MAC 338 – Anáise de Algoritmos
PRIMEIRO SEMESTRE DE 2008
Primeira Prova – 10 de abril

Nome do aluno: ________________________________ **Curso**: __________

Assinatura: ____

No. USP: __________________ **Professor**: __________________________

Instruções

1. Não destaque as folhas deste caderno.
2. A prova pode ser feita a lápis.
3. A legibilidade também faz parte da nota!
4. A prova consta de 4 questões. Verifique antes de começar a prova se o seu caderno de questões está completo.
5. Não é permitido o uso de folhas avulsas para rascunho.
6. Não é necessário apagar rascunhos no caderno de questão mas especifique qual é a resposta e qual é o rascunho.
7. A prova é sem consulta.

Não escrever nesta parte da folha

Questão	Nota	Observação
1		
2		
3		
4		
Total		

Boa Sorte !

1. [2,0 pontos]
   Mostre que $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \Theta(n^3)$.

2. [2,5 pontos]
Considere a seguinte função recursiva:

```
f(n) {
  if n > 1 {
    f(⌊n/2⌋);
    posprocessa(n);
  }
}
```

Suponha que a função posprocessa(n) consuma tempo $\Theta(n)$. Escreva uma recorrência para o tempo $T(n)$ consumido pela chamada $f(n)$. Resolva a recorrência, deduzindo a ordem de crescimento da função $T(n)$. Justifique a sua resposta.

3. [3,0 pontos]
Suponha que temos k vetores ordenados, cada um com n elementos, e que se queira combiná-los num vetor único ordenado com os kn elementos.

   (a) Aqui está uma estratégia: usando o INTERCALA, intercalamos os dois primeiros vetores, e então o resultado com o terceiro, e o resultado seguinte com o quarto, e assim por diante. Escreva essa estratégia em pseudocódigo e analise-a concluindo qual é a sua complexidade no pior caso. (Quanto mais precisa for a sua resposta em termos assintótico, melhor. Note que a complexidade será dependente de n e de k.)

   (b) Dê uma solução mais eficiente para este problema, usando divisão e conquista. Escreva o seu algoritmo em pseudocódigo e analise-o. Compare com a complexidade do algoritmo anterior e comente.

   Obs: Quanto mais precisas forem as suas respostas em termos assintóticos, melhor. Note que a complexidade dos algoritmos serão naturalmente dependente de n e de k. Você não precisa escrever o código do INTERCALA. Lembre-se apenas do seu protótipo e descrição:

   INTERCALA (A, p, q, r)

   Dados $A[p \, .. \, q]$ e $A[q + 1 \, .. \, r]$ crescentes, rearranjar $A[p \, .. \, r]$ de modo que ele fique em ordem crescente.

4. [2,5 pontos]
Considere o seguinte algoritmo que determina o segundo maior elemento de um vetor $v[1 \,..\, n]$ com $n \geq 2$ números positivos distintos.

Algoritmo Máximo (v, n)

1. $maior \leftarrow 0$
2. *segundo_maior* $\leftarrow 0$
3. **para** $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**
4.   **se** $v[i] > maior$
5.   **então** *segundo_maior* $\leftarrow maior$
6. $maior \leftarrow v[i]$
7.   **senão se** $v[i] >$ *segundo_maior*
8.   **então** *segundo_maior* $\leftarrow v[i]$
9. **devolva** *segundo_maior*

Suponha que v é uma permutação de 1 a n escolhida ao acaso dentre todas as permutações de 1 a n, de acordo com a distribuição uniforme de probabilidade. Seja X o número de vezes que a variável *segundo_maior* é alterada (ou seja, o número de execuções das linhas 5 e 8 do algoritmo) numa chamada de Máximo(v, n). Note que X é uma variável aleatória. Calcule o valor esperado de X. Deduza depois a ordem de crescimento de $E[X]$ em função de n.