

# Geometria Computacional

**Cristina G. Fernandes**

Departamento de Ciência da Computação do IME-USP

<http://www.ime.usp.br/~cris/>

segundo semestre de 2009

# Polígonos monótonos

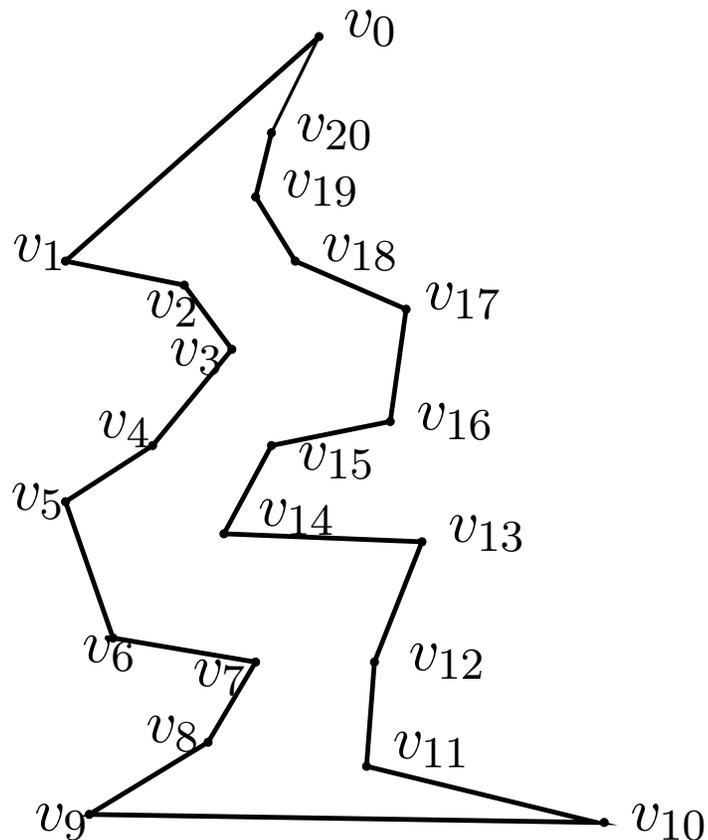
Um polígono  $P$  é **monótono** em relação a uma reta  $L$  se  $P \cap L'$  é conexo para toda reta  $L'$  perpendicular a  $L$ .

Se  $L$  é o eixo  $y$ , dizemos que  $P$  é  **$y$ -monótono**.

# Polígonos monótonos

Um polígono  $P$  é **monótono** em relação a uma reta  $L$  se  $P \cap L'$  é conexo para toda reta  $L'$  perpendicular a  $L$ .

Se  $L$  é o eixo  $y$ , dizemos que  $P$  é  **$y$ -monótono**.



# Polígonos monótonos

Seja  $P$  um polígono  $y$ -monótono com  $n$  vértices.

Podemos ordenar os vértices de  $P$  por  $y$ -coordenada em tempo  $O(n)$ .

# Polígonos monótonos

Seja  $P$  um polígono  $y$ -monótono com  $n$  vértices.

Podemos ordenar os vértices de  $P$  por  $y$ -coordenada em tempo  $O(n)$ .

$\delta P$ : fronteira de  $P$

- determine a curva poligonal esquerda de  $\delta P$
- determine a curva poligonal direita de  $\delta P$
- intercale as duas curvas

# Polígonos monótonos

Seja  $P$  um polígono  $y$ -monótono com  $n$  vértices.

Podemos ordenar os vértices de  $P$  por  $y$ -coordenada em tempo  $O(n)$ .

$\delta P$ : fronteira de  $P$

- determine a curva poligonal esquerda de  $\delta P$
- determine a curva poligonal direita de  $\delta P$
- intercale as duas curvas

Cada um destes passos pode ser feito em tempo  $O(n)$ .

# Algoritmo

**Entrada:** polígono monótono  $P$  com  $n$  vértices

**Saída:** triangulação de  $P$

# Algoritmo

**Entrada:** polígono monótono  $P$  com  $n$  vértices

**Saída:** triangulação de  $P$

**Primeiro passo:** ordenar os vértices de  $P$  por  $y$ -coordenada, obtendo  $u_1, \dots, u_n$

**Restante:** é iterativo e usa uma pilha

# Algoritmo

**Entrada:** polígono monótono  $P$  com  $n$  vértices

**Saída:** triangulação de  $P$

**Primeiro passo:** ordenar os vértices de  $P$  por  $y$ -coordenada, obtendo  $u_1, \dots, u_n$

**Restante:** é iterativo e usa uma pilha

O algoritmo produz uma seqüência de polígonos

$$P = P_0, P_1, \dots, P_n = \emptyset$$

onde o polígono

$P_i$  é obtido de  $P_{i-1}$  após o algoritmo processar  $u_i$

# Invariantes do algoritmo

**Entrada:** polígono monótono  $P$  com  $n$  vértices

**Saída:** triangulação de  $P$

**Primeiro passo:** ordenar os vértices de  $P$  por  $y$ -coordenada, obtendo  $u_1, \dots, u_n$

**Restante:** é iterativo e usa uma pilha  $S = (s_1, \dots, s_t)$

# Invariantes do algoritmo

**Entrada:** polígono monótono  $P$  com  $n$  vértices

**Saída:** triangulação de  $P$

**Primeiro passo:** ordenar os vértices de  $P$  por  $y$ -coordenada, obtendo  $u_1, \dots, u_n$

**Restante:** é iterativo e usa uma pilha  $S = (s_1, \dots, s_t)$

No início de cada iteração, valem os seguintes invariantes:

- $s_1, \dots, s_t$  em ordem crescente de  $y$ -coordenada e incluem todos os vértices abaixo de  $s_1$  e acima de  $s_t$
- $s_1, \dots, s_t$  são vértices consecutivos na cadeia esquerda ou direita de  $P_{i-1}$
- $s_2, \dots, s_{t-1}$  são vértices reflexos de  $P_{i-1}$
- $P_i$  é o que falta triangular de  $P$

# Invariantes do algoritmo

**Entrada:** polígono monótono  $P$  com  $n$  vértices

**Saída:** triangulação de  $P$

**Primeiro passo:** ordenar os vértices de  $P$  por  $y$ -coordenada, obtendo  $u_1, \dots, u_n$

**Restante:** é iterativo e usa uma pilha  $S = (s_1, \dots, s_t)$

No início de cada iteração, valem os seguintes invariantes:

- $s_1, \dots, s_t$  em ordem crescente de  $y$ -coordenada e incluem todos os vértices abaixo de  $s_1$  e acima de  $s_t$
- $s_1, \dots, s_t$  são vértices consecutivos na cadeia esquerda ou direita de  $P_{i-1}$
- $s_2, \dots, s_{t-1}$  são vértices reflexos de  $P_{i-1}$
- $P_i$  é o que falta triangular de  $P$

**Cadeia reflexa corrente:**  $s_1, \dots, s_t$

# Casos do algoritmo

Seja  $u_i$  o vértice processado nessa iteração.

# Casos do algoritmo

Seja  $u_i$  o vértice processado nessa iteração.

Três casos:

- (a)  $u_i$  é adjacente (em  $\delta P$ ) a  $s_t$  mas não a  $s_1$
- (b)  $u_i$  é adjacente a  $s_1$  mas não a  $s_t$
- (c)  $u_i$  é adjacente a  $s_1$  e a  $s_t$

# Casos do algoritmo

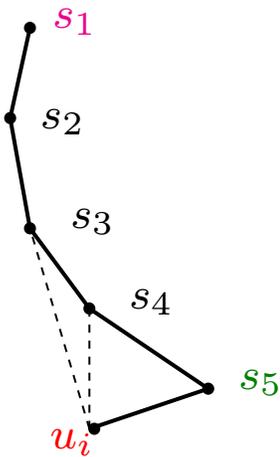
Seja  $u_i$  o vértice processado nessa iteração.

Três casos:

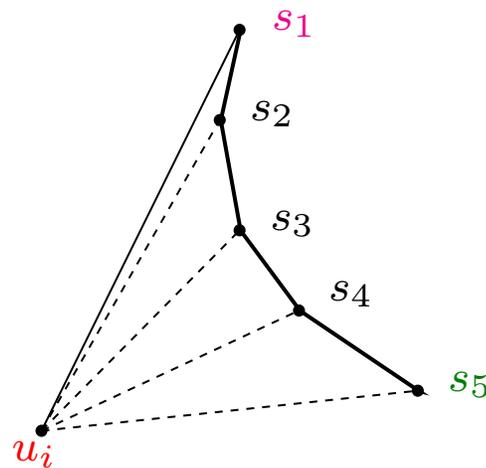
(a)  $u_i$  é adjacente (em  $\delta P$ ) a  $s_t$  mas não a  $s_1$

(b)  $u_i$  é adjacente a  $s_1$  mas não a  $s_t$

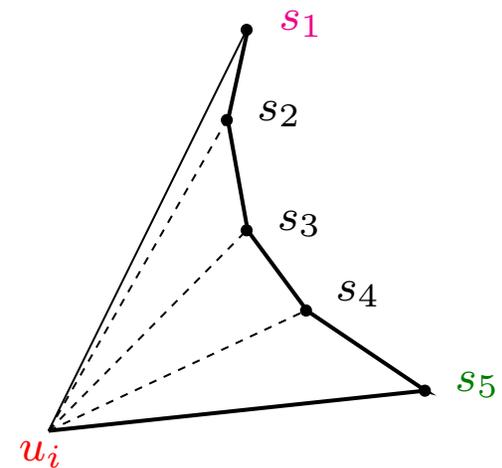
(c)  $u_i$  é adjacente a  $s_1$  e a  $s_t$



(a)



(b)



(c)

# Triangula monótono

DIVIDEEMMONÓTONO-LP( $n, P$ )

1  $u_1, \dots, u_n \leftarrow \text{Ordena}(n, P)$

2  $S \leftarrow (u_1, u_2) \quad D \leftarrow \emptyset$

3 **para**  $i \leftarrow 3$  **até**  $n$  **faça**

4 sejam  $s_1, \dots, s_t$  os vértices de  $S$

5 **Caso (a):**  $u_i$  adjacente a  $s_t$  mas não a  $s_1$

11 **Caso (b):**  $u_i$  adjacente a  $s_1$  mas não a  $s_t$

19 **Caso (c):**  $u_i$  adjacente a  $s_1$  e a  $s_t$   $\triangleright u_i = u_n$

25 **devolva**  $D$

# Triangula monótono

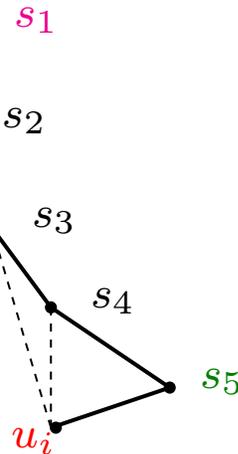
DIVIDEEMMONÓTONO-LP( $n, P$ )

- 5      **Caso (a):**  $u_i$  adjacente a  $s_t$  mas não a  $s_1$
- 6      **enquanto**  $t > 1$  e  $\hat{\text{Ângulo}}(u_i, s_t, s_{t-1}) < \pi$  **faça**
- 7          **Desempilha**( $S$ )
- 8           $t \leftarrow t - 1$
- 9           $D \leftarrow D \cup \{u_i s_t\}$
- 10      **Empilha**( $S, u_i$ )

# Triangula monótono

DIVIDEEMMONÓTONO-LP( $n, P$ )

- 5      **Caso (a):**  $u_i$  adjacente a  $s_t$  mas não a  $s_1$
- 6      **enquanto**  $t > 1$  e  $\hat{\text{Ângulo}}(u_i, s_t, s_{t-1}) < \pi$  **faça**
- 7          **Desempilha**( $S$ )
- 8           $t \leftarrow t - 1$
- 9           $D \leftarrow D \cup \{u_i s_t\}$
- 10      **Empilha**( $S, u_i$ )



(a)

# Triangula monótono

DIVIDEEMMONÓTONO-LP( $n, P$ )

11 **Caso (b):**  $u_i$  adjacente a  $s_1$  mas não a  $s_t$

12  $aux \leftarrow s_t$

13 **enquanto**  $t > 1$  **faça**

14  $D \leftarrow D \cup \{u_i s_t\}$

15 **Desempilha**( $S$ )

16  $t \leftarrow t - 1$

17 **Desempilha**( $S$ )

▷ desempilha  $s_1$

18 **Empilha**( $S, aux$ )

**Empilha**( $S, u_i$ )

# Triangula monótono

DIVIDEEMMONÓTONO-LP( $n, P$ )

11 **Caso (b):**  $u_i$  adjacente a  $s_1$  mas não a  $s_t$

12  $aux \leftarrow s_t$

13 **enquanto**  $t > 1$  **faça**

14  $D \leftarrow D \cup \{u_i s_t\}$

15 **Desempilha**( $S$ )

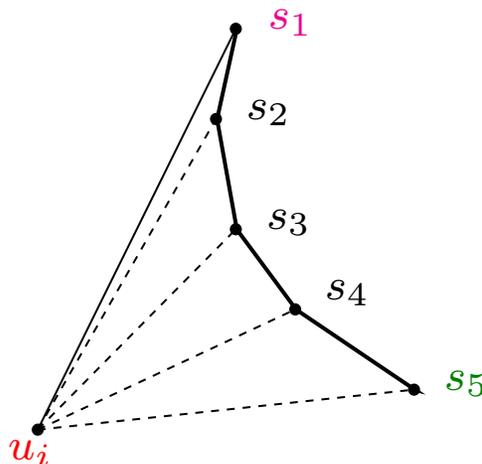
16  $t \leftarrow t - 1$

17 **Desempilha**( $S$ )

18 **Empilha**( $S, aux$ )

▷ desempilha  $s_1$

**Empilha**( $S, u_i$ )



(b)

# Triangula monótono

DIVIDEEMMONÓTONO-LP( $n, P$ )

19 **Caso (c):**  $u_i$  adjacente a  $s_1$  e a  $s_t$   $\triangleright u_i = u_n$

20 **Desempilha**( $S$ )  $\triangleright$  desempilha  $s_t$

21 **enquanto**  $t > 2$  **faça**

22  $t \leftarrow t - 1$

23  $D \leftarrow D \cup \{u_i s_t\}$

24 **Desempilha**( $S$ )

# Triangula monótono

DIVIDEEMMONÓTONO-LP( $n, P$ )

19 **Caso (c):**  $u_i$  adjacente a  $s_1$  e a  $s_t$   $\triangleright u_i = u_n$

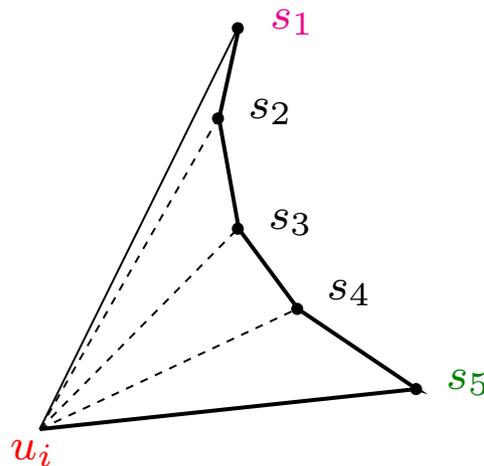
20 **Desempilha**( $S$ )  $\triangleright$  desempilha  $s_t$

21 **enquanto**  $t > 2$  **faça**

22  $t \leftarrow t - 1$

23  $D \leftarrow D \cup \{u_i s_t\}$

24 **Desempilha**( $S$ )



(c)

# Triangula monótono em tempo linear

```
3  para  $i \leftarrow 3$  até  $n$  faça
4    sejam  $s_1, \dots, s_t$  os vértices de  $S$ 
5    Caso (a):  $u_i$  adjacente a  $s_t$  mas não a  $s_1$ 
6      enquanto  $t > 1$  e  $\text{Ângulo}(u_i, s_t, s_{t-1}) < \pi$  faça
7        Desempilha( $S$ );  $t \leftarrow t - 1$ ;  $D \leftarrow D \cup \{u_i s_{t-1}\}$ 
10       Empilha( $S, u_i$ )
11     Caso (b):  $u_i$  adjacente a  $s_1$  mas não a  $s_t$ 
12        $aux \leftarrow s_t$ 
13       enquanto  $t > 1$  faça
14          $D \leftarrow D \cup \{u_i s_t\}$ ; Desempilha( $S$ );  $t \leftarrow t - 1$ 
17         Desempilha( $S$ ) ▷ desempilha  $s_1$ 
18         Empilha( $S, aux$ ) Empilha( $S, u_i$ )
19     Caso (c):  $u_i$  adjacente a  $s_1$  e a  $s_t$  ▷  $u_i = u_n$ 
20         Desempilha( $S$ ) ▷ desempilha  $s_t$ 
21       enquanto  $t > 2$  faça
22          $t \leftarrow t - 1$ ;  $D \leftarrow D \cup \{u_i s_t\}$ ; Desempilha( $S$ )
```

# Triangula monótono em tempo linear

O número de chamadas de **Empilha** é não mais que  $2n$ .

# Triangula monótono em tempo linear

O número de chamadas de **Empilha** é não mais que  $2n$ .

O número de chamadas de **Desempilha** portanto também é no máximo  $2n$ .

# Triangula monótono em tempo linear

O número de chamadas de **Empilha** é não mais que  $2n$ .

O número de chamadas de **Desempilha** portanto também é no máximo  $2n$ .

O consumo de tempo do algoritmo é proporcional ao número de chamadas de **Empilha** mais o número de chamadas de **Desempilha**.

# Triangula monótono em tempo linear

O número de chamadas de **Empilha** é não mais que  $2n$ .

O número de chamadas de **Desempilha** portanto também é no máximo  $2n$ .

O consumo de tempo do algoritmo é proporcional ao número de chamadas de **Empilha** mais o número de chamadas de **Desempilha**.

Portanto o **consumo de tempo** é  $O(n)$ .