MAC 338 - Análise de Algoritmos

Departamento de Ciência da Computação

Primeiro semestre de 2008

Lista 1

A seguinte notação é muito usada em análise de algoritmos:

$\lfloor x \rfloor$ denota o inteiro i tal que $i \leq x < i + 1$ e
$\lceil x \rceil$ denota o inteiro j tal que $j - 1 < x \leq j$.

Diz-se que $\lfloor x \rfloor$ é o *chão* de x e $\lceil x \rceil$ é o *teto* de x.

---

1. Mostre que
$$\frac{n-1}{2} \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq \frac{n}{2} \quad \text{e} \quad \frac{n}{2} \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil \leq \frac{n+1}{2},$$
para qualquer inteiro $n \geq 1$.

2. Para inteiros n, m, simplifique
(a) $\lfloor \frac{n+m}{2} \rfloor + \left\lfloor \frac{n-m+1}{2} \right\rfloor$ (b) $\lceil \frac{n+m}{2} \rceil + \left\lceil \frac{n-m+1}{2} \right\rceil$.

3. Prove que
   (a) $n^2 + 10n + 20 \; = \; O(n^2)$
   (b) $\lceil n/3 \rceil \; = \; O(n)$
   (c) $\lg n \; = \; O(\log_{10} n)$
   (d) $n \; = \; O(2^n)$
   (e) $n/1000$ não é $O(1)$
   (f) $n^2/2$ não é $O(n)$

   (Lembre-se que $\lg n$ denota o logaritmo na base 2 de n.)

4. Faz sentido dizer "$T(n) = O(n^2)$ para $n \geq 3$"?

5. Interprete e prove as afirmações abaixo:
   (a) $O(n^2) + O(n^2) + O(n^2) = O(3n^2)$
   (b) $O(3n^2 + 4n) = O(n^2)$

6. Prove ou dê um contra-exemplo para as afirmações abaixo:
   (a) $\lg \sqrt{n} \; = \; O(\lg n)$
   (b) $\lceil \lg n \rceil \; = \; O(\lg n)$
   (c) Se $f(n) = O(g(n))$ e $g(n) = O(h(n))$ então $f(n) = O(h(n))$.
   (d) Se $f(n) = O(g(n))$ e $g(n) = \Theta(h(n))$ então $f(n) = \Theta(h(n))$.
   (e) Suponha que $\log(g(n)) > 0$ e que $f(n) \geq 1$ para todo n suficientemente grande. Neste caso, se $f(n) = O(g(n))$ então $\log(f(n)) = O(\log(g(n)))$.
   (f) Se $f(n) = O(g(n))$ então $2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$.

7. Prove que
(a) $\sum_{i=1}^{n} i^k$ é $\Theta(n^{k+1})$ (b) $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} \leq 2$.