Geometria Computacional

Departamento de Ciência da Computação – IME/USP

Segundo Semestre de 2009

Lista 6

1. (ED para partições ou grafos planos) Considere um polígono particionado, representado pela ED vista em aula, que chamamos de *listas de arestas duplamente ligadas* (com seus registros para vértices, arestas e faces).
   (a) Escreva um algoritmo que, dada uma face f, imprime todos os vértices desta face em tempo linear no número vértices de f.
   (b) Escreva um algoritmo que, dado um vértice v, obtém todos os vértices adjacentes a v em tempo linear no número de arestas incidentes a v.
2. ($DG(P) \Rightarrow \mathrm{Vor}(P)$) Descreva um algoritmo que, dado o grafo de Delaunay $DG(P)$ de um conjunto de pontos P, constrói $\mathrm{Vor}(P)$. Tente fazer um algoritmo linear.
3. (Vértice de Delaunay de grau grande) Descreva conjunto P de n pontos, para um n arbitrário, que não contenha quatro pontos cocirculares, tal que o grafo de Delaunay tenha um vértice de grau $n-1$.
4. (Aresta de $DG(P)$ a partir de P_1 e P_2) Seja P um conjunto de pontos no plano e seja $\{P_1, P_2\}$ uma partição de P. Prove que, se uv é um segmento de menor comprimento entre os segmentos em $\{p_1p_2 \mid p_1 \in P_1 \text{ e } p_2 \in P_2\}$, então uv é uma aresta do grafo de Delaunay.
5. (Exercício 5.3.3.1 do livro de O'Rourke — Polígono regular) Descreva o diagrama de Voronoi e o grafo de Delaunay dos vértices de um polígono regular.
6. (Exercício 5.4.5.2 do livro de O'Rourke — Diagrama de Voronoi unidimensional) Um diagrama de Voronoi unidimensional de um conjunto $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ de pontos na reta (digamos, no eixo das abscissas) é um conjunto de pontos $\mathrm{Vor}(P) = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ tal que x_i é o ponto médio do segmento p_ip_{i+1}. Descreva um critério que permite que determinemos se um dado conjunto $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ de pontos é o diagrama de Voronoi unidimensional de alguma coleção de pontos na reta. Qual é o consumo de tempo do algoritmo resultante do critério que você obteve?
7. Prove que se P é um conjunto de n pontos do plano com no máximo k pontos cocirculares então cada vértice do diagrama de Voronoi de P tem grau entre 3 e k.
8. (Grafo de vizinhança relativa) Um *grafo de vizinhança relativa* (*relative neighborhood graph*) de um conjunto P de n pontos do plano, denotado por $\mathrm{RNG}(P)$, é um grafo cujo conjunto de vértices é P e existe uma aresta ligando dois pontos p e q de S se

$$\textsc{Dist}(p,q) \;\leq\; \min_{r \in S \setminus \{p,q\}} \max\{\textsc{Dist}(p,r), \textsc{Dist}(q,r)\}.$$

   Esta desigualdade determina uma região 'proibida' para o ponto r se p e q são adjacentes no grafo de $\mathrm{RNG}(P)$. Esta região é formada pela interseção dos círculos de centro p e q e raio $\textsc{Dist}(p,q)$.
   (a) Prove que toda aresta de $\mathrm{RNG}(P)$ é uma aresta de $DG(S)$.
   (b) ($\mathrm{MST} \subseteq \mathrm{RNG}$) Prove que toda aresta de uma árvore geradora Euclideana mínima de P ($\mathrm{MST}(P)$) é uma aresta de $\mathrm{RNG}(P)$.
   (c) Descreva um algoritmo de complexidade de tempo $\mathrm{O}(n^2)$ que constrói o grafo de vizinhança relativa de um dado conjunto P de n pontos. Mostre a correção e analise do consumo de tempo do seu algoritmo.

9. (Atualização dinâmica do grafo de Delaunay) Dado o grafo de Delaunay de um conjunto P de n pontos e um ponto p em P, descreva um algoritmo que constrói o grafo de Delaunay de $P \setminus \{p\}$. O consumo de tempo do seu algoritmo deve ser $\mathrm{O}(k \lg k)$, onde k é o número de arestas adjacentes ao ponto p. Mostre a correção e analise o consumo de tempo do seu algoritmo.
10. (Construção do diagrama de Delaunay *on-line*) Seja P um conjunto de n pontos e seja p um ponto tal que $p \notin P$ mas está no fecho convexo de P.
    (a) Mostre que se p é um ponto no interior do triângulo $\triangle(a, b, c)$ do grafo $DG(P)$ então pa, pb e pc são arestas de $DG(P \cup \{p\})$.
    (b) Mostre que se p é um ponto da aresta ab de $DG(P)$ que é compartilhada pelos triângulos $\triangle(a, b, c)$ e $\triangle(d, b, a)$ de $DG(P)$, então pa, pb, pc e pd são arestas de $DG(P \cup \{p\})$.
    (c) Chamaremos de *suspeitas* as arestas de $DG(P)$ que suspeitamos que não fazem parte de $DG(P \cup \{p\})$. Após as operações descritas nos itens (a) e (b), quais arestas de $DG(P)$ são supeitas? Mostre como testar em tempo constante se uma aresta suspeita pertence ou não a $DG(P \cup \{p\})$.
    (d) Se constatarmos que uma aresta suspeita ab não pertence a $DG(P \cup \{p\})$, então qual aresta deverá ser inserida no grafo? Depois de inserirmos esta aresta, quais arestas que não eram suspeitas passam a ser suspeitas?
    (e) Quantas vezes uma aresta suspeita será testada?
    (f) Dados o grafo de Delaunay de um conjunto P de n pontos, um ponto $p \notin S$ e o triângulo $\triangle(a, b, c)$ do grafo de Delaunay de P que contém p, descreva um algoritmo que constrói o grafo de Delaunay de $P \cup \{p\}$. Seu algoritmo deve consumir tempo $\mathrm{O}(k)$, onde k é o número de arestas inseridas mais o número de arestas removidas. (Se você não conseguir um algoritmo $\mathrm{O}(k)$, então tente descrever um algoritmo $\mathrm{O}(n)$.) Mostre a correção e analise o consumo de tempo do seu algoritmo. (Note que o algoritmo pedido por este item é o passo central de um algoritmo *on-line* que constrói o diagrama de Delaunay de um conjunto de n pontos em tempo $\mathrm{O}(n^2)$.)
11. (Exercício 5.4.5.3 do livro de O'Rourke — Diagrama de Voronoi cinético) Imagine um conjunto de pontos movendo-se no plano, cada ponto com uma direção e velocidade fixas. Seja $V(t)$ o diagrama de Voronoi destes pontos no instante t. É um problema em aberto obter uma delimitação justa para o número de diagramas combinatorialmente distintos que podemos obter ao longo do tempo. Tente obter a conhecida cota inferior de $\Omega(n^2)$. Em outra palavras, encontre um conjunto de n pontos tal que $V(t)$ muda a sua estrutura combinatória cn^2 vezes onde c é uma constante. Ninguém foi capaz até agora de encontrar um exemplo onde mais de n^2 mudanças são necessárias, mas a melhor delimitação superior conhecida é $\mathrm{O}(n^3)$ (cf. Fu e Lee [1]; veja também Guibas, Mitchell e Roos [2]).

Referências

[1] J.-J. Fu e R.C.T. Lee, Voronoi diagrams of moving points in the plane, *International Journal on Computational Geometry and Applications* **1** (1991), no. 1, 23–32.

[2] L.J. Guibas, J.S.B. Mitchell e T. Roos, Voronoi diagrams of moving points in the plane, *Proceedings of the 17th International Workshop Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*, Lecture Notes Computer Science, vol. 570, Springer-Verlag, 1991, pp. 113–125.