Algoritmos de Aproximação para o Problema do Caixeiro Viajante

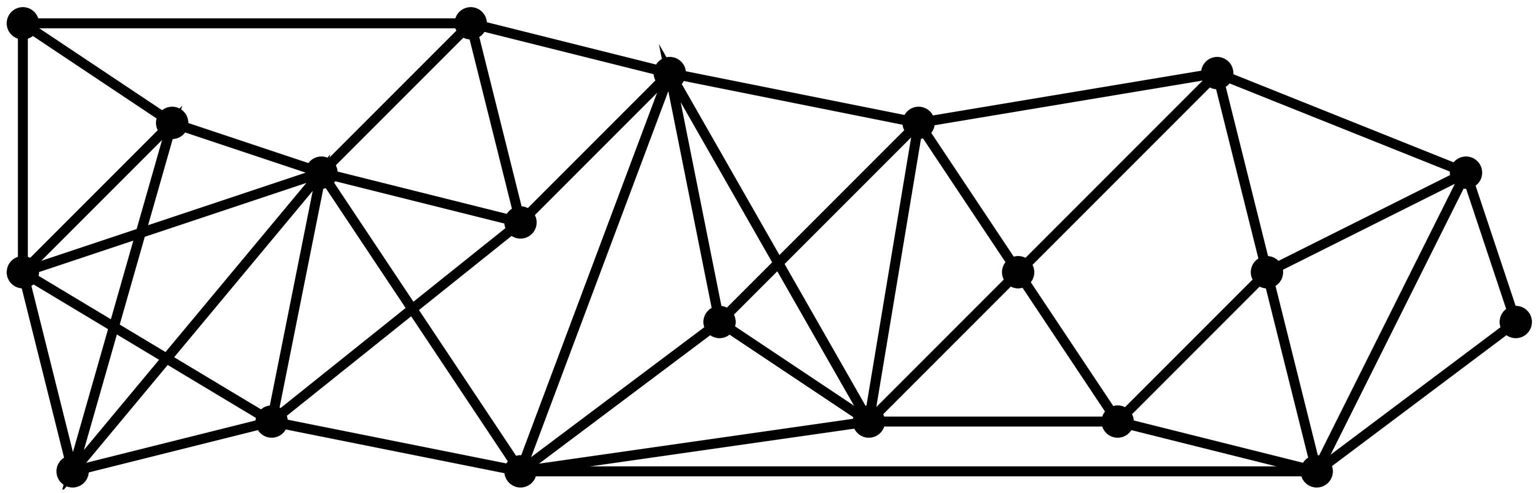
24 de agosto de 2004

Problema do Caixeiro Viajante

Dados

grafo G

comprimento l_{ij} da aresta ij $\quad (ij \in E_G)$

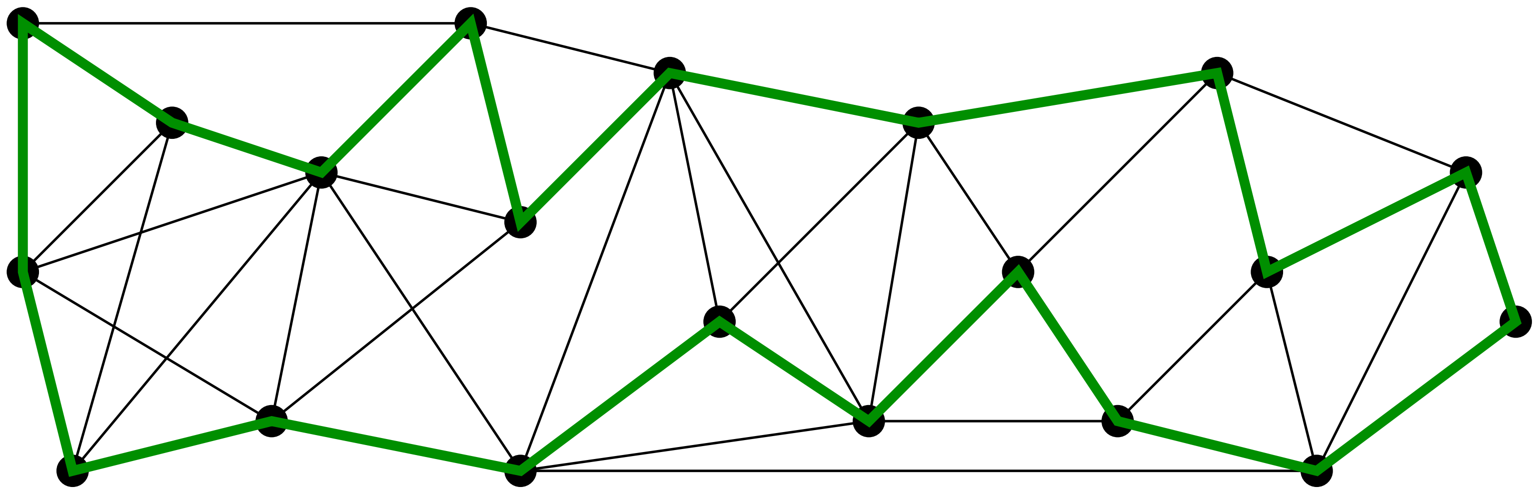


Problema do Caixeiro Viajante

Dados

grafo G

comprimento l_{ij} da aresta ij $\quad (ij \in E_G)$



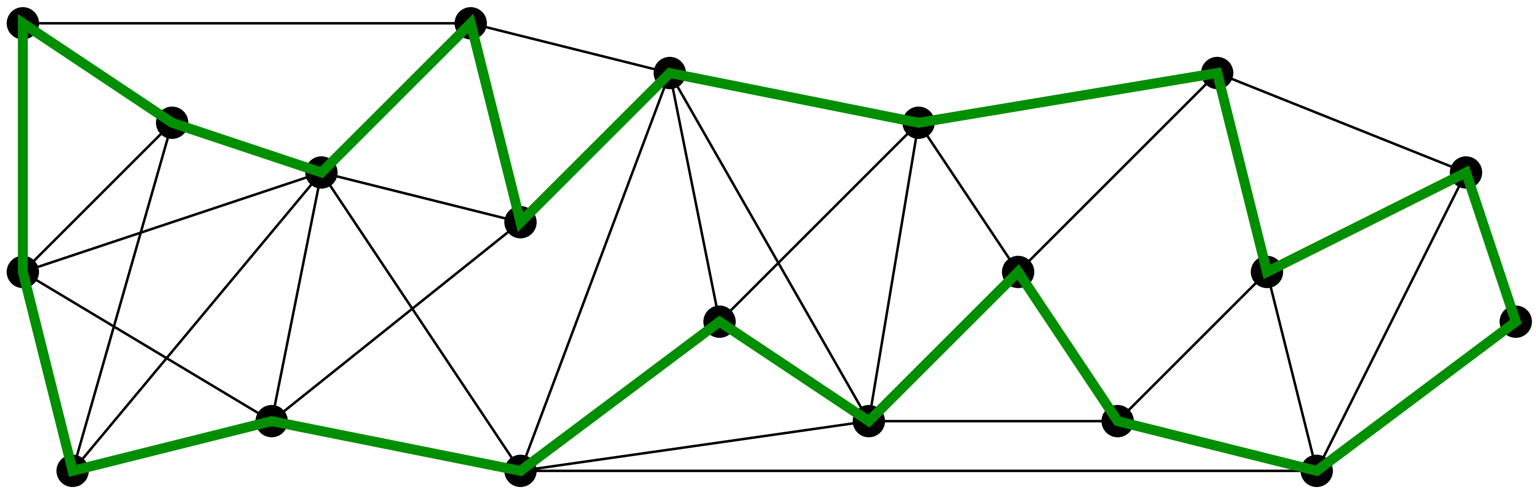
Circuito hamiltoniano: circuito que passa por todos os vértices

Problema do Caixeiro Viajante

Dados

grafo G

comprimento l_{ij} da aresta ij $\quad (ij \in E_G)$

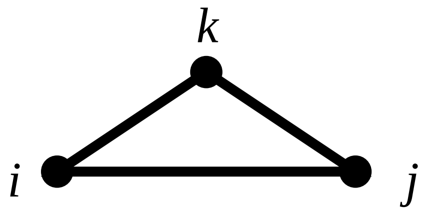


Circuito hamiltoniano: circuito que passa por todos os vértices

Problema (TSP): Dados G e l, encontrar circuito hamiltoniano C em G de comprimento $l(C)$ mínimo.

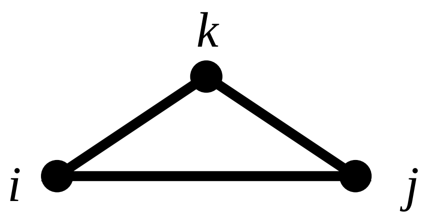
Variantes do Caixeiro Viajante

- TSP métrico
  - grafo completo
  - função comprimento l satisfaz desigualdade triangular: $l_{ij} \leq l_{ik} + l_{kj} \quad \forall i, j, k \in V_G$



Variantes do Caixeiro Viajante

- TSP métrico
  - grafo completo
  - função comprimento l satisfaz
    desigualdade triangular: $l_{ij} \leq l_{ik} + l_{kj} \quad \forall i, j, k \in V_G$



- TSP euclideano
  - Caso particular do métrico
  - Vértices são pontos no plano
    (ou num espaço euclideano qq de dimensão fixa)
  - l_{ij} é a distância euclideana entre i e j

Resultados Conhecidos

- NP-difícil mesmo se $l_e \in \{1, 2\}$ para toda aresta e [GJ79]
- Difícil de aproximar [SG76]
- $3/2$-aproximação para o caso métrico [C76]
- PTAS para o caso euclideano [A98,M99]

Resultados Conhecidos

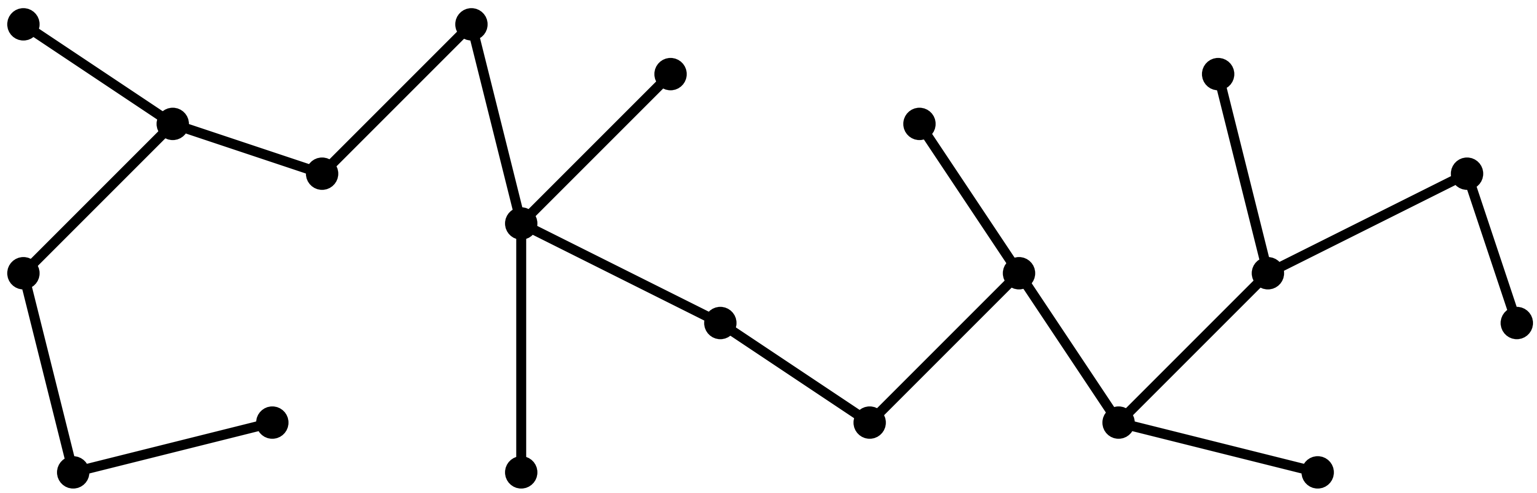
- NP-difícil mesmo se $l_e \in \{1, 2\}$ para toda aresta e [GJ79]
- Difícil de aproximar [SG76]
- $3/2$-aproximação para o caso métrico [C76]
- PTAS para o caso euclideano [A98,M99]

Nesta aula:

- 2-aproximação para o caso métrico [RSL77]
- $3/2$-aproximação para o caso métrico
- Comentários sobre o PTAS do caso euclideano
- TSP é difícil de aproximar

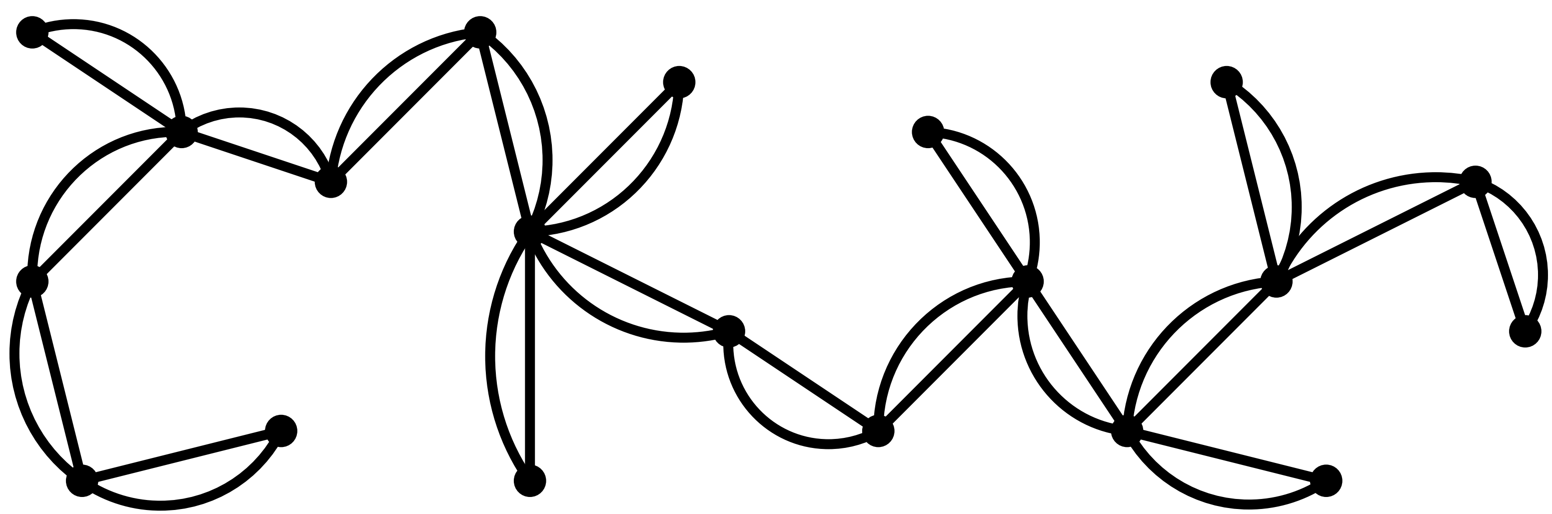
2-aproximação p/o TSP Métrico

(1) Árvore geradora de comprimento mínimo (polinomial)



2-aproximação p/o TSP Métrico

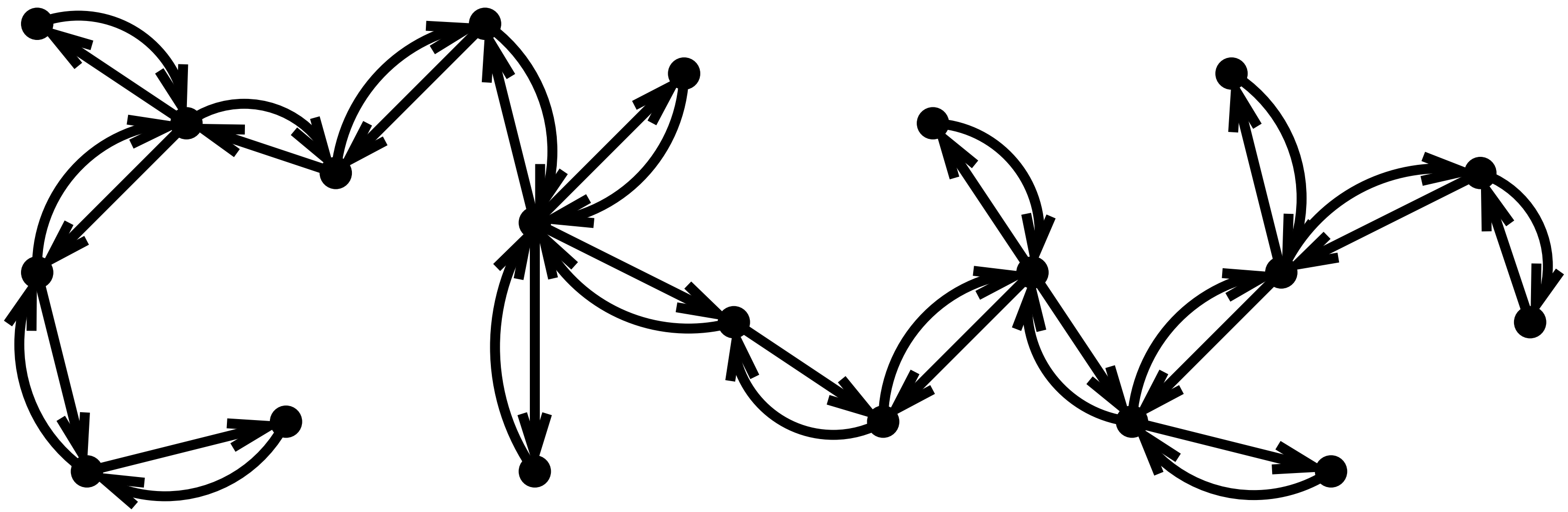
(1) Árvore geradora de comprimento mínimo (polinomial)
(2) Dobre as arestas da árvore (todos os vértices tem grau par)



2-aproximação p/o TSP Métrico

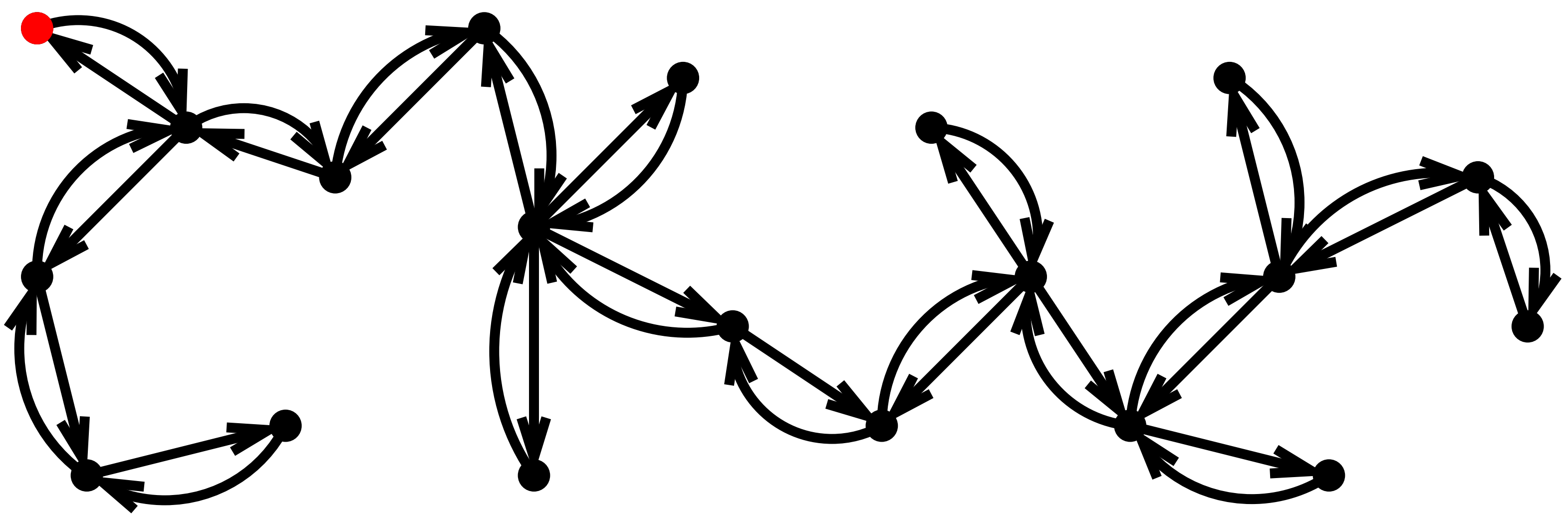
(1) Árvore geradora de comprimento mínimo (polinomial)
(2) Dobre as arestas da árvore (todos os vértices tem grau par)
(3) Obtenha ciclo euleriano P (polinomial)

ciclo euleriano: passeio fechado que passa exatamente uma vez por cada aresta



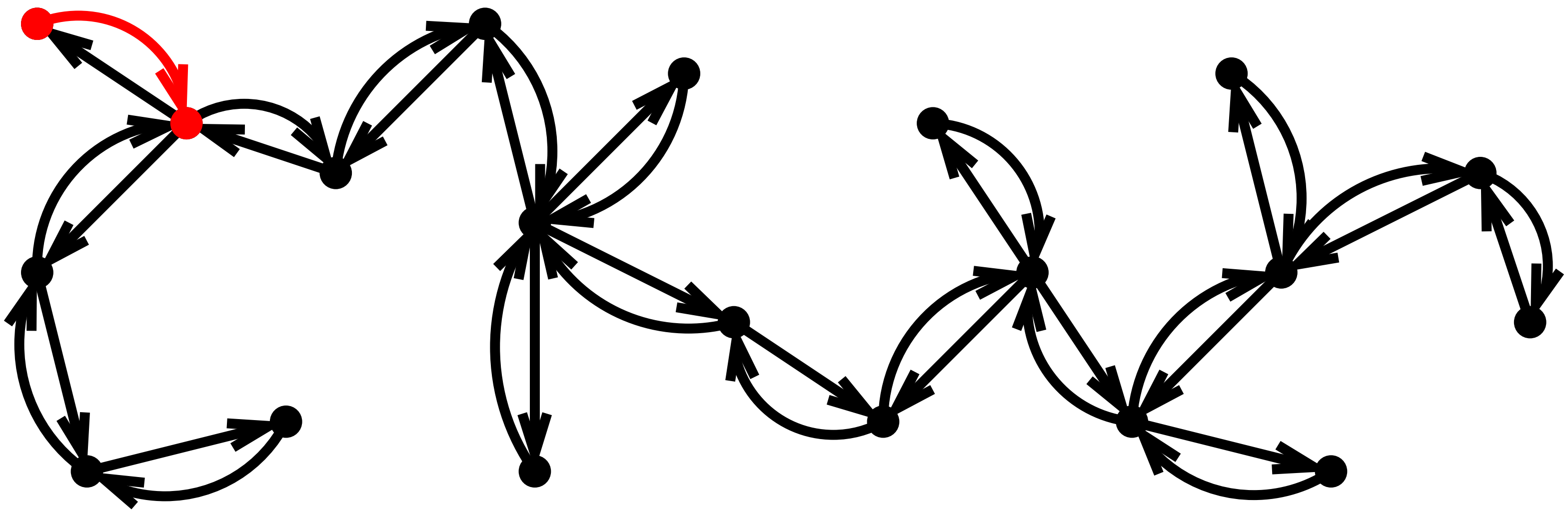
2-aproximação p/o TSP Métrico

(1) Árvore geradora de comprimento mínimo (polinomial)
(2) Dobre as arestas da árvore (todos os vértices tem grau par)
(3) Obtenha ciclo euleriano P (polinomial)
ciclo euleriano: passeio fechado que passa
exatamente uma vez por cada aresta
(4) Obtenha de P circuito hamiltoniano C



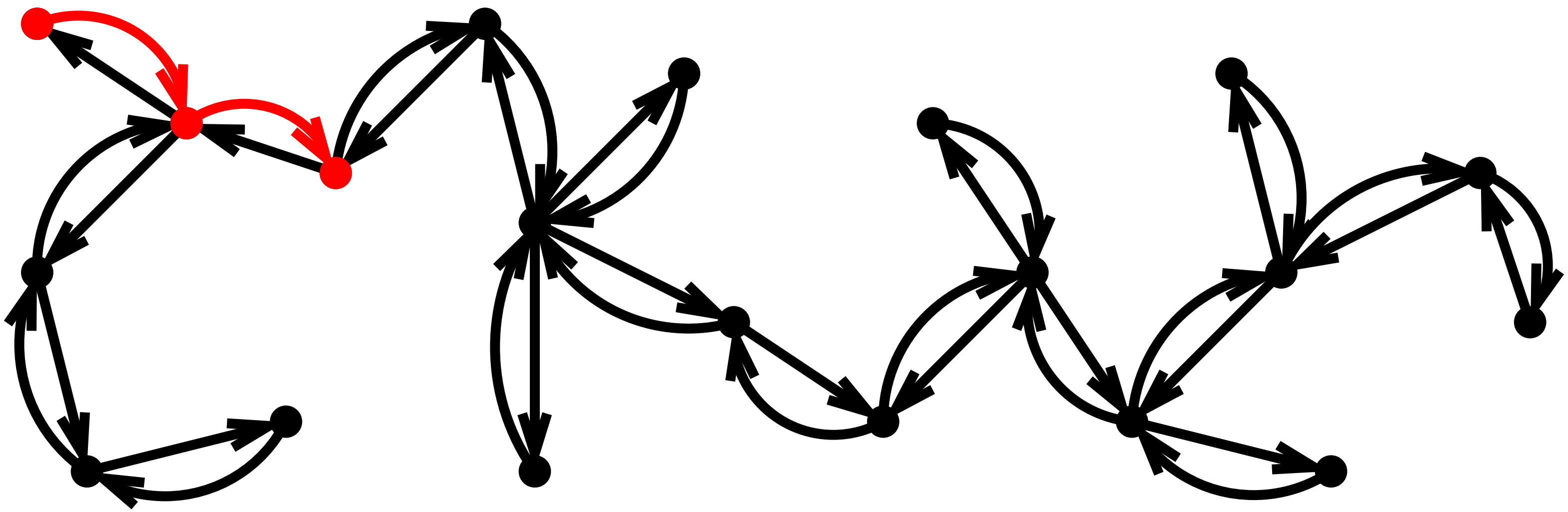
2-aproximação p/o TSP Métrico

(1) Árvore geradora de comprimento mínimo (polinomial)
(2) Dobre as arestas da árvore (todos os vértices tem grau par)
(3) Obtenha ciclo euleriano P (polinomial)
ciclo euleriano: passeio fechado que passa
exatamente uma vez por cada aresta
(4) Obtenha de P circuito hamiltoniano C



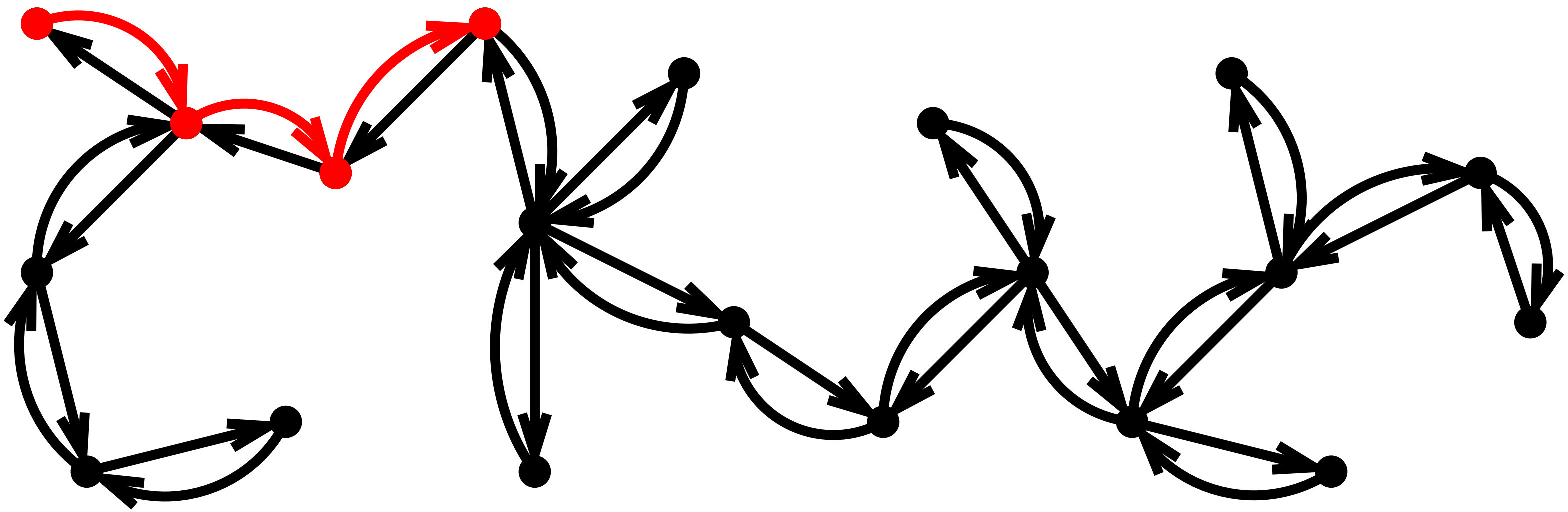
2-aproximação p/o TSP Métrico

(1) Árvore geradora de comprimento mínimo (polinomial)
(2) Dobre as arestas da árvore (todos os vértices tem grau par)
(3) Obtenha ciclo euleriano P (polinomial)
ciclo euleriano: passeio fechado que passa exatamente uma vez por cada aresta
(4) Obtenha de P circuito hamiltoniano C



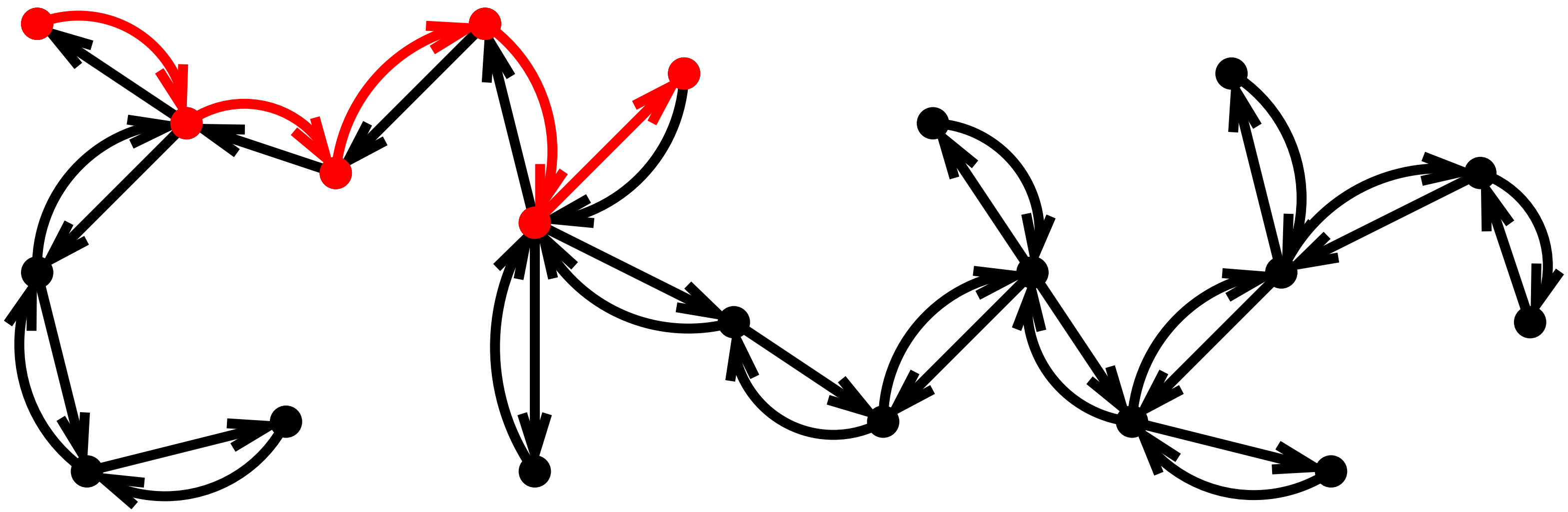
2-aproximação p/o TSP Métrico

(1) Árvore geradora de comprimento mínimo (polinomial)
(2) Dobre as arestas da árvore (todos os vértices tem grau par)
(3) Obtenha ciclo euleriano P (polinomial)
ciclo euleriano: passeio fechado que passa
exatamente uma vez por cada aresta
(4) Obtenha de P circuito hamiltoniano C



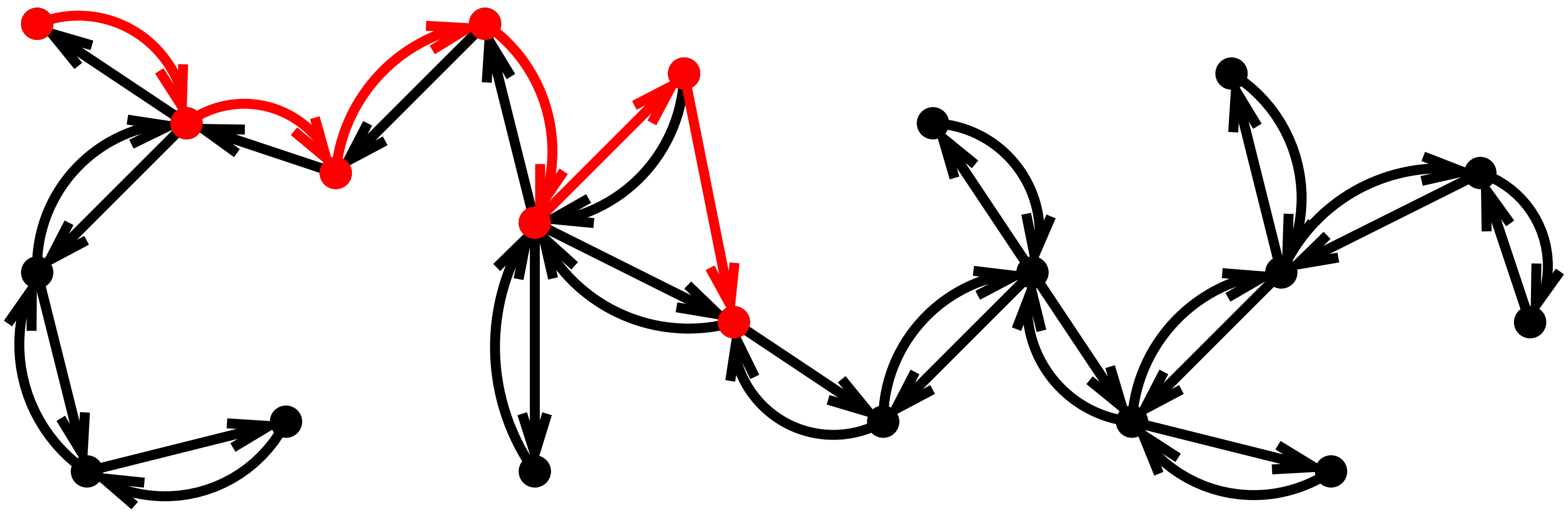
2-aproximação p/o TSP Métrico

(1) Árvore geradora de comprimento mínimo (polinomial)
(2) Dobre as arestas da árvore (todos os vértices tem grau par)
(3) Obtenha ciclo euleriano P (polinomial)
ciclo euleriano: passeio fechado que passa
exatamente uma vez por cada aresta
(4) Obtenha de P circuito hamiltoniano C



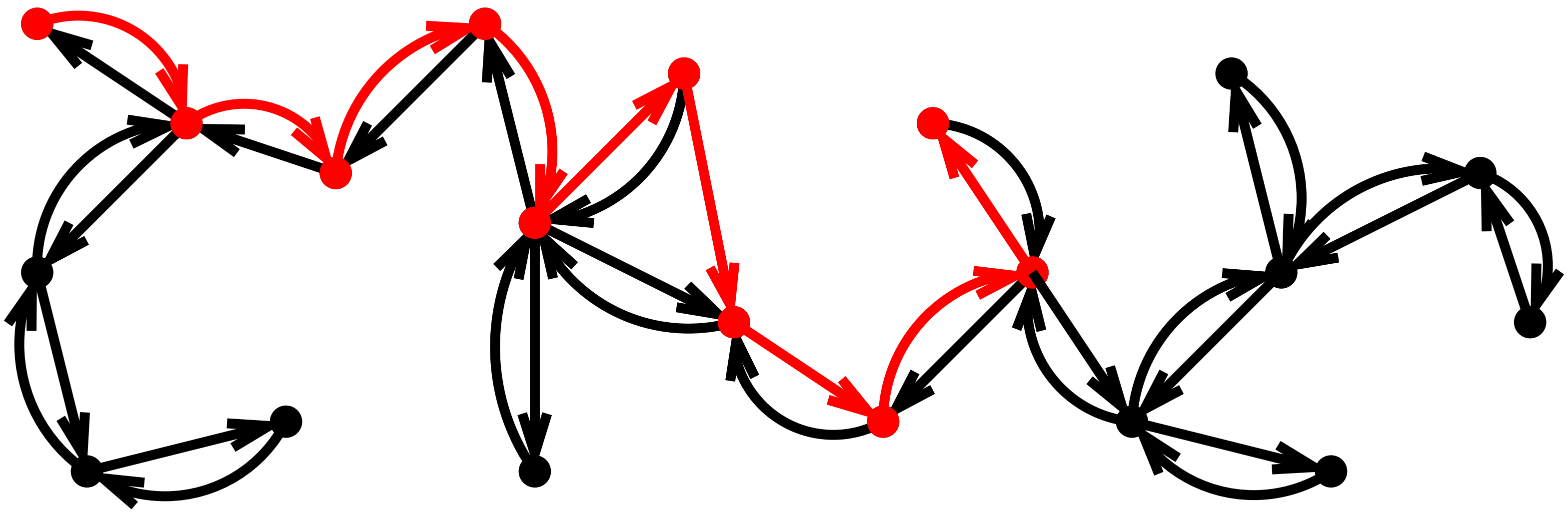
2-aproximação p/o TSP Métrico

(1) Árvore geradora de comprimento mínimo (polinomial)
(2) Dobre as arestas da árvore (todos os vértices tem grau par)
(3) Obtenha ciclo euleriano P (polinomial)
ciclo euleriano: passeio fechado que passa
exatamente uma vez por cada aresta
(4) Obtenha de P circuito hamiltoniano C



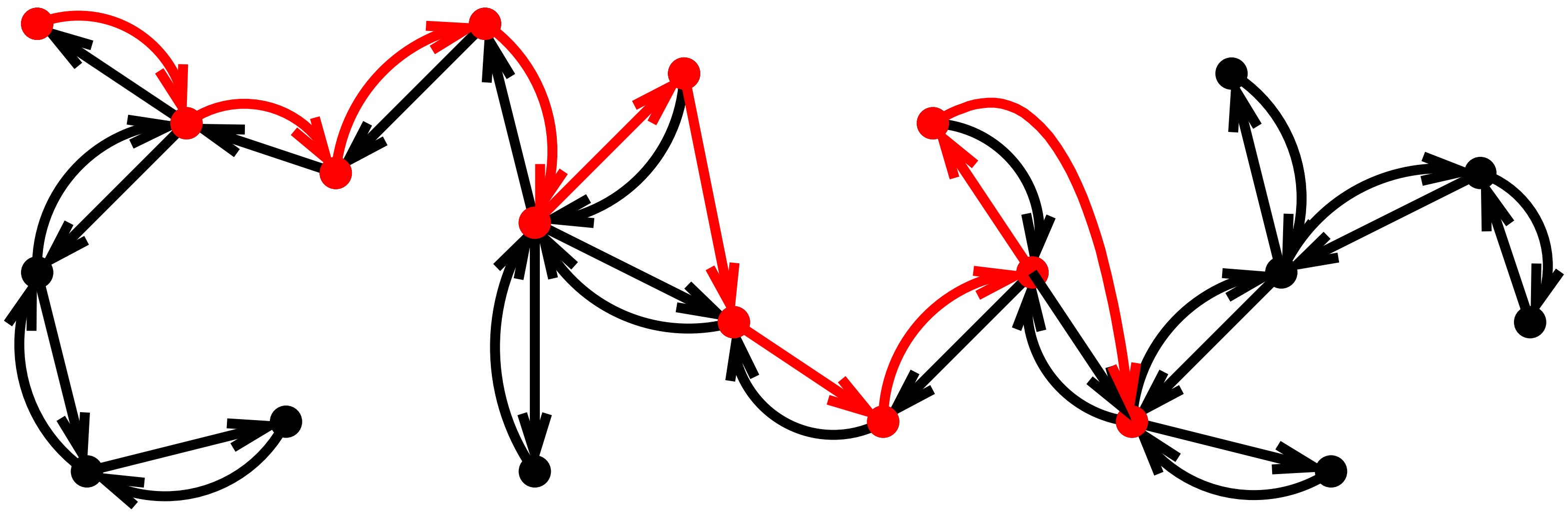
2-aproximação p/o TSP Métrico

(1) Árvore geradora de comprimento mínimo (polinomial)
(2) Dobre as arestas da árvore (todos os vértices tem grau par)
(3) Obtenha ciclo euleriano P (polinomial)
ciclo euleriano: passeio fechado que passa exatamente uma vez por cada aresta
(4) Obtenha de P circuito hamiltoniano C



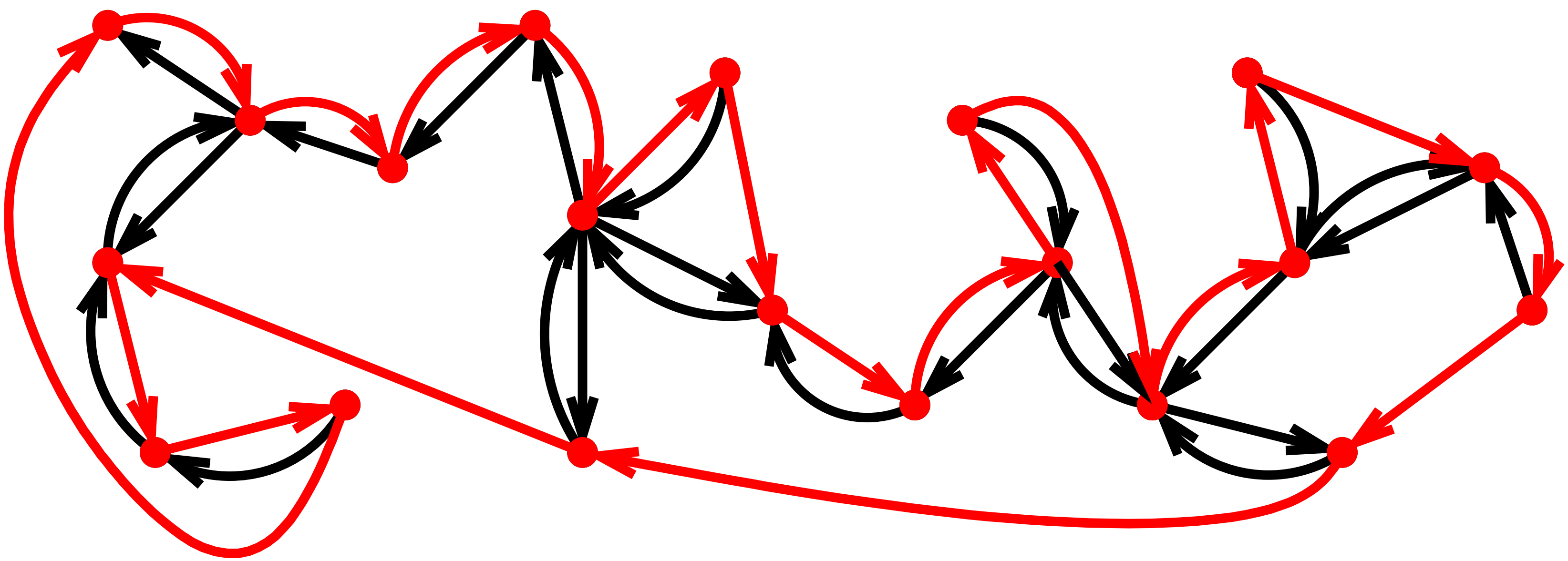
2-aproximação p/o TSP Métrico

(1) Árvore geradora de comprimento mínimo (polinomial)
(2) Dobre as arestas da árvore (todos os vértices tem grau par)
(3) Obtenha ciclo euleriano P (polinomial)
ciclo euleriano: passeio fechado que passa
exatamente uma vez por cada aresta
(4) Obtenha de P circuito hamiltoniano C



2-aproximação p/o TSP Métrico

(1) Árvore geradora de comprimento mínimo (polinomial)
(2) Dobre as arestas da árvore (todos os vértices tem grau par)
(3) Obtenha ciclo euleriano P (polinomial)
ciclo euleriano: passeio fechado que passa
exatamente uma vez por cada aresta
(4) Obtenha de P circuito hamiltoniano C

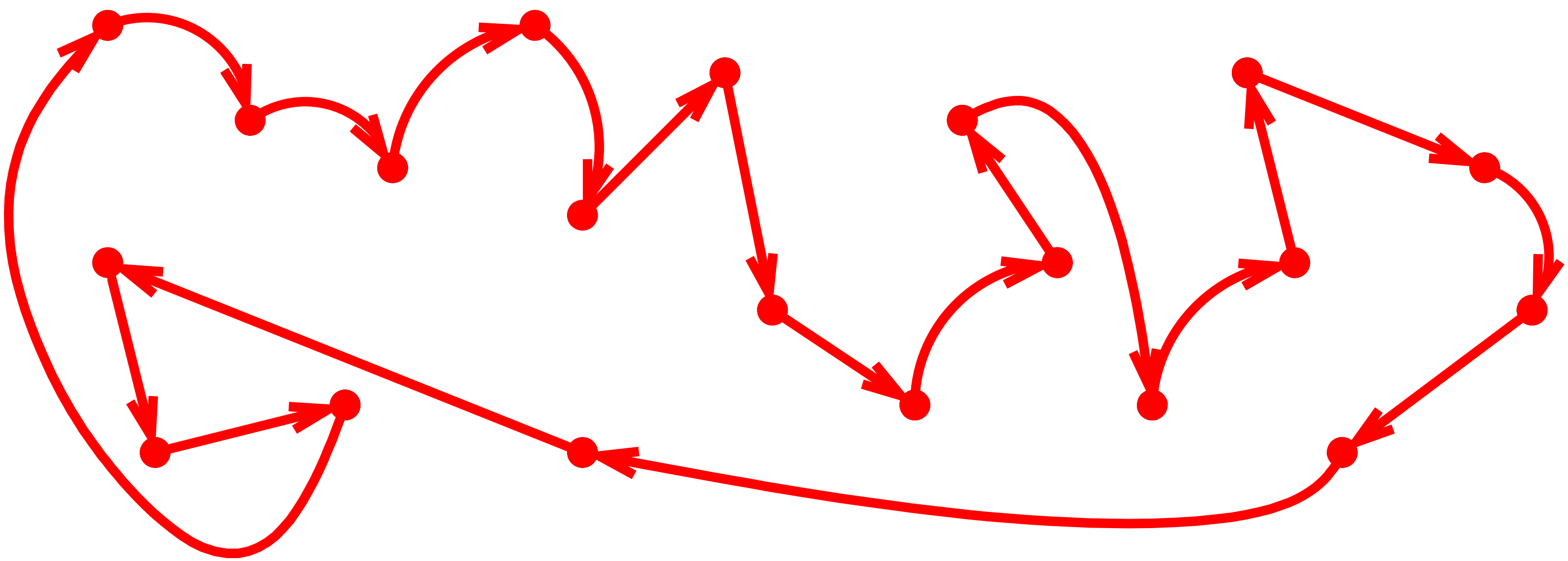


2-aproximação p/o TSP Métrico

(1) Árvore geradora de comprimento mínimo (polinomial)
(2) Dobre as arestas da árvore (todos os vértices tem grau par)
(3) Obtenha ciclo euleriano P (polinomial)

ciclo euleriano: passeio fechado que passa exatamente uma vez por cada aresta

(4) Obtenha de P circuito hamiltoniano C
(5) Devolva C



2-Aproximação p/o TSP Métrico

Algoritmo TSPM-Rosenkrantz-Stearn-Lewis (G, l)

$T \leftarrow \textsc{mst}(G, l)$

$T' \leftarrow T + T$

$P \leftarrow \textsc{euler}(T')$

$C \leftarrow \textsc{atalho}(P)$

devolve C

2-Aproximação p/o TSP Métrico

Algoritmo TSPM-Rosenkrantz-Stearn-Lewis (G, l)

$T \leftarrow$ MST(G, l)

$T' \leftarrow T + T$

$P \leftarrow$ EULER(T')

$C \leftarrow$ ATALHO(P)

devolve C

Tempo de execução: $m \log n$

n: o número de vértices de G
m: o número de arestas de G

2-Aproximação p/o TSP Métrico

Delimitação inferior para opt: opt $\geq l(T)$

onde T é árvore geradora de comprimento mínimo

2-Aproximação p/o TSP Métrico

Delimitação inferior para opt: opt $\geq \; l(T)$

onde T é árvore geradora de comprimento mínimo

Prova:

C^*: circuito hamiltoniano de comprimento mínimo

e: aresta de C^*

$C^* - e$ é árvore geradora

2-Aproximação p/o TSP Métrico

Delimitação inferior para opt: opt $\geq \; l(T)$

onde T é árvore geradora de comprimento mínimo

Prova:

C^*: circuito hamiltoniano de comprimento mínimo

e: aresta de C^*

$C^* - e$ é árvore geradora

$$\text{opt} \; = \; l(C^*) \; \geq \; l(C^* - e) \; \geq \; l(T). \quad \Box$$

2-Aproximação p/o TSP Métrico

Delimitação inferior para opt: opt $\geq \; l(T)$

onde T é árvore geradora de comprimento mínimo

Prova:

C^*: circuito hamiltoniano de comprimento mínimo

e: aresta de C^*

$C^* - e$ é árvore geradora

$$\text{opt} \; = \; l(C^*) \; \geq \; l(C^* - e) \; \geq \; l(T). \quad \Box$$

Teorema: TSPM-Rosenkrantz-Stearn-Lewis é uma 2-aproximação polinomial para o TSP métrico.

2-Aproximação p/o TSP Métrico

Delimitação inferior para opt: opt $\geq l(T)$

onde T é árvore geradora de comprimento mínimo

Prova:

C^*: circuito hamiltoniano de comprimento mínimo

e: aresta de C^*

$C^* - e$ é árvore geradora

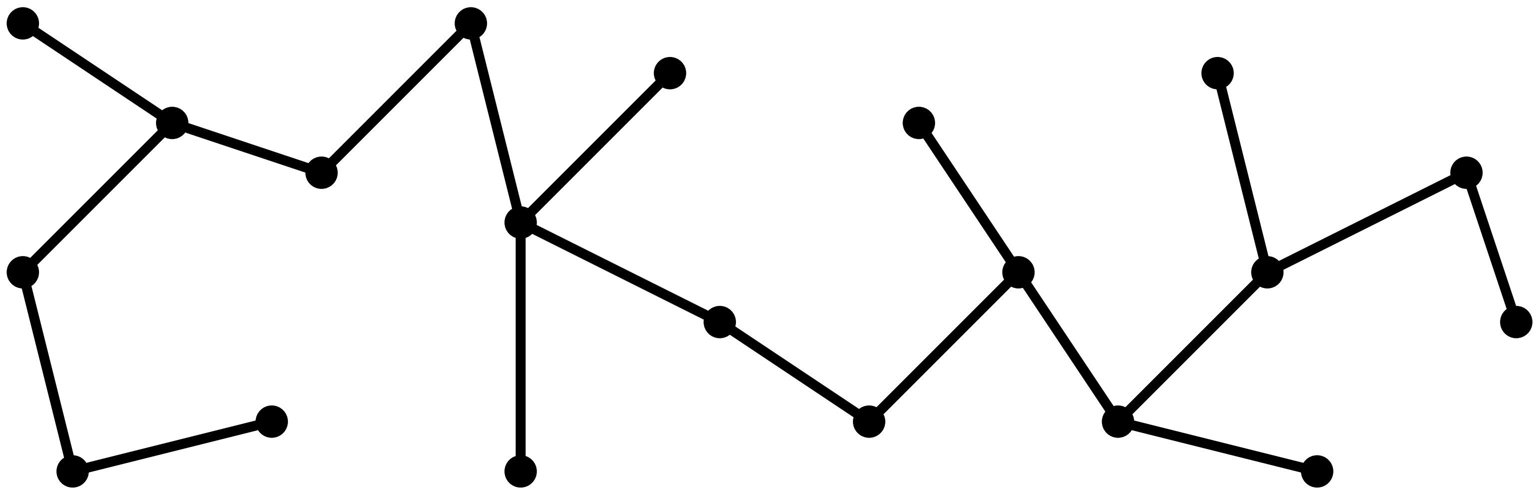
$$\text{opt} = l(C^*) \geq l(C^* - e) \geq l(T). \quad \square$$

Teorema: TSPM-Rosenkrantz-Stearn-Lewis é uma 2-aproximação polinomial para o TSP métrico.

Prova: $l(C) \leq l(P) = l(T') = 2\,l(T) \leq 2\,\text{opt}. \quad \square$

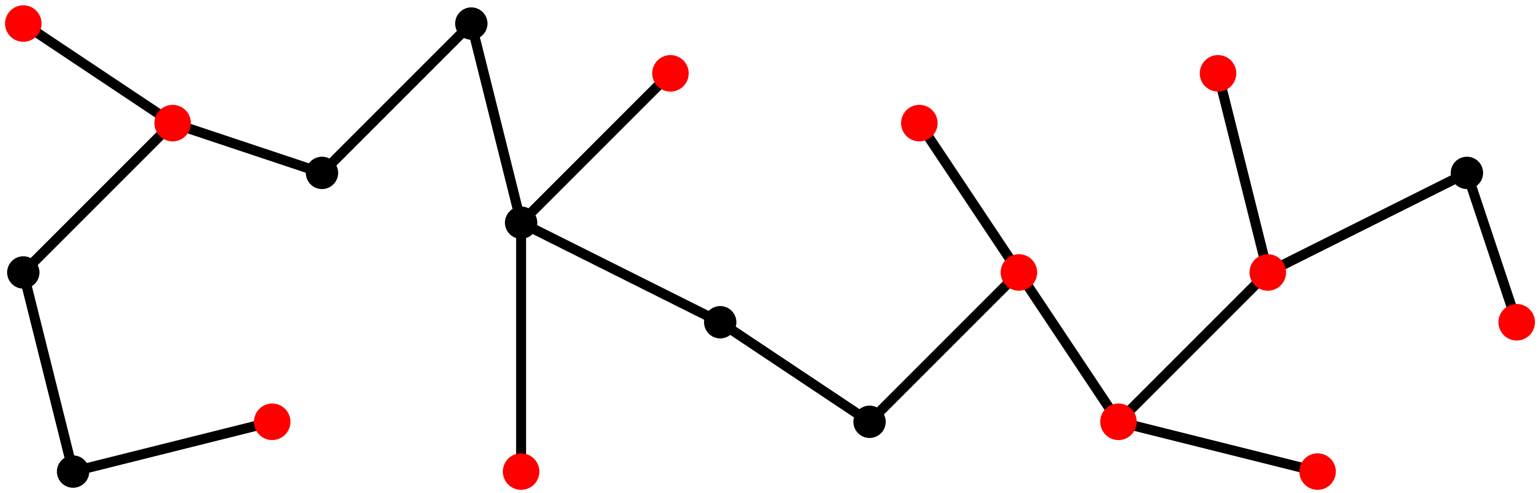
Algoritmo de Christofides

(1) Árvore geradora de comprimento mínimo



Algoritmo de Christofides

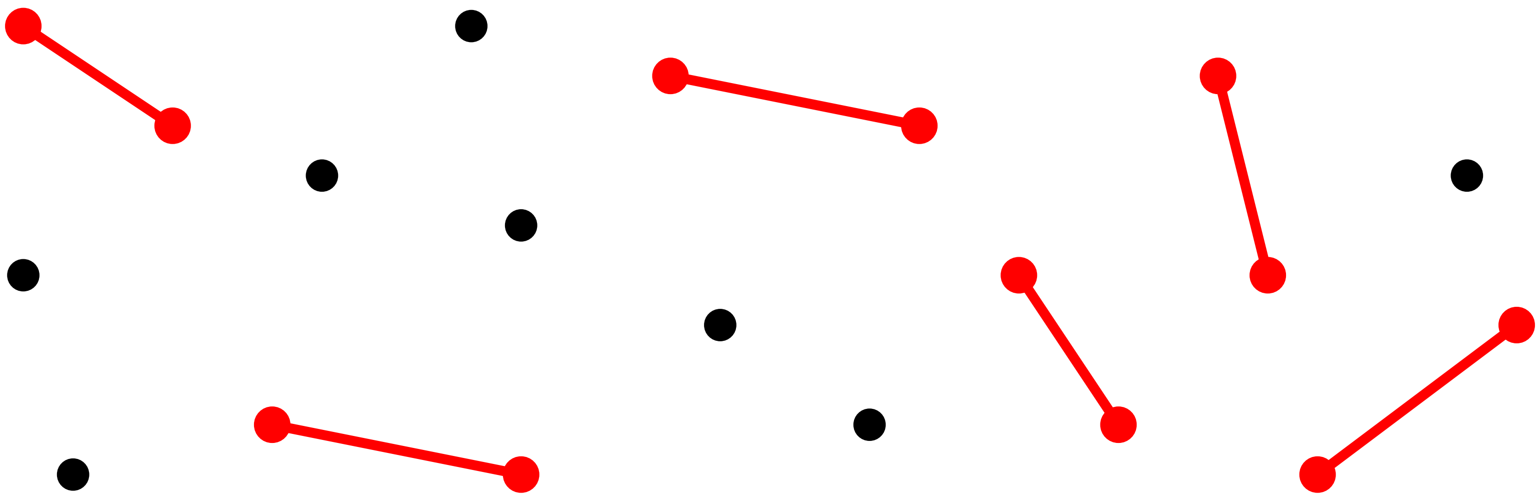
(1) Árvore geradora de comprimento mínimo



vértices de grau ímpar

Algoritmo de Christofides

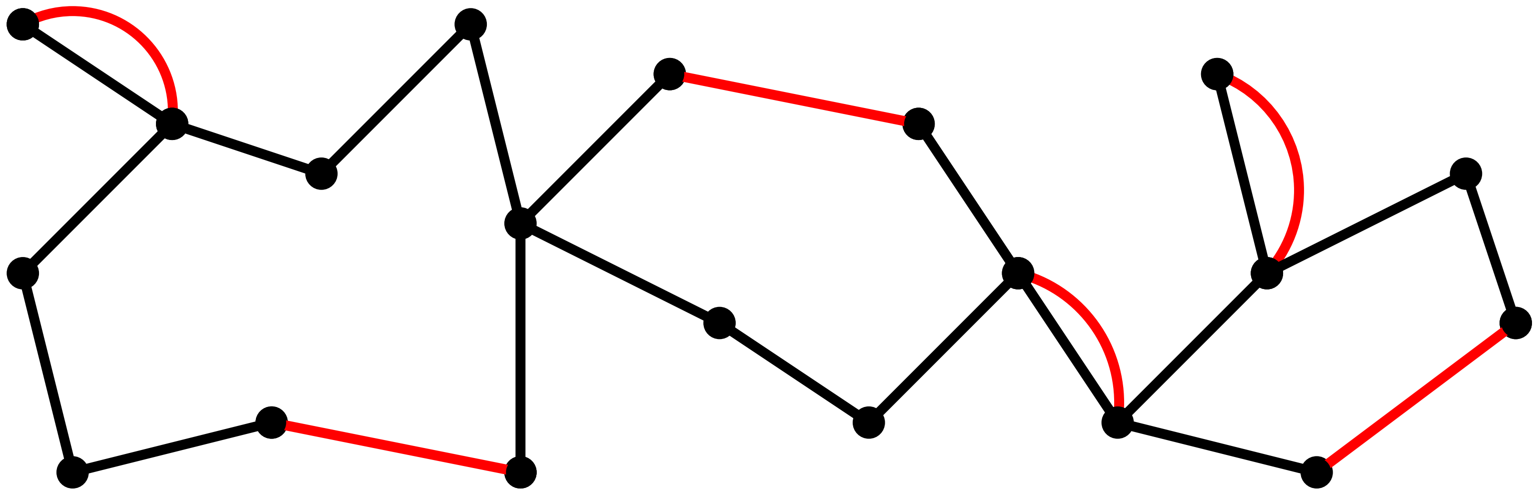
(1) Árvore geradora de comprimento mínimo



(2) Emparelhamento perfeito de comprimento mínimo no subgrafo induzido pelos vértices de grau ímpar (polinomial)

Algoritmo de Christofides

(1) Árvore geradora de comprimento mínimo

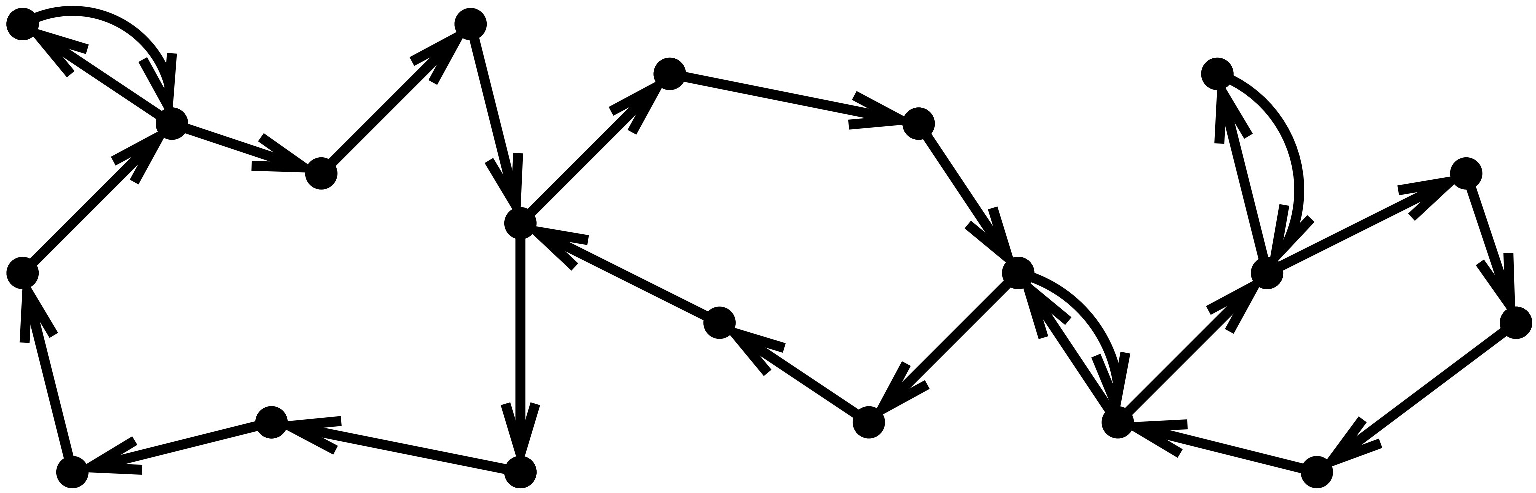


(2) Emparelhamento perfeito de comprimento mínimo no subgrafo induzido pelos vértices de grau ímpar (polinomial)

(3) Junte os dois obtendo T' euleriano

Algoritmo de Christofides

(1) Árvore geradora de comprimento mínimo



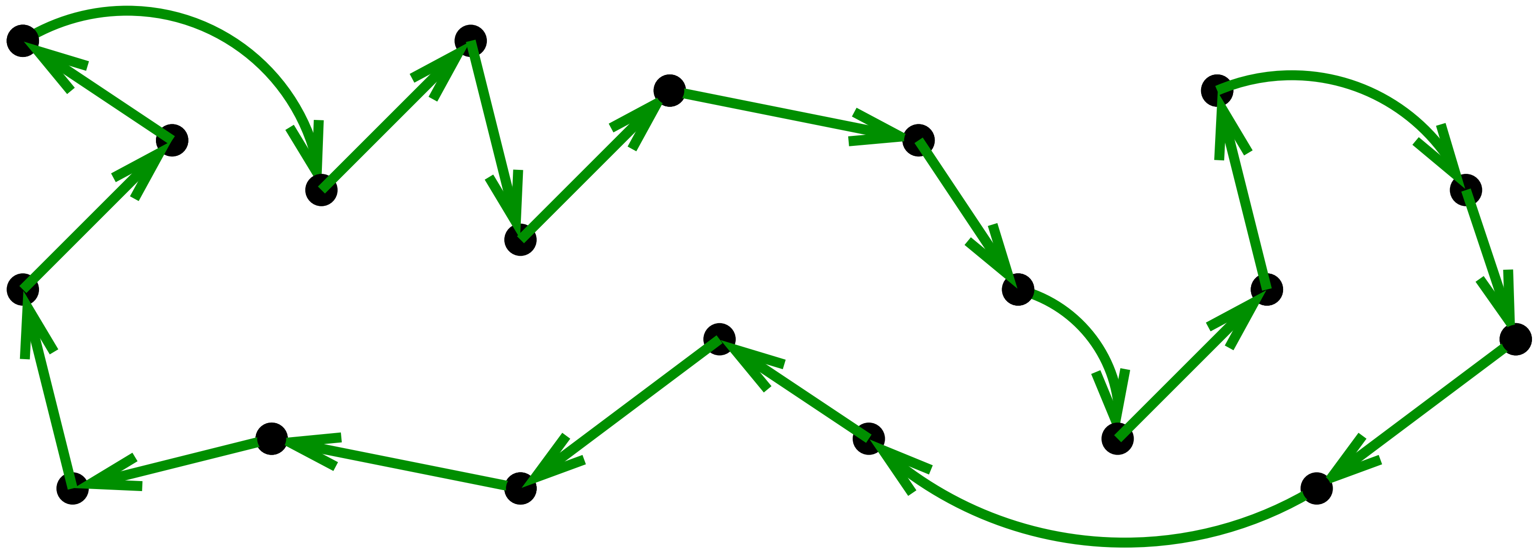
(2) Emparelhamento perfeito de comprimento mínimo no subgrafo induzido pelos vértices de grau ímpar (polinomial)

(3) Junte os dois obtendo T' euleriano

(4) Obtenha ciclo euleriano P de T'

Algoritmo de Christofides

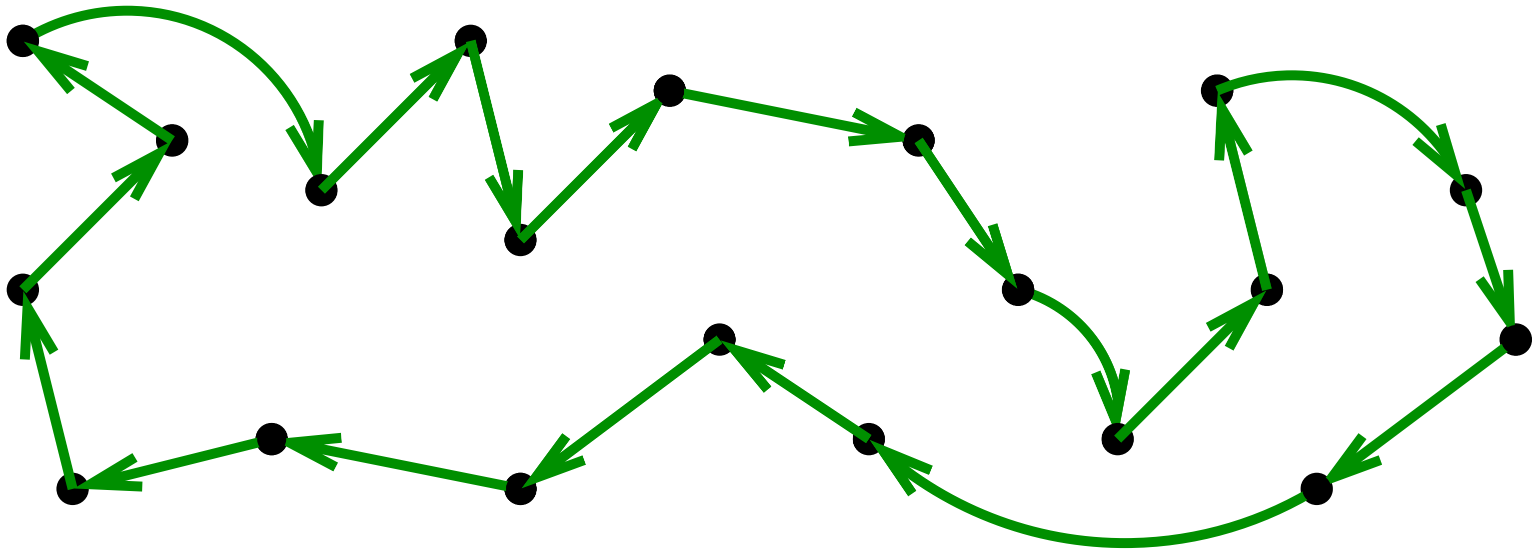
(1) Árvore geradora de comprimento mínimo



(2) Emparelhamento perfeito de comprimento mínimo no subgrafo induzido pelos vértices de grau ímpar (polinomial)
(3) Junte os dois obtendo T' euleriano
(4) Obtenha ciclo euleriano P de T'
(5) Obtenha de P circuito hamiltoniano C

Algoritmo de Christofides

(1) Árvore geradora de comprimento mínimo



(2) Emparelhamento perfeito de comprimento mínimo no subgrafo induzido pelos vértices de grau ímpar (polinomial)
(3) Junte os dois obtendo T' euleriano
(4) Obtenha ciclo euleriano P de T'
(5) Obtenha de P circuito hamiltoniano C
(6) Devolva C

Algoritmo de Christofides

Algoritmo TSPM-Christofides (G, l)

$T \leftarrow \textsc{mst}(G, l)$
$I \leftarrow$ conjunto de vértices de grau ímpar de T
$M \leftarrow \textsc{edmonds}(G[I], l)$
$T' \leftarrow T + M$
$P \leftarrow \textsc{euler}(T')$
$C \leftarrow \textsc{atalho}(P)$
devolve C

($G[I]$: subgrafo de G induzido por I)

Algoritmo de Christofides

Algoritmo TSPM-Christofides (G, l)

$T \leftarrow \text{MST}(G, l)$
$I \leftarrow$ conjunto de vértices de grau ímpar de T
$M \leftarrow \text{EDMONDS}(G[I], l)$
$T' \leftarrow T + M$
$P \leftarrow \text{EULER}(T')$
$C \leftarrow \text{ATALHO}(P)$
devolve C

($G[I]$: subgrafo de G induzido por I)

Tempo de execução: n^3
(n: o número de vértices de G)

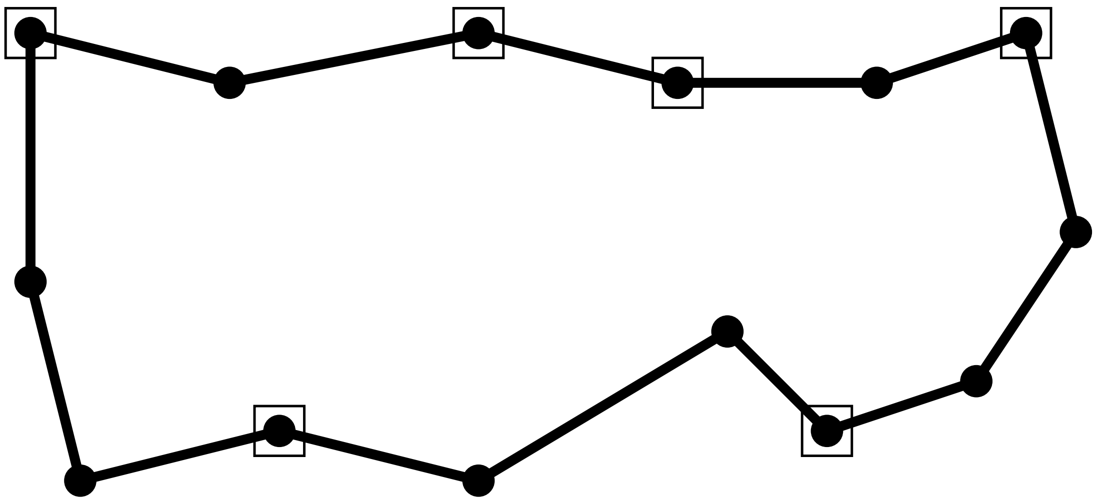
Algoritmo de Christofides

Uma segunda delimitação para opt: opt $\geq 2\,l(M)$
onde M é e. p. de comprimento mínimo em $G[I]$

Algoritmo de Christofides

Uma segunda delimitação para opt: opt $\geq 2\,l(M)$
onde M é e. p. de comprimento mínimo em $G[I]$

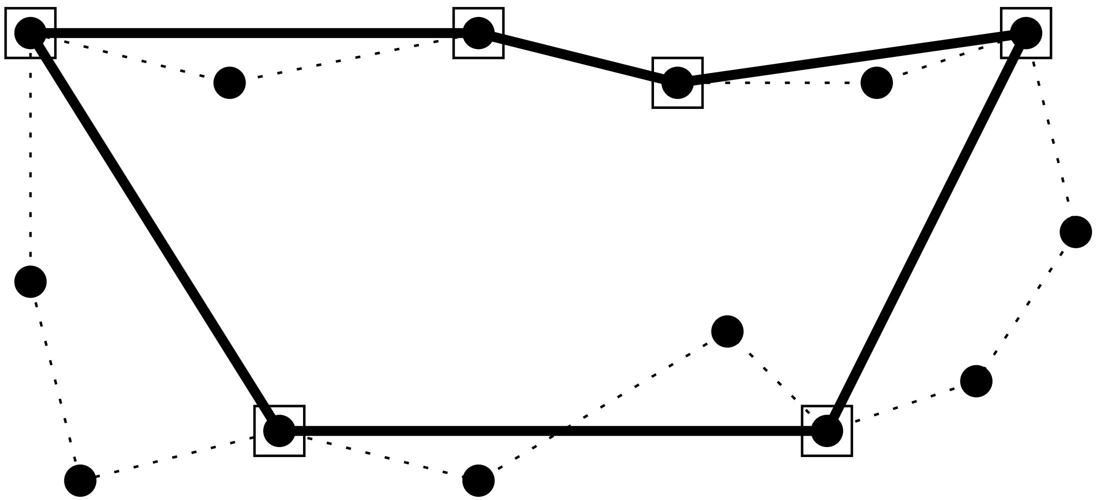
Pr: C^*: circuito hamiltoniano de comprimento mínimo
I: conj. vért. de grau ímpar de T ($|I|$ é par)



Algoritmo de Christofides

Uma segunda delimitação para opt: opt $\geq 2\,l(M)$
onde M é e. p. de comprimento mínimo em $G[I]$

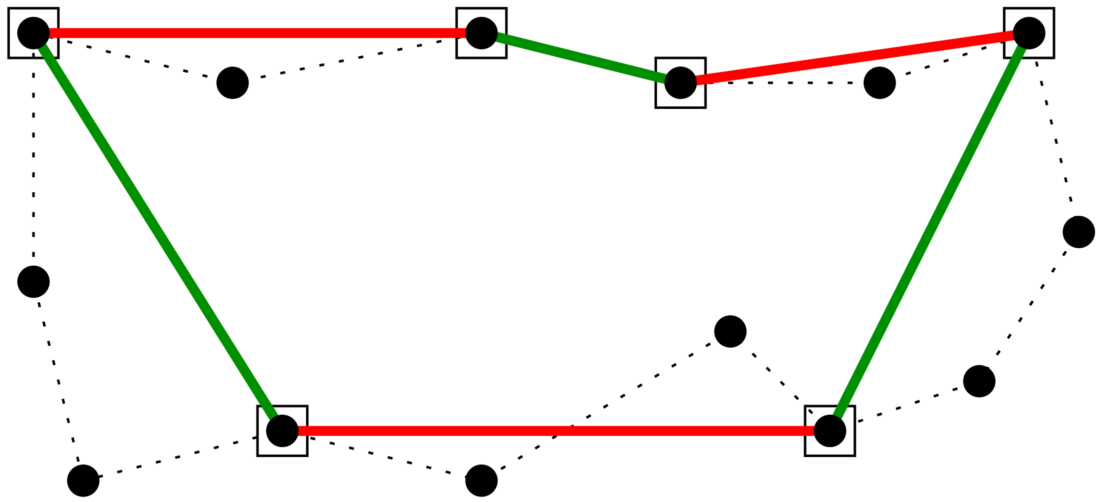
Pr: C^*: circuito hamiltoniano de comprimento mínimo
I: conj. vért. de grau ímpar de T ($|I|$ é par)
C': circuito induzido por C^* em I



Algoritmo de Christofides

Uma segunda delimitação para opt: opt $\geq 2\,l(M)$
onde M é e. p. de comprimento mínimo em $G[I]$

Pr: C^*: circuito hamiltoniano de comprimento mínimo
I: conj. vért. de grau ímpar de T ($|I|$ é par)
C': circuito induzido por C^* em I



C' determina dois e. p. em $G[I]$: M_1 e M_2

Algoritmo de Christofides

Uma segunda delimitação para opt: opt $\geq 2\,l(M)$
onde M é e. p. de comprimento mínimo em $G[I]$.

Prova:

$$\begin{aligned} 2\,l(M) &\leq l(M_1) + l(M_2) \\ &= l(C') \\ &\leq l(C^*) \qquad \text{(pela desigualdade triangular)} \\ &= \text{opt}\,. \end{aligned}$$

$\square$

Algoritmo de Christofides

Teorema: TSPM-Christofides é uma $1,5$-aproximação polinomial para o TSP métrico.

Algoritmo de Christofides

Teorema: TSPM-Christofides é uma $1,5$-aproximação polinomial para o TSP métrico.

Prova:

$$\begin{aligned} l(C) &\leq l(P) \\ &= l(T') \\ &= l(T) + l(M) \\ &\leq \text{opt} + \frac{1}{2}\,\text{opt} \\ &= \frac{3}{2}\,\text{opt}\,. \end{aligned}$$

$\square$

Algoritmo de Christofides

Teorema: TSPM-Christofides é uma $1,5$-aproximação polinomial para o TSP métrico.

Prova:

$$\begin{aligned} l(C) &\leq l(P) \\ &= l(T') \\ &= l(T) + l(M) \\ &\leq \text{opt} + \frac{1}{2}\,\text{opt} \\ &= \frac{3}{2}\,\text{opt}\,. \end{aligned}$$

$\square$

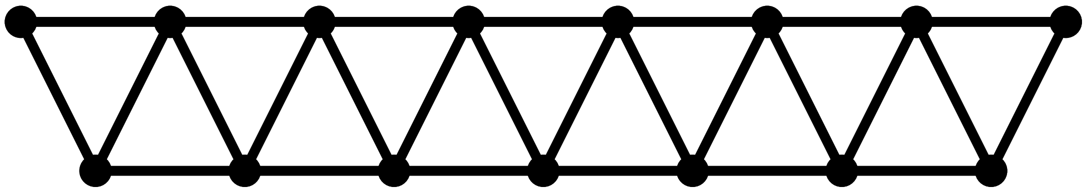
Melhor algoritmo de aproximação conhecido para o TSP métrico.

Algoritmo de Christofides

A análise é justa.

Algoritmo de Christofides

A análise é justa.

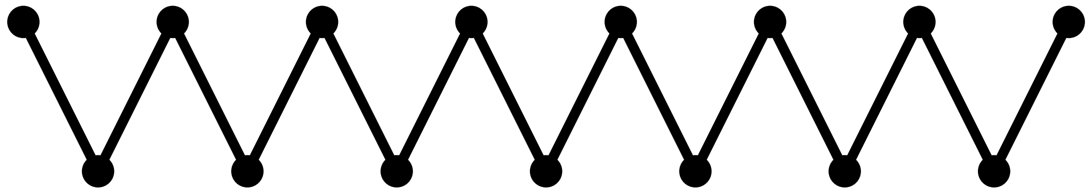


$2n + 1$ vértices

Algoritmo de Christofides

A análise é justa.

Christofides

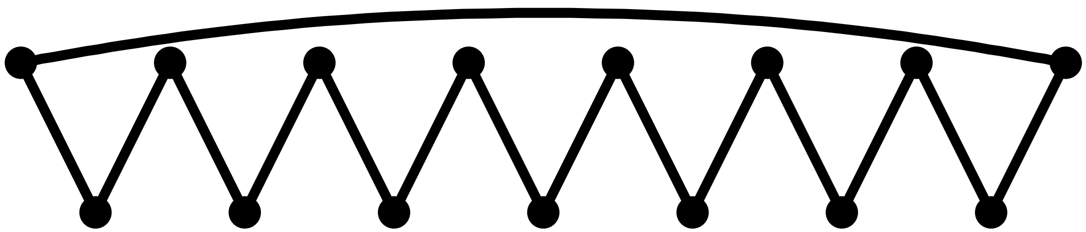


$2n+1$ vértices

Algoritmo de Christofides

A análise é justa.

Christofides

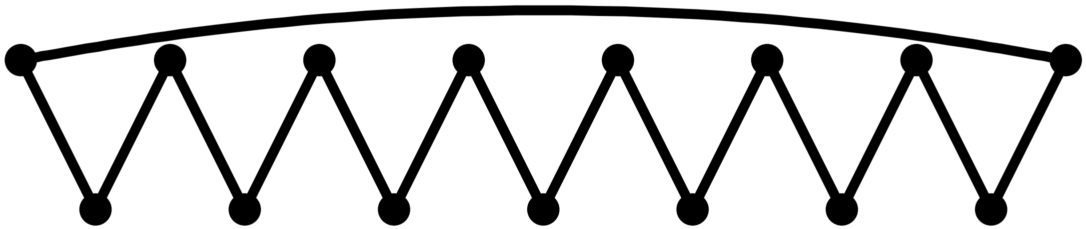


$2n+1$ vértices
Comprimento: $3n$

Algoritmo de Christofides

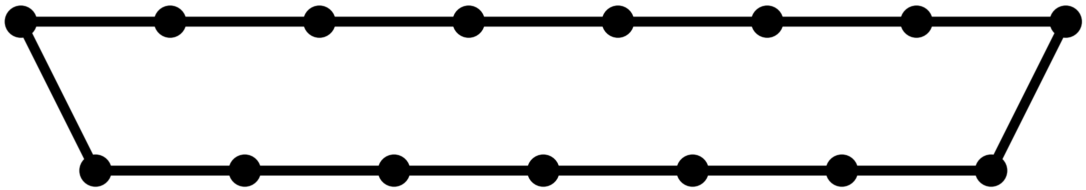
A análise é justa.

Christofides



$2n + 1$ vértices
Comprimento: $3n$

Circuito ótimo



Comprimento: $2n + 1$

TSP Euclideano

PTAS: esquema de aproximação polinomial

$(1 + \epsilon)$-aproximação polinomial para todo $\epsilon > 0$ fixo

Arora'96 e Mitchel'96: PTAS para o TSP euclideano

Idéia:

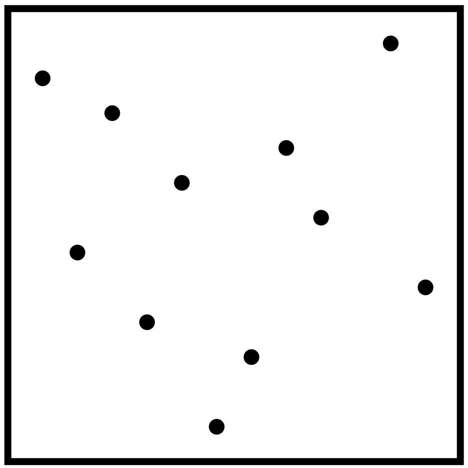
TSP Euclideano

PTAS: esquema de aproximação polinomial

$(1+\epsilon)$-aproximação polinomial para todo $\epsilon > 0$ fixo

Arora'96 e Mitchel'96: PTAS para o TSP euclideano

Idéia:



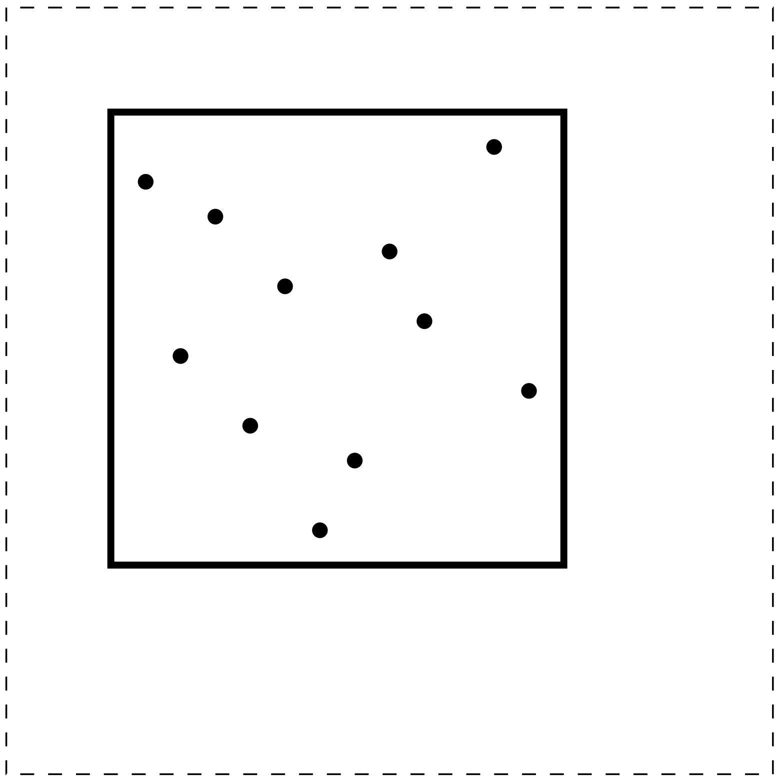
TSP Euclideano

PTAS: esquema de aproximação polinomial

$(1+\epsilon)$-aproximação polinomial para todo $\epsilon > 0$ fixo

Arora'96 e Mitchel'96: PTAS para o TSP euclideano

Idéia:



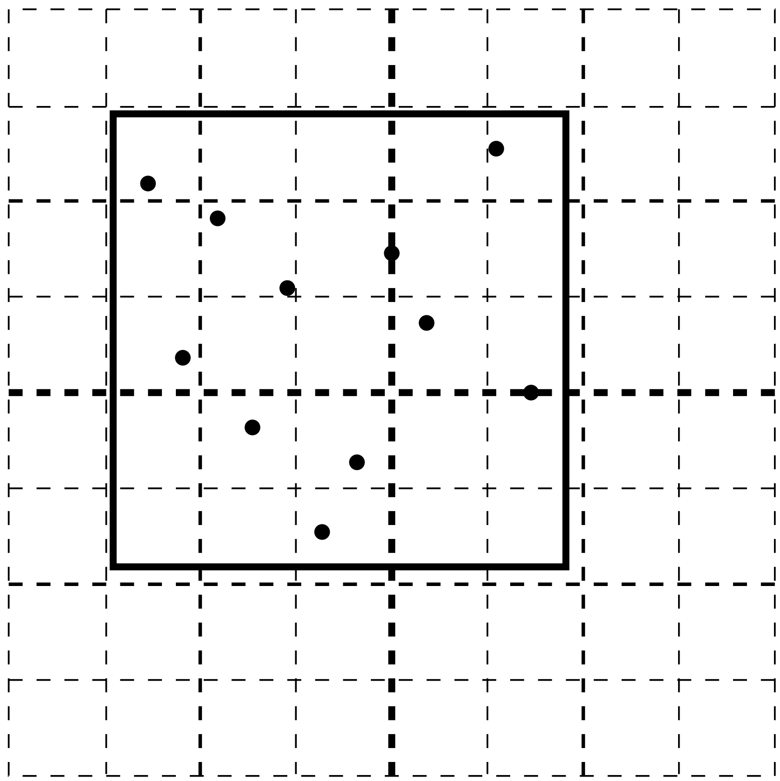
TSP Euclideano

PTAS: esquema de aproximação polinomial

$(1+\epsilon)$-aproximação polinomial para todo $\epsilon > 0$ fixo

Arora'96 e Mitchel'96: PTAS para o TSP euclideano

Idéia:



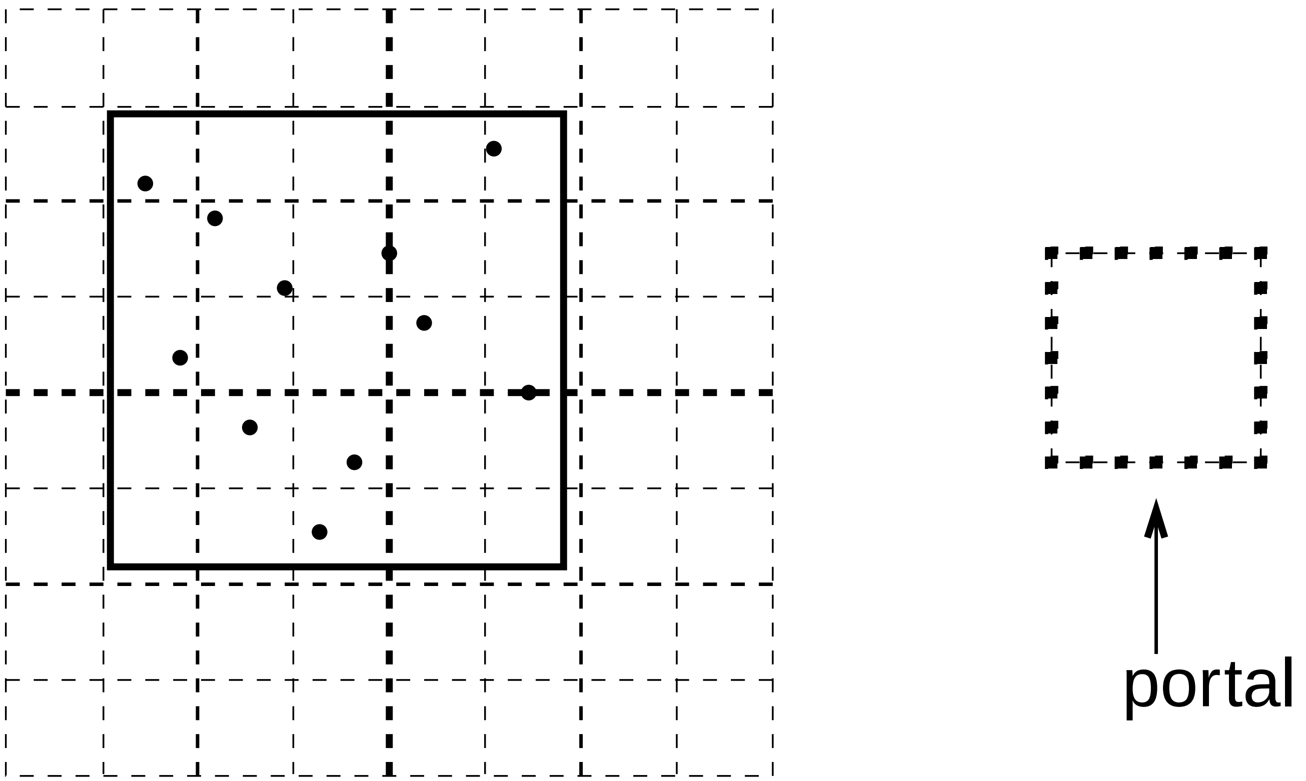
TSP Euclideano

PTAS: esquema de aproximação polinomial

$(1+\epsilon)$-aproximação polinomial para todo $\epsilon > 0$ fixo

Arora'96 e Mitchel'96: PTAS para o TSP euclideano

Idéia:



TSP Euclideano

PTAS: esquema de aproximação polinomial

$(1+\epsilon)$-aproximação polinomial para todo $\epsilon > 0$ fixo

Arora'96 e Mitchel'96: PTAS para o TSP euclideano

Idéia:

Circuito que respeita portal: entra e sai dos quadrados da dissecção através de portais.

Algoritmo: Encontra um circuito hamiltoniano mais curto que respeita os portais por programação dinâmica.

Tal circuito está tão próximo quando se queira de um TSP tour.

Resultado de Inaproximabilidade

$\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ função polinomialmente computável

Teorema (Sahni e Gonzalez '76): Se existir $\alpha(n)$-aproximação polinomial p/o TSP(G, l), onde $n := |V_G|$, então P=NP.

Resultado de Inaproximabilidade

$\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ função polinomialmente computável

Teorema (Sahni e Gonzalez '76): Se existir $\alpha(n)$-aproximação polinomial p/o TSP(G, l), onde $n := |V_G|$, então P=NP.

Problema HC: Dado G, decidir se G tem ou não um circuito hamiltoniano.

- NP-completo [K72]

Resultado de Inaproximabilidade

Teorema (Sahni e Gonzalez '76): Se existir $\alpha(n)$-aproximação polinomial p/o TSP(G, l), onde $n := |V_G|$, então P=NP.

Pr:

$\alpha(n)$-aproximação polinomial p/o TSP

$\Downarrow$

algoritmo polinomial p/o HC

Resultado de Inaproximabilidade

Teorema (Sahni e Gonzalez '76): Se existir $\alpha(n)$-aproximação polinomial p/o TSP(G, l), onde $n := |V_G|$, então P=NP.

Pr:

$$\alpha(n)\text{-aproximação polinomial p/o TSP} \quad \leftarrow A$$

$$\Downarrow$$

$$\text{algoritmo polinomial p/o HC} \quad \leftarrow B$$

Resultado de Inaproximabilidade

Teorema (Sahni e Gonzalez '76): Se existir $\alpha(n)$-aproximação polinomial p/o TSP(G, l), onde $n := |V_G|$, então P=NP.

Pr:

$$\alpha(n)\text{-aproximação polinomial p/o TSP} \quad \leftarrow A$$
$$\Downarrow$$
$$\text{algoritmo polinomial p/o HC} \quad \leftarrow B$$

Algoritmo B (G)

$H \leftarrow$ grafo completo em V_G

para cada e em E_G faça $l_e \leftarrow 1$

para cada e em $E_H \setminus E_G$ faça $l_e \leftarrow \alpha(|V_G|)|V_G| + 1$

$C \leftarrow A(H, l)$

se $l(C) \leq \alpha(|V_G|)|V_G|$

então devolva "Sim"

então devolva "Não"

Resultado de Inaproximabilidade

A polinomial $\Rightarrow$ B polinomial

Resultado de Inaproximabilidade

A polinomial $\Rightarrow$ B polinomial

se existe circuito hamiltoniano em G,
então opt $= |V_G|$ e

$$l(C) \leq \alpha(|V_G|)\,\text{opt} = \alpha(|V_G|)|V_G|.$$

Resultado de Inaproximabilidade

A polinomial $\Rightarrow$ B polinomial

se existe circuito hamiltoniano em G,
então opt $= |V_G|$ e

$$l(C) \;\leq\; \alpha(|V_G|)\,\text{opt} \;=\; \alpha(|V_G|)|V_G|.$$

se não existe circuito hamiltoniano em G,
então

$$l(C) \;\geq\; \alpha(|V_G|)|V_G| + 1$$

pois qq circ. hamilt. usa $e \notin E_G$
(i.e., $l_e \;=\; \alpha(|V_G|)|V_G| + 1$).

$\square$

Para completar...