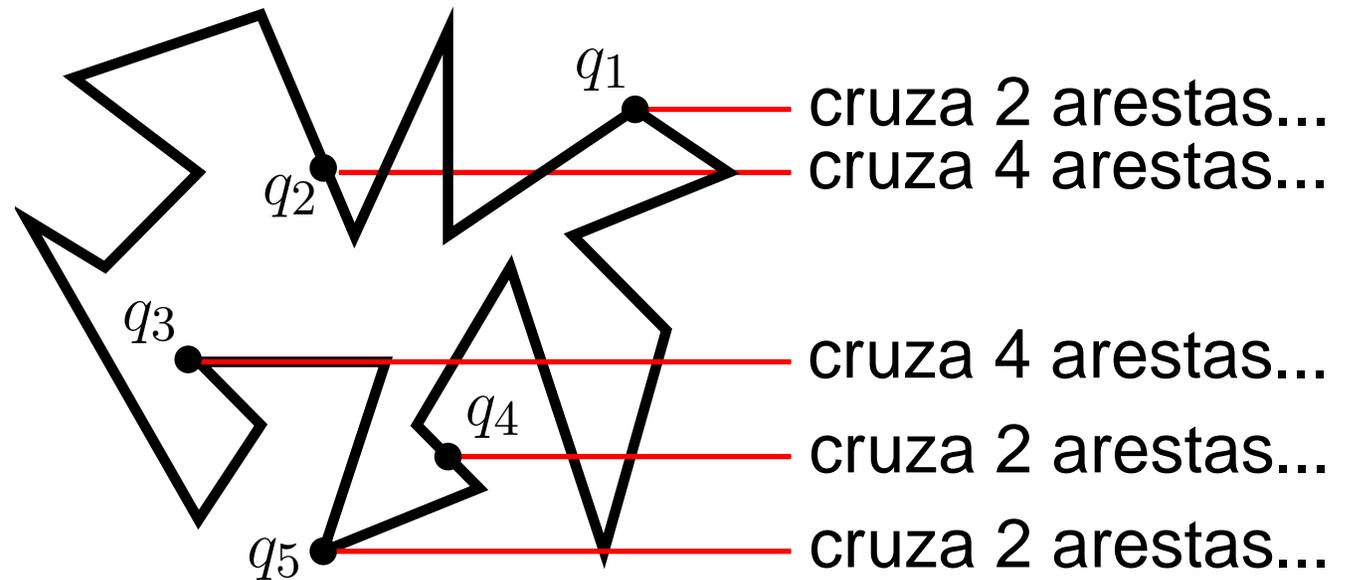
$R$ : raio horizontal saindo de  $q$  para  $x = +\infty$

Quantas arestas de  $\delta P$  o raio  $R$  cruza?

# Pontos na fronteira

$R$ : raio horizontal saindo de  $q$  para  $x = +\infty$

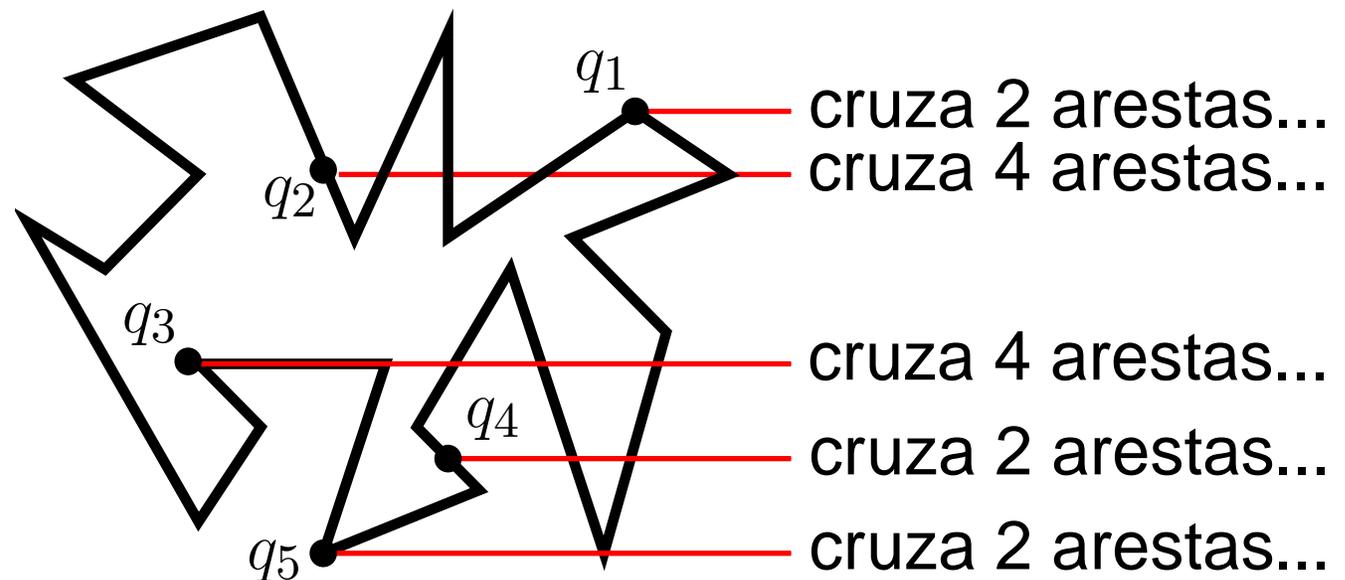
Quantas arestas de  $\delta P$  o raio  $R$  cruza?



# Pontos na fronteira

$R$ : raio horizontal saindo de  $q$  para  $x = +\infty$

Quantas arestas de  $\delta P$  o raio  $R$  cruza?



Erra em alguns pontos da fronteira,  
concluindo que eles estão fora de  $P$ ...

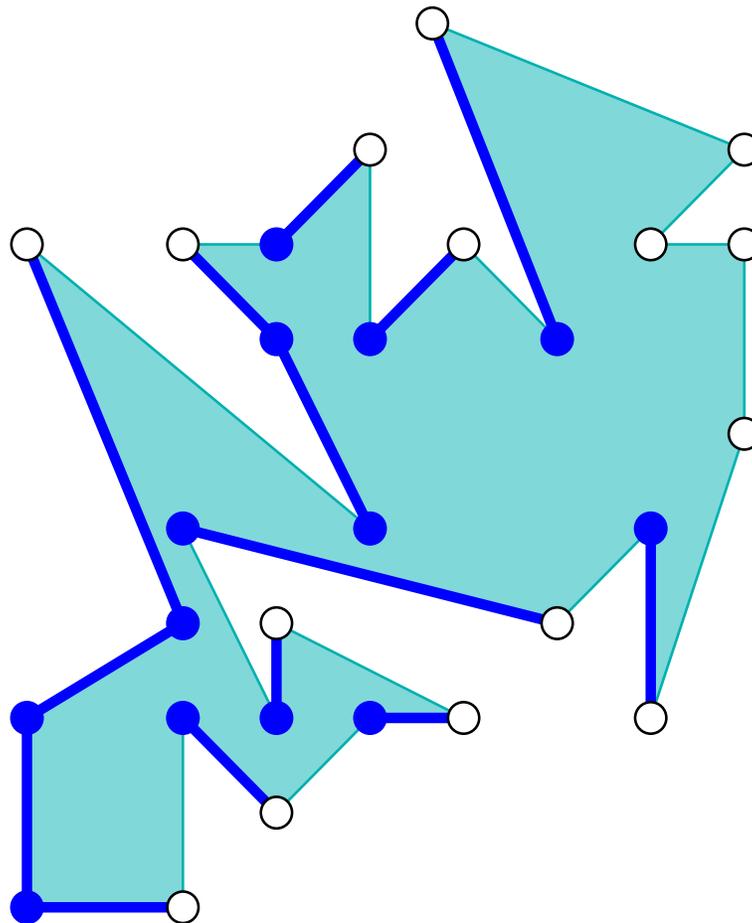
# Casos especiais

Se aresta é  
fechada no extremo inferior e aberta no superior.

# Casos especiais

Se aresta é  
fechada no extremo inferior e aberta no superior.

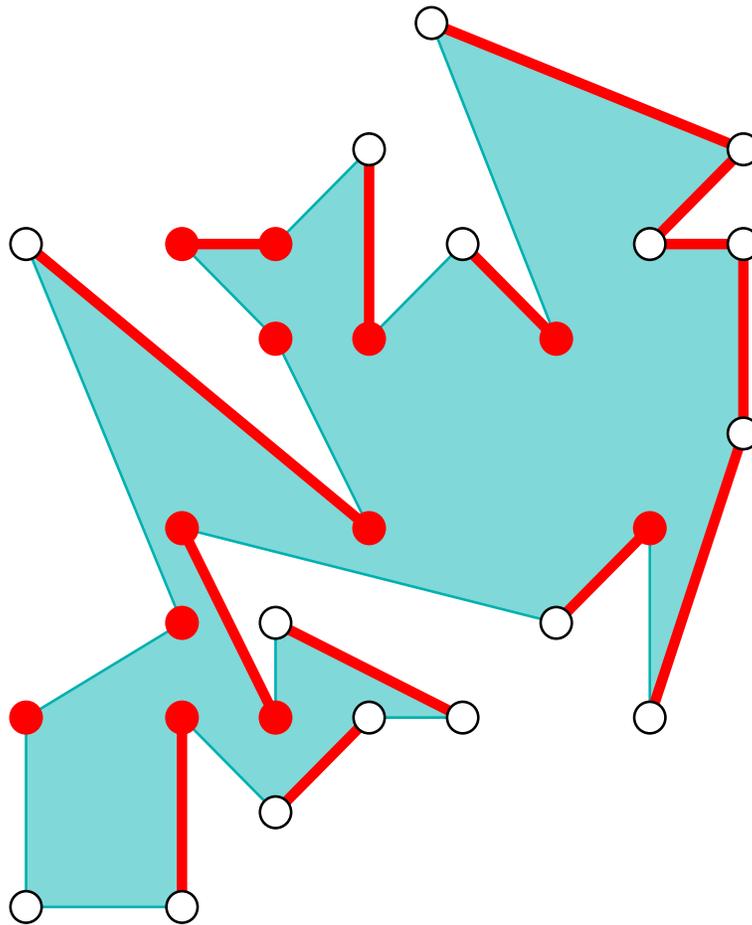
Pontos “em  $P$ ”:



# Casos especiais

Agora considere ao contrário: que uma aresta é **fechada no extremo superior e aberta no inferior** e que  $R$  vai para  $x = -\infty$ .

Pontos “em  $P$ ”:



# Casos especiais

Primeira maneira:

acerta no interior das arestas da esquerda e de baixo.

Segunda maneira:

acerta no interior das arestas da direita e de cima.

# Casos especiais

Primeira maneira:

acerta no interior das arestas da esquerda e de baixo.

Segunda maneira:

acerta no interior das arestas da direita e de cima.

Interpretando das duas maneiras,  
acertamos a resposta no interior de todas as arestas!

# Casos especiais

Primeira maneira:

acerta no interior das arestas da esquerda e de baixo.

Segunda maneira:

acerta no interior das arestas da direita e de cima.

Interpretando das duas maneiras,  
acertamos a resposta no interior de todas as arestas!

Restam os vértices...

Quando  $q$  é um dos vértices de  $P$ ,  
a resposta pode ainda estar errada...

# Casos especiais

Primeira maneira:

acerta no interior das arestas da esquerda e de baixo.

Segunda maneira:

acerta no interior das arestas da direita e de cima.

Interpretando das duas maneiras,  
acertamos a resposta no interior de todas as arestas!

Restam os vértices...

Quando  $q$  é um dos vértices de  $P$ ,  
a resposta pode ainda estar errada...

Faça um teste em separado  
para ver se  $q$  não é um dos vértices de  $P$ .

