

Estruturas de Dados

Cristina Gomes Fernandes

RemoveMin em árvores 2-3

REMOVAMIN (T)

- 1 **se** $esq(T) = \text{NIL}$
- 2 **então devolva** NIL $\triangleright dir(T) = \text{NIL}$ aqui
- 3 **se** $\text{NEGRO}(esq(T))$ e $\text{NEGRO}(esq(esq(T)))$
- 4 **então** $T \leftarrow \text{MOVARUBROESQ}(T)$
- 5 $esq(T) \leftarrow \text{REMOVAMIN}(esq(T))$
- 6 **FIXUP** T

RemoveMin em árvores 2-3

REMOVAMIN (T)

- 1 **se** $esq(T) = \text{NIL}$
- 2 **então devolva** NIL $\triangleright dir(T) = \text{NIL}$ aqui
- 3 **se** $\text{NEGRO}(esq(T))$ e $\text{NEGRO}(esq(esq(T)))$
- 4 **então** $T \leftarrow \text{MOVARUBROESQ}(T)$
- 5 $esq(T) \leftarrow \text{REMOVAMIN}(esq(T))$
- 6 **FIXUP** T

FIXUP (T)

- 1 **se** $\text{RUBRO}(dir(T))$ e $\text{NEGRO}(esq(T))$
- 2 **então** $T \leftarrow \text{ROTACIONEESQ}(T)$
- 3 **se** $\text{RUBRO}(esq(T))$ e $\text{RUBRO}(dir(T))$
- 4 **então** $\text{TROQUECORES}(T)$
- 5 devolva T

RemoveMin em árvores 2-3

MOVARUBROESQ (p)

1 TROQUECORES(p)

2 **se** RUBRO($esq(dir(p))$)

3 **então** $dir(p) \leftarrow$ ROTACIONEDIR($dir(p)$)

4 $p \leftarrow$ ROTACIONEESQ(p)

5 TROQUECORES(p)

6 **devolva** p

RemoveMin em árvores 2-3

MOVARUBROESQ (p)

1 TROQUECORES(p)

2 **se** RUBRO($esq(dir(p))$)

3 **então** $dir(p) \leftarrow$ ROTACIONEDIR($dir(p)$)

4 $p \leftarrow$ ROTACIONEESQ(p)

5 TROQUECORES(p)

6 **devolva** p

Mostre que o **REMOVAMIN** funciona quando T é uma árvore rubro-negra 2-3 exceto pela raiz, que pode ser rubra, ou é uma árvore rubro-negra em que o filho esquerdo da raiz rubro.

(Fizemos isso na aula. Refaça.)

Remoção em ABB rubro-negra 2-3

MOVARUBRODIR (p)

1 TROQUECORES(p)

2 **se** RUBRO($esq(esq(p))$)

3 **então** $p \leftarrow$ ROTACIONEDIR(p)

4 TROQUECORES(p)

5 $dir(p) \leftarrow$ ROTACIONEESQ($dir(p)$)

6 **devolva** p

Remoção em ABB rubro-negra 2-3

MOVARUBRODIR (p)

- 1 TROQUECORES(p)
- 2 **se** RUBRO($esq(esq(p))$)
- 3 **então** $p \leftarrow$ ROTACIONEDIR(p)
- 4 TROQUECORES(p)
- 5 $dir(p) \leftarrow$ ROTACIONEESQ($dir(p)$)
- 6 **devolva** p

REMOVA (T, x)

- 1 $T \leftarrow$ REMOVAREC(T, x)
- 2 $cor(T) \leftarrow$ NEGRO ▷ a raiz é sempre negra

Remoção em ABB rubro-negra 2-3

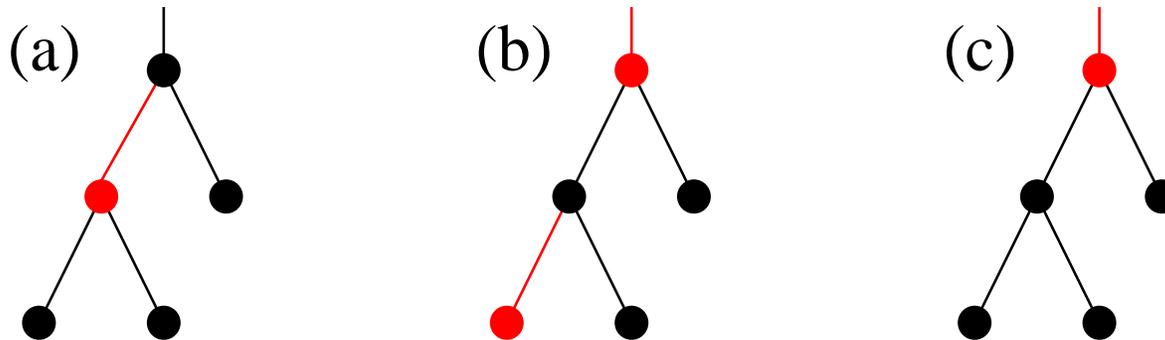
REMOVAREC (T, x)

```
1  se  $x < \text{info}(T)$ 
2      então se NEGRO( $\text{esq}(T)$ ) e NEGRO( $\text{esq}(\text{esq}(T))$ )
3          então  $T \leftarrow \text{MOVARUBROESQ}(T)$ 
4           $\text{esq}(T) \leftarrow \text{REMOVAREC}(\text{esq}(T), x)$ 
5      senão se RUBRO( $\text{esq}(T)$ )
6          então  $T \leftarrow \text{ROTACIONEDIR}(T)$ 
7          se  $x = \text{info}(T)$  e  $\text{dir}(T) = \text{NIL}$ 
8              então devolva NIL
9          se NEGRO( $\text{dir}(T)$ ) e NEGRO( $\text{esq}(\text{dir}(T))$ )
10             então  $T \leftarrow \text{MOVARUBRODIR}(T)$ 
11         se  $x = \text{info}(T)$ 
12             então  $\text{info}(T) \leftarrow \text{MÍNIMO}(\text{dir}(T))$ 
13                  $\text{dir}(T) \leftarrow \text{REMOVAMIN}(\text{dir}(T))$ 
14         senão  $\text{dir}(T) \leftarrow \text{REMOVAREC}(\text{dir}(T), x)$ 
15     FIXUP( $T$ )
```

Remoção em ABB rubro-negra 2-3

Exercício: Mostre que o **REMOVAREC** funciona quando T é uma árvore rubro-negra 2-3 exceto pela raiz, que pode ser rubra, ou é uma árvore rubro-negra em que o filho esquerdo da raiz é rubro.

Para isso, veja que T na chamada do **REMOVAREC** é como um dos casos da figura abaixo



e determine como T está, para cada um destes casos, na saída de **REMOVAREC**. Escreva uma prova por indução na altura de T de que sua análise de casos está completa, concluindo que a árvore T devolvida é rubro-negra 2-3.

Remoção em ABB rubro-negra 2-3

Exercício: Modifique as rotinas para que a remoção funcione mesmo que x não esteja na ABB.

Exercício: Modifique a inserção e a remoção recursivas para que mantenham o campo *pai* atualizado.

MovaRubroEsq para rubro-negra 2-3-4

MOVARUBROESQ (p)

1 TROQUECORES(p)

2 **se** RUBRO($esq(dir(p))$)

3 **então** $dir(p) \leftarrow$ ROTACIONEDIR($dir(p)$)

4 $p \leftarrow$ ROTACIONEESQ(p)

5 TROQUECORES(p)

6 **se** RUBRO($dir(dir(p))$)

7 **então** $dir(p) \leftarrow$ ROTACIONEESQ($dir(p)$)

8 **devolva** p

MovaRubroDir para rubro-negra 2-3-4

MOVARUBRODIR (p)

1 TROQUECORES(p)

2 **se** RUBRO($esq(esq(p))$)

3 **então** $p \leftarrow$ ROTACIONEDIR(p)

4 TROQUECORES(p)

5 **se** NEGRO($esq(dir(p))$)

6 **então** $dir(p) \leftarrow$ ROTACIONEESQ($dir(p)$)

7 **devolva** p

FixUp para ABB rubro-negra 2-3-4

FIXUP (T)

- 1 **se** RUBRO($dir(T)$)
- 2 **então** $T \leftarrow$ ROTACIONEESQ(T)
- 3 **se** RUBRO($esq(T)$) **e** RUBRO($esq(esq(T))$)
- 4 **então** $T \leftarrow$ ROTACIONEDIR(T)
- 5 **se** RUBRO($esq(T)$) **e** RUBRO($dir(T)$)
- 6 **então** TROQUECORES(T)
- 7 devolva T

Remoção em ABB rubro-negra

Exercício: Mostre que o novo **REMOVAMIN** funciona quando T é uma árvore rubro-negra 2-3-4 exceto pela raiz, que pode ser rubra, ou é uma árvore rubro-negra em que o filho esquerdo da raiz rubro ou ambos os filhos da raiz são rubros (a raiz é um 3-nó ou um 4-nó). Uma nova análise de casos é necessária aqui, com mais casos que a anterior.

Exercício: Mostre que o **REMOVAREC**, com o novo **REMOVAMIN** e o novo **FIXUP**, funciona quando T é uma árvore rubro-negra 2-3-4 exceto pela raiz, que pode ser rubra, ou é uma árvore rubro-negra em que o filho esquerdo da raiz rubro ou ambos os filhos da raiz são rubros (a raiz é um 3-nó ou um 4-nó). Idem.