GEOMETRIA COMPUTACIONAL

TEOREMA DA GALERIA DE ARTE

1. Definições e convenções

Uma *curva poligonal* é uma sequência finita $(v_0, e_0, v_1, \ldots, e_{n-2}, v_{n-1})$ onde $v_0, \ldots, v_{n-1}$ são pontos em $\mathbb{R}^2$ e e_i é um segmento de reta com extremidades v_i e v_{i+1} $(i = 0, \ldots, n-2)$. Os pontos $v_0, \ldots, v_{n-1}$ também são chamados de *vértices* e os segmentos $e_0, \ldots, e_{n-2}$ de *arestas*. (Notação: os índices serão considerados ciclicamente, assim, por exemplo, $v_n = v_0$, $e_{n-1} = e_0, \ldots$)

Uma curva poligonal é *fechada* se o último ponto da sequência é igual ao primeiro, ou seja, $v_0 = v_n$. Uma curva polígonal é *simples* se ela não se autointersecta. Mais precisamente, isto significa que o segmento e_i só intersecta (possivelmente) o segmento e_{i+1} no ponto v_{i+1} $(i = 0, \ldots, n-2)$.

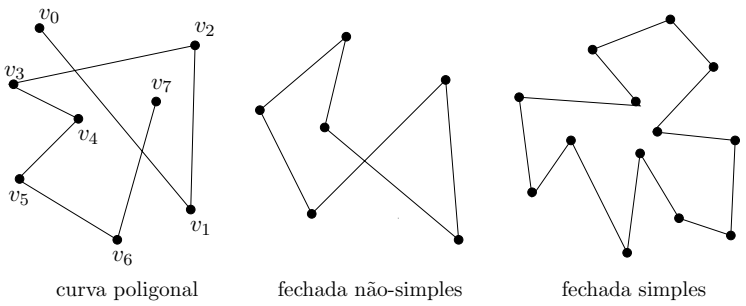

Figura 1. Curvas poligonais.

O famoso Teorema de Jordan diz que toda curva plana fechada simples divide o plano em duas regiões: o *interior* e o *exterior* da curva. Definimos um *polígono* como sendo a região fechada do plano (no sentido topológico) limitada por uma curva poligonal fechada simples. O termo *polígono simples* também é frequentemente usado com este mesmo sentido. Convencionaremos que os vértices de um polígono serão sempre listados na ordem em que eles aparecem ao percorrermos a fronteira do polígono no sentido anti-horário. A fronteira de um polígono P será denotada por ∂P. Da nossa definição temos que $\partial P \subseteq P$.

Diremos que dois pontos p e q de um polígono P *vêem* ou *enxergam* um ao outro se o segmento que liga p e q, denotado por pq, está inteiramente contido no polígono P.

A planta de uma sala, com n paredes, de uma galeria de arte pode ser vista como sendo um polígono formado por n vértices (ou arestas). Considere o problema de determinar-se onde devemos dispor guardas na galeria de tal modo que cada ponto da sala possa ser visto por pelo menos um guarda. Pensaremos em um guarda como sendo um ponto e diremos que um conjunto de guardas *guardam* ou *cobrem* um polígono se cada ponto do polígono pode ser visto por pelo menos um guarda. Victor Klee propôs o seguinte problema.

Problema 1. *Dado n, determinar, como uma função de n, o número mínimo de guardas suficientes para cobrir um polígono arbitrário com n vertices.*

Se denotarmos por $g(P)$ o menor número de guardas necessários para cobrirmos um polígono P e por $G(n)$ o menor número de guardas necessários para cobrirmos um polígono com n vértices, então temos que

$$G(n) = \max\{g(P) \mid P \text{ é um polígono com } n \text{ vértices}\}.$$

Não é difícil ver que $G(n) \leq n$. Podemos colocar um guarda em cada vértice do polígono. Apesar deste fato ser trivial, é interessante notar que a generalização para o espaço tridimensional é falsa (!).

Exercício. Encontre um poliedro em $\mathbb{R}^3$ tal que, mesmo colocando um guarda em cada um de seus vértices, teremos pontos no interior do poliedro que não são visto por nenhum dos guardas. (Este poliedro certamente não é convexo.)

Salas que têm o formato de um polígono convexo, com qualquer número de vértices, podem ser cobertas por apenas um guarda, colocado em qualquer ponto da sala. Todo polígono com três vértices é convexo, logo $G(3) = 1$. Existem polígonos com quatro vértices que não são convexos.

Diremos que um vértice de um polígono é *reflexo* ou *concavo* se o seu ângulo interior é maior do que π. Já se o ângulo interior do vértice de um polígono for no máximo π, diremos que o vértice é *convexo*.

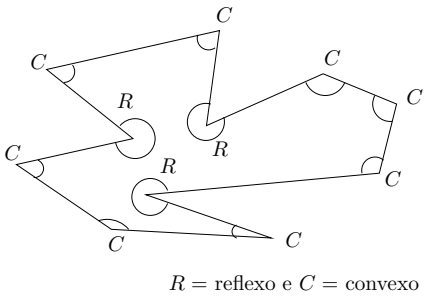

Figura 2. Um polígono e seus vértices reflexos e convexos.

Um polígono com quatro vértices (um quadrilátero) pode ter no máximo um ângulo reflexo. Mesmo assim é possível cobrirmos o polígono com apenas um guarda, ou seja, $G(4) = 1$. Um polígono com cinco vértices pode ter 0, 1 ou 2 vértices reflexos. Fazendo alguns experimentos podemos ver que polígonos com cinco vértices podem ser cobertos por apenas um guarda, ou seja, $G(5) = 1$. Existem polígonos com 6 vértices que necessitam de 2 guardas para serem cobertos.

Uma questão interessante em geometria combinatória é saber como o número de guardas necessários para cobrir um polígono cresce como uma função de n. O polígono 'pente' mostra que $G(n) \geq \lfloor n/3 \rfloor$.

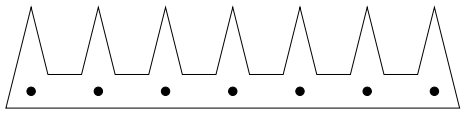

Figura 3. Exemplo de polígonos onde $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas são necessários.

Este número é sempre suficiente, ou seja, um polígono com n vértices pode ser sempre guardado por no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas. É o que mostra um resultado muito bacana em geometria combinatória, o chamado *Chvátal's Art Gallery Theorem.*

Teorema 2 (Teorema da Galeria de Arte)**.** *Dado um polígono com n vértices, existe uma maneira de dispormos no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas neste polígono de modo que cada ponto do polígono seja coberto por pelo menos um guarda.*

A primeira demonstração deste teorema é, naturalmente, devida a Chvátal. Fisk, três anos mais tarde, apresentou uma prova muito simples deste teorema. Esta prova baseia-se em dois conceitos: triangulação de polígonos e coloração de vértices de um grafo.

1.1. **Diagonais e triangulação.** Dois vértices u e v de um polígono P se vêem ou se enxergam *claramente* se o segmento uv com extremos u e v está inteiramente contido em P e se, além disso, a intersecção de uv com a fronteira ∂P de P é igual a $\{u, v\}$. Ou seja, u e v se vêem claramente se

(i) $uv \subset P$ e
(ii) $uv \cap \partial P = \{u, v\}$.

Uma *diagonal* de um polígono P é um segmento de reta entre dois vértices de P que se vêem claramente. Duas diagonais distintas uv e wx de P se cruzam se $uv \cap wx \not\subset \{u, v, w, x\}$. Se colocarmos em um polígono P o maior número possível de diagonais que duas-a-duas não se cruzam, obteremos uma *triangulação* do polígono P. Uma triangulação de P pode ser vista como a união das arestas de P e um conjunto maximal de diagonais de P que duas-a-duas não se intersectam, a não ser, eventualmente, nos seus extremos. Uma outra maneira de pensarmos em uma triangulação de um polígono P (e às vezes será mais conveniente pensarmos desta maneira) é como um conjunto de triângulos que cobrem o polígono P e que se intersectam apenas em vértices e diagonais de P.

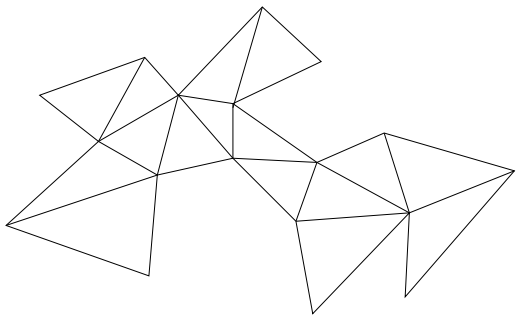

FIGURA 4. Triangulação de um polígono.

Teorema 3 (Triangulação)**.** *Todo polígono pode ser particionado em triângulos através da inclusão de diagonais (zero ou mais).*

Demonstraremos o Teorema 3 na próxima seção. A demonstração é baseada no fato de que todo polígono com pelo menos 4 vértices possui uma diagonal. Este fato pode parecer trivial, entretanto, teremos um pouco de trabalho para verificá-lo.

1.2. **Coloração de vértices de um grafo.** Um grafo $G = (V, E)$ é *k-colorível* se for possível atribuirmos cores $c_1, \ldots, c_k$ aos (ou colorirmos os) vértices de G de tal forma que se u e v são vértices adjacentes em G então a cor atribuída a u é diferente da cor atribuída a v.

Associaremos um grafo (planar) $G_T = (V, E)$ à triangulação T de um polígono P da seguinte maneira. O conjunto do vértices V de G_P será o conjunto dos vértices de P e existirá uma aresta em E ligando vértices u e v de G_T se o segmento uv faz parte da triangulação T.

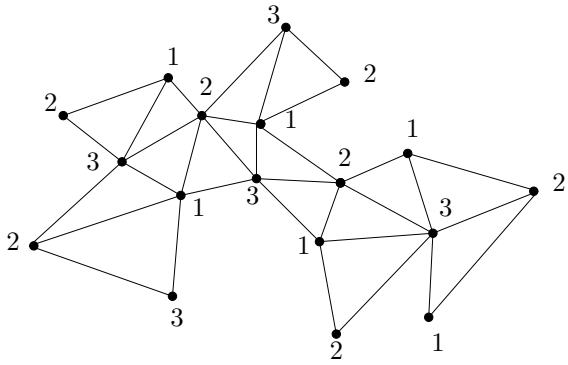

FIGURA 5. Grafo associado à triangulação da Figura 4 e uma 3-coloração deste grafo. As cores são 1, 2 e 3.

É um fato conhecido que todo grafo planar pode ser 4-colorido (o famoso *Teorema das 4 Cores*). Com grafos associados a triangulações, que são planares, podemos fazer melhor que isto.

Teorema 4. *Seja G_T o grafo associado a uma triangulação T de um polígono. Então G_T é 3-colorível.*

O teorema anterior também será demonstrado na próxima seção.

1.3. **Demonstração do Teorema da Galeria de Arte.** Seja P um polígono com n vértices. Mostraremos que P pode ser coberto por $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas. Pelo Teorema 3 sabemos que todo polígono é triangularizável, assim seja T uma triangulação de P. Do Teorema 4 sabemos que o grafo G_T associado a T é 3-colorível. Considere uma tal 3-coloração e suponha que as cores usadas foram, digamos, azul, verde e amarela. Observemos que cada triângulo de T tem pelo menos um vértices de cada uma dessas cores. Como a coleção de triângulos de T cobrem P e cada triângulo tem um vértice de cor amarela (ou qualquer outra cor) então guardas colocados nos vértices amarelos cobrem P. Analogamente, guardas colocados em vértices de cor azul cobrem P e guardas colocado em vértices de cor verde cobrem P. Pelo menos uma dessas 3 cores é usada em não mais do que $n/3$ vértices. Como o número de vértices com uma determinada cor é um número inteiro podemos trocar $n/3$ por $\lfloor n/3 \rfloor$. Logo, $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas são suficiente e eventualmente necessários para cobrirmos um polígono com n vértices. ∎

2. Teoria de triangulações

Neste seção provaremos alguns resultados relacionados com triangulação de polígonos. Também mostraremos o Teorema 3 e 4, que deixamos de provar na seção anterior. Para estudarmos os aspectos algorítmicos de triangulação e partição de polígono ainda teremos que esperar um pouco.

Lema 5. *Todo polígono tem um vértice estritamente convexo.*

Demonstração. Seja P um polígono. Oriente as arestas de P no sentido antí-horário. Um transeunte andando sobre ∂P, e seguindo a orientação, teria o interior do polígono à sua esquerda. Assim, em um vértice estritamente convexo o nosso transeunte virará à esquerda e em um vértice estritamente reflexo ele virará à direita.

Seja v o vértice de P com

(i) y-coordenada mínima; e
(ii) x-coordenada máxima, respeitando (i).

Seja l a reta horizontal passando sobre v. A aresta seguindo v deve estar acima de l (veja Figura 6). Logo, nosso traseunte deve vira à esquerda em v. Portanto, v é um vértice estritamente convexo. ∎

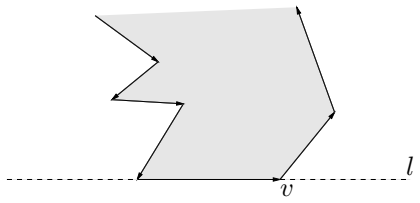

Figura 6. Ilustração da prova do Lema 5.

Lema 6 (Meister [5])**.** *Todo polígono com pelo menos 4 vértices possui uma diagonal.*

Demonstração. Seja P um polígono com $n \geq 4$ vértices e seja v um vértice estritamente convexo de P. Sejam u e w vértices adjacentes a v. Se uw é uma diagonal do polígono então não há o que demonstrar. Logo, suponhamos que uw não é uma diagonal de P, ou seja

- ou $uw \not\subset P$;
- ou $uw \subset P$ e $uw \cap \partial P \not\subset \{u, w\}$.

Como $n \geq 4$ então o triângulo de vértices v, u, w, denotado por $\triangle(v, u, w)$, contém pelo menos um vértice de P distinto de v, u e w. Seja t um vértice de P em $\triangle(v, u, w)$ mais-próximo de v; onde a distância é medida ortogonalmente à reta passando pelo segmento uw. Logo, t é o primeiro vértice de P atingido quando movemos a reta l paralela a vw de v na direção de uw (veja Figura 7).

Afirmamos que vt é uma diagonal de P. De fato, seja L a reta passando por t e paralela ao segmento uw. Notemos que a intersecção do semiplano determinado por L contendo o vértice v com o

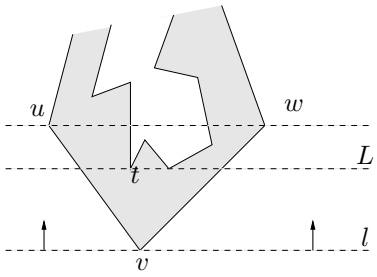

FIGURA 7. Ilustração da prova do Lema 6.

triângulo $\triangle(u, v, w)$ é um triângulo que não tem *nenhum* ponto de ∂P no seu interior. Logo, o vértice v vê t claramente. Portanto, vt é uma diagonal de P. ∎

Estamos prontos para provar o Teorema 3. Abaixo repetimos o seu enunciado.

Teorema 7 (Triangulação)**.** *Todo polígono pode ser particionado triângulos através da inclusão de diagonais (zero ou mais).*

Demonstração. Seja P um polígono. A prova é por indução no número n de vértices do polígono P. Se $n = 3$ o polígono é um triângulo e o teorema vale, já que não precisamos adicionar nenhuma diagonal.

Suponha que $n \geq 4$. Pelo Lema 6 sabemos que P possui uma diagonal d. O segmento d particiona P em dois polígonos com menos do que n vértices; cada um tendo d como aresta. Aplicando a hipótese de indução temos que cada um desses (sub)polígono pode ser triangularizado. Logo, combinando as triangulações de cada um dos polígonos e d obtemos uma triangulação de P. (A situação está ilustrada na Figura 8.) ∎

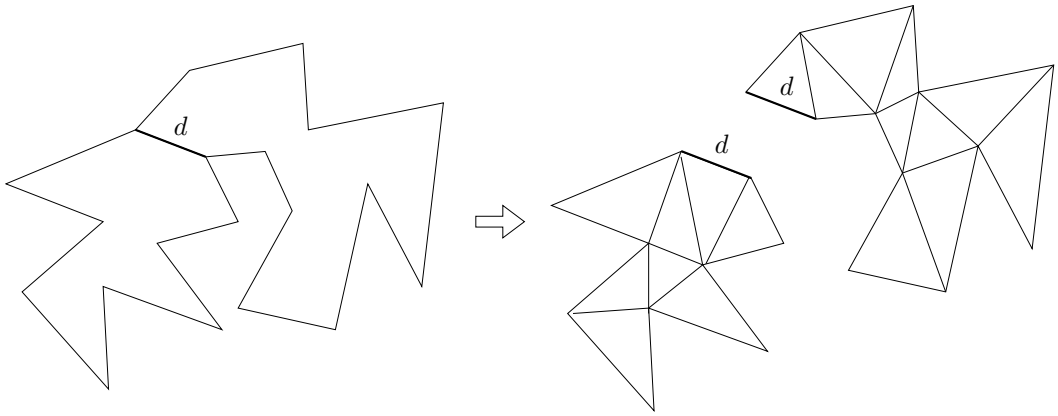

FIGURA 8. Ilustração da prova do Teorema 6.

Lema 8 (Número de diagonais)**.** *Toda triangulação de um polígono de n vértices consiste de $n - 3$ diagonais e $n - 2$ triângulos.*

Demonstração. Seja P um polígono. Provaremos o lema por indução no número n de vértices de P. Ambas as afirmações são verdadeiras para $n = 3$, ou seja, para um triângulo.

Suponhamos que $n \geq 4$. Particionemos P em dois polígono P_1 e P_2 através de uma diagonal arbitrária d. Suponhamos que P_1 tenha n_1 vértices e P_2 tenha n_2 vértices. Assim, temos que $n_1 + n_2 = n + 2$.

Aplicando a hipótese de indução ao polígono P_1 e ao polígono P_2, temos que toda triangulação de P_1 possui $n_1 - 3$ diagonais e toda triangulação de P_2 possui $n_2 - 3$ diagonais. Toda triangulação de P que possui d induz triangulações de P_1 e P_2. Assim, toda triangulação de P que possui d tem

$$(n_1 - 3) + (n_2 - 3) + 1 = n_1 + n_2 - 5 = n + 2 - 5 = n - 3$$

diagonais. Como a escolha de d foi arbitrária concluímos que toda triangulação de P possui $n-3$ diagonais. O número de triângulos é claramente um a mais que o número de diagonais. ∎

Lema 9 (Soma dos ângulos)**.** *A soma dos ângulos internos de um polígono de n vértices é $(n-2)\pi$.*

Demonstração. Pelo Lema 8 existem $n-2$ triângulos em uma triangulação de um polígono com n vértices e cada triângulo contribui com π para a soma dos ângulos internos. ∎

Diremos que 3 vértices consecutivos u, v, w de um polígono formam uma *orelha* se uw é uma diagonal. Duas orelhas não se sobrepõem se os seus interiores são disjuntos.

Teorema 10 (Meister's Two Ears Theorem)**.** *Todo polígono com pelo menos 4 vértices possui pelo menos duas orelhas.*

O teorema acima segue imediatamente do seguinte teorema.

Teorema 11. *Seja P um polígono com pelo menos 4 vértices e T uma triangulação de P. Então pelo menos dois triângulos de T formam orelhas de P.*

Demonstração. A demonstração é por indução no número de vértices n de P. Se $n = 4$ então P é um quadrilátero e os dois triângulos de T são orelhas de P. Suponhamos que $n \geq 5$. Particionemos P em dois polígono P_1 e P_2 através de uma diagonal arbitrária d de T. Sejam T_1 e T_2 as triangularizações de P_1 e P_2, repectivamente, obtidas através da restrição da triangulação T a P_1 e P_2. Pela hipótese de indução Cada um dos (sub)polígonos P_1 e P_2 é um triângulo ou, pela hipótese de indução, possuem duas orelhas formadas por triângulos em T_1 e T_2, respectivamente. Pelo menos um desses (possivelmente dois) triângulos de T_1 é uma orelha de P. Analogamente, pelo menos um desses (possivelmente dois) dos triângulos de T_2 é uma orelha de P. Como estes triângulos são disjuntos, a prova do teorema está completa. ∎

Estamos agora preparados para demonstrar o Teorema 4 da seção anterior.

Teorema 12. *Seja G_T um grafo associado a uma triangulação T de um polígono P. Então G_T é 3-colorível.*

Demonstração. A prova é por indução no número de vértices n de G_T. Claramente um triângulo é 3-colorível. Logo, podemos supor que $n \geq 4$. Pelo Teorema 11 sabemos que P tem uma (na realidade pelo menos duas) orelha que é formada por um triângulo $\triangle(u, v, w)$ de T. Seja P' o polígono obtido a partir de P através da removeção desta orelha (isto é, troque a subseqüência $\ldots, u, v, w, \ldots$ na fronteira ∂P de P, pela subseqüência $\ldots, u, w, \ldots$) e seja T' a triangulação de P' obtida a partir de T, simplesmente removendo-se $\triangle(u, v, w)$. P' tem $n-1$ vértices e pela hipótese de indução o grafo $G_{T'}$ associado a triangulação T' é 3-colorível . O grafo G_T pode ser obtido a partir de $G_{T'}$ simplesmente adicionando o vértice v e as arestas uv e vw. Logo, existe (um única!) maneira de estendermos a 3-coloração de $G_{T'}$ a uma 3-coloração de G_T ('pinte' v com a cor que não pintamos u nem w). ∎

3. Exercicios

1. (Exercício 1.1.4.6 de [7] — guardando a parede) Construa um polígono P e disponha guardas em P de tal forma que os guardas vêem todos os pontos em ∂P, mas existem pontos em P que não são vistos/cobertos pelos guardas.
2. (Exercício 1.1.4.6 de [7] — guardas em poliedros) Descreva um poliedro em $\mathbb{R}^3$ que mesmo colocando-se guardas em todos os vértices existim pontos do poliedro que não são cobertos pelos guardas.
   Sugestão. Veja o Capítulo 9 O'Rourke [6].
3. ('Tetraedrização' de poliedros) Descreva um politopo (um politopo é um poliedro limitado) de genus zero (ou seja o politopo não tem 'buracos') em $\mathbb{R}^3$ que não pode ser particionado em tetrahedros tendo vértices selecionados dentre os vértices do politopo.
   Sugestão. Veja o Capítulo 10 O'Rourke [6].
   Observação. Ruppert e Seidel [8] mostraram que o seguinte problema é NP-completo: dado um politopo P em $\mathbb{R}^3$, decidir se P pode ou não ser tetraedrizado. Below, De Loera e Richter-Gebert [1] provaram que o problema de minimizar o número de tetraedros em uma tetraedrização de um politopo convexo em $\mathbb{R}^3$ é

NP-difícil. (Note que isto, em particular, significa que politopos convexos possuem tetraedrizações com um número diferente de tetraedros. Em dimensão 2, não temos um fato semelhante.)

4. Pelo Teorema da Galeria de Arte sabemos que $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas são ocasionalmente necessários e sempre suficientes para cobrir qualquer polígono com n vértices. Tendo este teorema em mente, o professor Maqui Sperto fez a seguinte afirmação: Seja $P = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$ um polígono (vértices em ordem anti-horário a medida que eles ocorrem quando percorremos ∂P) e seja $V_k := \{v_i \mid i \bmod 3 = k\}$ $(k = 0, 1, 2)$. Então guardas colocados nos vértices em V_k cobrem o polígono P para algum $k \in \{0, 1, 2\}$. Apresente um exemplo que mostra que o professor Sperto está enganado.
5. (Exercício 1.1.4.2 de [7] — Visibilidade clara) Seja $G'(n)$ o menor número de guardas suficientes para verem claramente cada ponto de um polígono com n vértices. Qual é a relação entre $G(n)$ e $G'(n)$? A prova de Fisk estabelece que $G'(n) \leq \lfloor n/3 \rfloor$? Tente determinar $G'(n)$ exatamente.
6. (Exercício 1.1.4.3 de [7] — Guardas nos vértices) Tente resolver o exercício anterior com a restrição que os guardas só podem ser colocados em vértices do polígono.
7. (Exercício 1.2.5.1 de [7] — Soma dos ângulos externos) Qual é a soma dos ângulos externos de um polígono com n vértices.
8. O *dual* de uma triangulação T de um polígono P é um grafo com um vértice associado a cada triângulo de T e uma aresta ligando dois vértices se e somente se os triângulos correspondentes têm um lado (diagonal) em comum. Prove que o dual D de uma triangulação é uma árvore (uma árvore é um grafo conexo sem ciclos).
9. Prove ou de um contra-exemplo: Toda árvore binária é dual de uma triangulação de algum polígono.
10. (Exercício 1.2.5.3 de [7] — triangulações extremais) Quais polígonos tem o menor número de triangulações (em função do número de vértices n)? Um polígono de n vértices pode ter uma única triangulação? Quais polígonos de n vértices tem o maior número de triângulações distintas?
11. (Exercício 1.2.5.4 de [7] — número de triangulações) Qual o número de triangulações distintas de um polígono convexo com n vértices?
    Sugestão. Veja o Capítulo 10, páginas 505–508, de [4].
12. (Exercício 1.2.5.7 de [7] — rotações em árvores) Para aqueles que conhecem a operação de `rotação` para mander o balanceamento de árvores binárias de busca. Interprete a oreparação de `rotação` em termos de triangulação de polígonos.
13. O professor Maqui Sperto (novamente) propôs uma alteração para a prova do Lema 6 Ele sugeriu que o vértice t, escolhido na demonstração, fosse um vértice tal que a distância entre v e t fosse mínima e afirmou que escolhendo t dessa maneira vt é uma diagonal do polígono P. O professor conseguiu dar um palpite correto desta vez? (Você precisa ver a demonstração do lema para fazer este exercício.)
14. (Minimizar o número de guardas está em NP) Descreva um algoritmo de complexidade de tempo polinomial que resolve o seguinte problema de decisão: dados um polígono P e pontos $p_1, \ldots, p_k$, decidir se guardas colocados nos pontos $p_1, \ldots, p_k$ cobrem P.
15. (Minimizar o número de guardas é NP-díficil) Considere o problema de decisão: dados um polígono P e um inteiro positivo k, decidir se P pode ser coberto por k guardas. Mostre que este problema é NP-completo.
    Sugestão. Veja o Capítulo 9 O'Rourke [6].

Referências

[1] A. Below, J.A. De Loera e J. Richter-Gebert, Finding minimal triangulations of convex 3-polytopes is NP-hard, *Proceedings of the Eleventh Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, ACM-SIAM, 2000, pp. 65–66.

[2] V. Chvátal, A combinatorial theorem in plane geometry, *Journal of Combinatorial, Series B* **18** (1975), 39–41.

[3] S. Fisk, A short proof of Chvátal's watchman theoreom, *Journal of Combinatorial Theory, series B* **24** (1978), 374.

[4] R.P. Grimaldi, *Discrete and combinatorial mathematics*, Addison-Wesley, 1994, QA832 G861d.

[5] G.H. Meister, Polygons have ears, *American Mathematical Monthly* **82** (1975), 648.

[6] J. O'Rourke, *Art gallery theorems and algorithms*, The International Series of Monographs on Computer Science, Oxford University Press, New York, 1987, QA830 O74a.

[7] ———, *Computational geometry in C*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993, Second Edition, 1998.

[8] J. Ruppert e R. Seidel, On the difficult of triangulating three-dimensional non-convex polyhedra, *Discrete and Computational Geometry* **7** (1992), 227–253.